Blatt 11

Bearbeitung bis: 08.07.2019

Aufgabe 1. Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇. Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialoperatoren D der Ordnung m sind und überprüfen Sie das angegebene Hauptsymbol $\sigma(D)_\xi$ für $p \in M$ und $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$.

(i) Für die kovariante Ableitung $D = \nabla_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ mit $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $m = 1$

$$\sigma(\nabla_X)_\xi \, v = \xi(X) \cdot v \,.$$

(ii) Für das äußere Differential $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ gilt $m = 1$ und

$$\sigma(d)_\xi \, \omega = \xi \wedge \omega \,.$$

(iii) Für das Ko-differential $d^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ gilt $m = 1$ und

$$\sigma(d^*)_\xi \, \omega = -\xi^\sharp \lrcorner \omega \,.$$

(iv) Für den Hodge-Laplace-Operator $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ gilt $m = 2$ und

$$\sigma(\Delta)_\xi \, \omega = -g(\xi^\sharp, \xi^\sharp) \cdot \omega \,.$$

Aufgabe 2. Sei (M,g) eine kompakte orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der Hodge-Laplace Operator. Der Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert*, wenn es eine nicht-triviale k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$ gibt, so dass

$$\Delta\omega = \lambda\omega \,, \tag{1}$$

Solch ein ω heißt *Eigenform* oder *Eigenvektor*. Wir bezeichnen mit V_λ den Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Zeigen Sie

(i) Alle Eigenwerte sind nicht-negativ und diskret.

(ii) Alle Eigenräume sind endlich dimensional.

(iii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(iv) Die Menge der Eigenwerte ist unbeschränkt.

(v) Jede schwache Lösung von (1) ist eine starke Lösung, d.h. glatt.

(vi) Die Eigenvektoren von Δ bilden eine L^2-Orthonormalsystem für den Raum der k-Formen.

Aufgabe 3. Sei $M = \mathbb{T}^n$ der Torus mit flacher Metrik und Standardorientierung. Wir definieren $d\bar{x}^1, \dots, d\bar{x}^n \in \Omega^1(\mathbb{T}^n)$ durch $dx^i = \pi^* d\bar{x}^i$ wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ die Projektionsabbildung ist. Wir haben bereits gesehen, dass jede k-Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{T}^n)$ eindeutig als

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k} d\bar{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^{i_k} \,,$$

geschrieben werden kann mit $f_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Zeigen Sie, dass ω genau dann harmonisch ist, wenn $\Delta f_{i_1 \dots i_k} = 0$ für alle $i_1 < \cdots < i_k$. Folgern Sie daraus direkt $\mathcal{H}^k(\mathbb{T}^n) \cong H^k(\mathbb{T}^n)$.

Aufgabe 4. Es sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie die *Bochner-Formel* für $f \in C^\infty(M)$:

$$-\frac{1}{2}\Delta\|df\|^2 = \|\nabla df\|^2 - \langle d\Delta f, df\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)$$

Tipp: Verwenden Sie die Weitzenböck-Formel