Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 9

Abgabe 4.1.2017 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. Multiple Choice Frage (10 Bonuspunkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

MC. 1. Für Vektoren $u, v, w \in V$ aus einem Vektorraum V gilt: Sind u, v linear unabhängig und v, w linear unabhängig, so sind auch u, v, w linear unabhängig.
☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Es sei $\{ v_1, \dots, v_k \} \subset \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. Es seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.
☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Für einen Unterraum U eines endlich dimensionalen Vektorraumes V über einem Körper K gilt:
Genau dann ist $U = V$, wenn $\dim(U) > \dim(V)$. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. Für einen Unterraum U eines endlich dimensionalen Vektorraumes V über einem Körper K gilt:
U ist endlich dimensional mit $\dim(U) \leq \dim(V)$. ☐ wahr ☐ falsch

2. (10 Bonuspunkte)

(i) Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Schreiben Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Es seien $U_1 = L(\{x_1, x_2, x_3\})$ und $U_2 = L(\{y_1, y_2, y_3\})$, wobei

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U_1, U_2, $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

3. (10 Bonuspunkte) Wir betrachten einen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $x_1, \dots, x_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist eine Basis von V.

(ii) $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(iii) $x_1, \dots, x_n$ sind linear unabhängig.

4. (10 Bonuspunkte) Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

(i) Zeigen Sie, dass es für jeden Unterraum U von V stets einen Unterraum W mit der Eigenschaft $V = U \oplus W$ gibt.

(ii) Ist dieser Unterraum W aus (i) im Allgemeinen eindeutig?

Frohe Weihnachten!