Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 8

Abgabe 12.12.2016 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

   MC. 1. Die Vektoren

   $$(i,1,0)\,,\quad (2+i,i,i)\,,\qquad (2i,-1-i,-1)$$

   sind linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 2. Die Vektoren

   $$(i,1,0)\,,\quad (2+i,i,i)\,,\qquad (2i,-1-i,-1)$$

   sind linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 3. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann ist der Nullvektor $0 \in V$ nur durch die triviale Linearkombination darstellbar. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 4. Wir betrachten den Vektorraum $V := \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung} \,\}$ über $\mathbb{R}$. Dann sind die Vektoren $\sin \in V$ und $\cos \in V$ linear abhängig.
   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 5. Wir betrachten einen Vektorraum V über einem Körper K. Weiter sei L ein Körper mit $L \subset K$. Dann ist V ein Vektorraum über L mit der Skalarmultiplikation auf $K \times V$ eingeschränkt auf $L \times V$. ☐ wahr ☐ falsch

2. Es seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum und X, Y nichtleere Teilmengen von V. Beweisen Sie folgende Eigenschaften der linearen Hülle:

   (i) Ist U ein Unterraum von V, so gilt $L(U) = U$.

   (ii) $L(L(X)) = L(X)$. (Hinweis: Nutzen Sie 2(i) zum Beweis.)

   (iii) $X \subset Y \;\Rightarrow\; L(X) \subset L(Y)$.

(iv) $L(X)$ ist der kleinste Unterraum von V, der X enthält, d.h. ist $W \subset V$ ein Unterraum mit $X \subset W$, so gilt $L(X) \subset W$.

3. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und es seien $x_1, \ldots, x_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $x_1, \ldots, x_n$ sind linear unabhängig.

(ii) Zu jedem $x \in L(\{ x_1, \ldots, x_n \})$ existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \, .$$

4. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, $v_j \in V$, $j = 1, \ldots, n$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren für jedes $j = 1, \ldots, n$

$$w_j := \sum_{i=1}^{j} v_i \quad \in V \, .$$

Zeigen Sie, dass auch $\{ w_1, \ldots, w_n \}$ eine Basis von V ist.