Blatt 1

Bearbeitung bis: 15.4.2019

Aufgabe 1. Diese Aufgabe soll verständlichen, daß die äußere Ableitung von Differentialformen als Verallgemeinerung der Operationen Gradient, Rotation und Divergenz aus der Vektoranalysis gesehen werden kann. Wir betrachten dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "="] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\cong"] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "\cong"] \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3)\,, \end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Isomorphismen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) &\to \Omega^1(\mathbb{R}^3)\,, \quad && f_1\partial x_1 + f_2\partial x_2 + f_3\partial x_3 \mapsto f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) &\to \Omega^2(\mathbb{R}^3)\,, \quad && f_1\partial x_1 + f_2\partial x_2 + f_3\partial x_3 \mapsto f_1 dx_2\wedge dx_3 - f_2 dx_1\wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ C^\infty(\mathbb{R}^3) &\to \Omega^3(\mathbb{R}^3)\,, \quad && f \mapsto f dx_1\wedge dx_2 \wedge dx_3\,. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung, für eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und ein Vektorfield $X = f_1\partial x_1 + f_2\partial x_2 + f_3\partial x_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ sind Gradient, Rotation und Divergenz definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\, f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\partial x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\partial x_3 \\ \mathrm{rot}\, X &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\partial x_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\partial x_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\partial x_3 \\ \mathrm{div}\, X &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Diagramm kommutiert und folgern Sie die Identitäten $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$ sowie $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$.

Aufgabe 2. Sei V ein orientierter reeler Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V von Index p. Wir erhalten die induzierte Biliniearform auf $\Lambda^k V$ definiert durch

$$\langle v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k, w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_k\rangle := \det\left(\langle v_i, w_j\rangle\right)_{1\le i,j\le k}\,.$$

Sei $(e_1,\ldots,e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Die *Hodge-Dualität* ist die Abbildung

$$*: \Lambda^k V \to \Lambda^{n-k}V\,, \qquad v\mapsto *v\,,$$

gegeben durch

$$v\wedge w = \langle *v, w\rangle\, e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n\,, \qquad \forall w\in\Lambda^{n-k}V\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Bilinearform auf $\Lambda^k V$ nicht-ausgeartet und symmetrisch ist und eine Orthonormalbasis gegeben ist durch alle $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ mit $1\le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $*$ wohl-definiert und unabhängig der Wahl der orientierten Orthonormalbasis ist und weisen Sie die folgenden Eigenschaften von $*$ nach.

(a) Sei $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ und $j_1, \dots, j_{n-k}$ so gewählt, dass $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots e_{j_{n-k}})$ eine positive Basis bildet. Dann gilt

$$*\big(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\big) = \varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_2} \dots \varepsilon_{j_{n-k}} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} .$$

(b) $** = (-1)^{p-k(n-k)} : \Lambda^k V \to \Lambda^k V$.

(c) $*(v \wedge *w) = *(w \wedge *v) = (-1)^p \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \Lambda^k V$.

Aufgabe 3. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften der *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ und der *Kontraktion* $i_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$, $\alpha \mapsto \alpha(X, \cdot)$ nach. Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt

(i) $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X(\beta)$

(ii) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta)$

(iii) $d\mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_X d\alpha$

(iv) $\mathcal{L}_X \alpha = d i_X \alpha + i_X d\alpha$

Bemerkung: Die letzte Gleichung ist auch unter dem Namen Cartan's magische Formel *bekannt.*

Aufgabe 4. Sei M eine Mannigfaltigkeit und betrachten Sie die disjunkte Vereinigung der Orientierungen der Kotangentialräume $\widetilde{M} := \coprod_{x \in M} \mathrm{or}\big(T_x^* M\big)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\widetilde{M}$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit trägt und die Abbildung

$$\pi : \widetilde{M} \to M , \qquad \mathrm{or}\big(T_x^* M\big) \ni [\omega_x] \mapsto x ,$$

glatt ist. *Tipp: Zu einer Karte (U, φ) von M, definieren Sie $U_-, U_+ \subset \pi^{-1}(U)$ durch $U_\pm := \{[\omega_x] \mid \pm\omega_x(\partial_{x_1}(x), \dots, \partial_{x_n}(x)) > 0\}$ und konstruieren Sie mit $(U_\pm, \varphi \circ \pi)$ einen Atlas von $\widetilde{M}$.*

(ii) Zeigen Sie, dass wenn M orientierbar ist, dann gibt es eine glatte Abbildung $s : M \to \widetilde{M}$, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.