Blatt 2

Bearbeitung bis: 25.4.2019

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe sollen Sie eine allgemeine Formel für den Pullback in lokalen Koordinaten herleiten.

(i) Zunächst ein paar Aufwärmungen.

(a) Sei $\phi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ die Exponentialabbildung $x \mapsto e^x$; berrechnen Sie $\phi^*\big(\frac{dy}{y}\big)$.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$; berrechnen Sie $\phi^*\big(dx \wedge dy\big)$.

(c) Sei $\phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Abbildung $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$; berrechnen Sie

$$\phi^*\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right).$$

(ii) Gegeben eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine glatte Abbildung $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $y_1, \dots, y_m$ und $x_1, \dots, x_n$ für die Koordinaten auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Sei $I = (i_1, \dots, i_k)$ ein Tupel mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$. Zeigen Sie die Formel

$$\phi^*(dy^I) = \sum_J \det\left(\frac{\partial \phi_I}{\partial x_J}\right) dx^J\,,$$

wobei die Summation über alle Tupel $J = (j_1, \dots, j_k)$ mit $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$ läuft und $\big(\frac{\partial \phi_I}{\partial x_J}\big)$ die Matrix $\big(\frac{\partial \phi_{i_p}}{\partial x_{j_q}}\big)_{1 \le p,q \le k}$ bezeichnet. *Tipp: Verwenden Sie die Leibnitzformel für die Determinante.*

Aufgabe 2. Berrechnen Sie folgende Integrale.

(i) Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre definiert durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und orientiert durch das äußere Normalenvektorfeld. Berrechnen Sie $\int_{S^2} \omega$ für

$$\omega = x\,dy \wedge\, dz - y\,dx \wedge\, dz + z\,dx \wedge\, dy\,.$$

(ii) Sei $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ der Torus definiert durch $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ mit Produktorientierung. Berrechnen Sie $\int_{\mathbb{T}^2} \omega$ für

$$\omega = y_1 y_2\,dx_1 \wedge\, dx_2 - y_1 x_2\,dx_1 \wedge\, dy_2 - x_1 y_2\,dy_1 \wedge\, dx_2 + x_1 x_2\,dy_1 \wedge\, dy_2\,.$$

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇^g der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang. Für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir die *Divergenz* $\operatorname{div}^g(X) \in C^\infty(M)$ durch

$$\operatorname{div}^g(X) := \operatorname{Tr}^g g(\nabla^g_{\cdot} X, \cdot) := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\nabla^g_{e_i} X, e_i)\,,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ eine lokale ON-Basis von (M, g) ist und $\varepsilon_i := g(e_i, e_i) = \pm 1$. Sei M zusätzlich orientiert und vol^g_M bezeichne die durch g definierte Volumenform. Zeigen Sie:

(i) Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\mathcal{L}_X vol_M^g = \operatorname{div}^g(X) vol_M^g \,.$$

(ii) Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und ist $\varepsilon := g(\nu, \nu) = \pm 1$ für das Vektorfeld ν der äußerden Normalen auf dem Rand, so gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger die *Divergenzformel*

$$\int_M \operatorname{div}^g(X) vol_M^g = \varepsilon \int_{\partial M} g(X, \nu) vol_{\partial M}^g \,,$$

wobei $vol_{\partial M}^g$ die durch g und ν induzierte Volumenform auf dem Rand bedeutet.

Aufgabe 4. Diese Aufgabe soll verdeutlichen, dass die Kompaktheitsannahmen im Satz von Stokes notwendig sind. Sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\} \,,$$

und $\omega = x\,dy$. Zeigen Sie M ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand aber

$$\int_M d\omega \neq \int_{\partial M} \omega \,.$$