Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Probeklausur

Abgabe 6.2.2017 vor der Vorlesung.

---

1. Multiple Choice Frage (10 Bonuspunkte)

MC. 1. Die sieben Spalten einer 5×7-Matrix über $\mathbb{R}$ können niemals linear unabhängig sein. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ferner seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Dann ist $U_1 \backslash U_2$ immer ein Untervektorraum. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. Für Vektoren u, v, w aus einem Vektorraum V über einem Körper K gilt: Sind u, v, w linear unabhängig, so sind auch u, v linear unabhängig. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $T \in Hom(V, W)$. Falls T bijektiv ist, so ist T^{-1} linear. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. $(\mathbb{Z} \backslash \{ 0 \}, \cdot)$ ist mit der üblichen Multiplikation eine Gruppe. ☐ wahr ☐ falsch

2. (i) (4 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen $GL_n(K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(ii) (1 Bonuspunkte) Ist die Gruppe $GL_n(K)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für einen beliebigen Körper K mit der Matrixmultiplikation auch abelsch? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

3. (6 Bonuspunkte) Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und T_1, T_2 Endomorphismen mit

(i) $T_1 \circ T_1 = T_1$, $T_2 \circ T_2 = T_2$.

(ii) $T_1 + T_2 = id_V$.

(iii) $T_1 \circ T_2 = 0 = T_2 \circ T_1$.

Zeigen Sie, dass $V = T_1(V) \oplus T_2(V)$ gilt.

4. Es sei der Endomorphismus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 4x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$ gegeben.

(i) (4 Bonuspunkte) Ist f injektiv, surjektiv und / oder bijektiv?

(ii) (2 Bonuspunkte) Geben Sie die Urbilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

(iii) (4 Bonuspunkte) Geben Sie die Darstellungsmatrizen $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(T)$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(T)$ der Abbildung T bezüglich der Basen $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ an.

5. (i) (4 Bonuspunkte) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

(α) $U_1 := \{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 x_i = 0 \}$.

(β) $U_2 := \{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \prod_{i=1}^2 x_i = 0 \}$.

Begründen Sie Ihre Aussage.

(ii) (2 Bonuspunkte) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Unterraumes $U_3 := \{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \}$.

6. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.

(i) (4 Bonuspunkte) Für welche Werte des reellen Parameters a ist die Abbildung nicht umkehrbar? (Nutzen Sie den Gauß-Algorithmus.)

(ii) Bestimmen Sie für $a = \frac{1}{2}$

(α) (1 Bonuspunkte) den Rang von A,

(β) (2 Bonuspunkte) eine Basis des Kerns von A.