Blatt 10

Bearbeitung bis: 1.7.2019

Aufgabe 1. Wir betrachten $M = \mathbb{R}^4$ mit Koordinaten (t, x, y, z), der Standardorientierung und der Minkowski-Metrik

$$-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \,.$$

Seien $E, B \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder mit Komponenten

$$E = E_x\partial_x + E_y\partial_y + E_z\partial_z \qquad B = B_x\partial_x + B_y\partial_y + B_z\partial_z \,.$$

Weiterhin sind gegeben $\rho \in C^\infty(M)$ und $j \in \mathfrak{X}(M)$ mit $j = j_x\partial_x + j_y\partial_y + j_z\partial_z$. Die *Maxwell Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t} &= j \qquad & \operatorname{div} E &= \rho \\ \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \qquad & \operatorname{div} B &= 0 \,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei für die Operationen rot und div die Vektorfelder E und B als zeitabhängige Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) angesehen werden (siehe Blatt 1 für eine genaue Definition). Mittels der musikalischen Isomorphismen (siehe Blatt 3), der Kontraktion $\lrcorner$ und Hodge-Dualität $*$ definieren wir die 2-Form $F \in \Omega^2(M)$ und 1-Form $J \in \Omega^1(M)$ durch

$$F = \partial_t \lrcorner * B^\flat + E^\flat \wedge dt \,, \qquad J = -\rho\, dt + j^\flat \,.$$

Zeigen Sie die Maxwell-Gleichungen (1) sind mit dieser Umformulierung äquivalent zu

$$dF = 0 \,, \qquad * d * F = J \,.$$

Begründen Sie warum damit die Maxwell-Gleichungen für allgemeine Lorentzmanigfaltigkeiten der Form $\mathbb{R} \times \Sigma$ mit Metrik $-dt^2 + g$ definiert werden können.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit von Index p. Zeigen Sie: Für die Lie-Ableitung der Volumenform vol^g_M nach dem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\mathcal{L}_X vol^g_M = (-1)^p d * X^\flat \,.$$

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ die durch den Levi-Civita Zusammenhang induzierte kovariante Ableitung auf dem Bündel $\Lambda^k T^* M$ der k-Formen von M. Zeigen Sie

(i) ∇ ist metrisch, d.h. für alle k-Formen ω und σ und alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$X \langle \omega, \sigma \rangle = \langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle + \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle \,.$$

(ii) $\nabla_X(\omega \wedge \eta) = \nabla_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \nabla_X\eta$ für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^\ell(M)$.

(iii) $\nabla_X(Y \lrcorner\, \omega) = \nabla_X Y \lrcorner\, \omega + Y \lrcorner\, \nabla_X\omega$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$.

(iv) Sei M zusätzlich orientiert, dann gilt $* \nabla_X = \nabla_X *$.