**Humboldt-Universität zu Berlin**
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

---

# Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

## Übungsblatt 7

Abgabe 5.12.2016 vor der Vorlesung.

---

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

   MC. 1. Gegeben sei $V = \mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$ mit den Operationen

   $$x + y \coloneqq x \cdot y\,, \qquad \lambda \cdot x \coloneqq x^\lambda\,, \qquad x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$$

   mit der üblichen Multipliplikation und Definition von Potenzen in $\mathbb{R}$. Dann ist $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 2. Sind $U, W$ Unterräume des Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$. Dann ist $U \setminus W$ auch ein Unterraum von $V$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 3. Es sei $U$ ein Unterraum des Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$. Dann gilt $0 \in U$, wobei $0$ hier das neutrale Element bzgl. der Addition in $V$ bezeichnet. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 4. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den üblichen Verknüpfungen sind ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 5. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen sind ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

2. Es sei $M$ eine nichtleere Menge und $K$ ein Körper. Wir definieren

   $$K^M \coloneqq \{ f : M \to K \mid f \text{ ist eine Abbildung} \}\,.$$

   Für $f, g \in K^M$ und $\lambda \in K$ seien $f + g$ und $\lambda f$ definiert durch

   $$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x) \qquad \forall x \in M\,.$$

   (i) Zeigen Sie, dass $K^M$ ein $K$-Vektorraum ist.

(ii) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen mit diesen Verknüpfungen jeweils ein Vektorraum ist:

- $K = \mathbb{R},\ M = \mathbb{N}$

$$W_1 \coloneqq \{\, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists x_1, \ldots x_n \in \mathbb{N} : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \setminus \{\, x_1, \ldots x_n \,\} \,\}$$

  für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten hier somit alle Funktionen, die höchstens $n$-mal Funktionswerte ungleich 0 annehmen. Untersuchen Sie, ob $W_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vektorraum ist.

- $K = \mathbb{R},\ M = \mathbb{R}$

$$W_2 \coloneqq \{\, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R} \,\}\ .$$

**3**. (i) Geben Sie einen Unterraum $U$ des $\mathbb{R}^2$, mit $U \neq \{\, 0 \,\}$ und $U \neq \mathbb{R}^2$, an. Welche geometrische Gestalt hat dieser?

(ii) Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in V$ gilt

$$n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ mal}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(iii) Sei $V$ ein beliebiger Vektorraum über $K$ und $U, W$ Unterräume von $V$. Zeigen Sie, dass die Summe $U + W$ wieder ein Unterraum ist. Die Summe ist hierbei definiert als

$$U + W = \{\, z = u + w \mid u \in U \wedge w \in W \,\}\ .$$

**4**. Seien $U$ und $W$ Unterräume eines Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$. Beweisen Sie:

(i) Satz 4.5 aus der Vorlesung: Der Unterraum $U$ ist selbst wieder ein Vektorraum.

(ii) $U \cup W$ ist genau dann ein Unterraum von $V$, wenn gilt $U \subset W$ oder $W \subset U$.