Blatt 3

Bearbeitung bis: 29.4.2019

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die *musikalischen Isomorphismen* $\cdot^\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$, $X \mapsto X^\flat$ und $\cdot^\sharp : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$ sind gegeben durch

$$X^\flat_x := \sum_{1\leq i,j\leq n} a^i(x) g_{ij}(x) dx^j\,, \qquad \alpha^\sharp_x := \sum_{1\leq i,j\leq n} b_i(x) g^{ij}(x) \partial x_j\,, \tag{1}$$

wenn $X_x = \sum_i a^i(x)\partial x_i$ und $\alpha_x = \sum_i b_i(x) dx^i$ in kanonischen Koordinaten einer Karte und $g_{ij}(x) := g_x(\partial x_i, \partial x_j)$ der erste Fundamentaltensor und $g^{ij}(x)$ sein Inverses bedeuten, d.h. $\sum_j g^{ij}(x) g_{jk}(x) = \delta^i_k$. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *Gradientenfeld*, wenn es eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $(df)^\sharp = X$, und heißt *wegunabhängig*, wenn für alle Pfade $\gamma, \gamma' : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(1) = \gamma'(1)$ gilt

$$\int_0^1 g_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}, \dot\gamma(t))\, dt = \int_0^1 g_{\gamma'(t)}(X_{\gamma'(t)}, \dot\gamma'(t))\, dt\,.$$

Ein Vektorfeld heißt *lokales Gradientenfeld*, wenn es für alle $x \in M$ eine Umgebung U gibt, so dass die Einschränkung $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ ein Gradientenfeld ist. Wir schreiben $\mathfrak{X}_{\text{grad}}(M)$ und $\mathfrak{X}_{\text{locgrad}}(M)$ für den Raum der Gradientenfelder bzw. lokalen Gradientenfelder. Zeigen Sie:

(i) Für alle $x \in M$ und $v \in T_xM$ gilt $g_x(X_x, v) = X^\flat_x(v)$ und $g_x(\alpha^\sharp_x, v) = \alpha_x(v)$. Schliessen Sie daraus, dass die Definition (1) nicht von der Wahl der Karte abhängt und die musikalischen Isomorphismen invers zueinander sind.

(ii) Ein Vektorfeld ist ein Gradientenfeld genau dann wenn es wegunabhängig ist. *Tipp: Verwenden Sie die Umformulierung der Aussage für* 1*-Formen.*

(iii) Es gibt einen Isomorphismus $H^1_{dR}(M) \cong \mathfrak{X}_{\text{locgrad}}(M)/\mathfrak{X}_{\text{grad}}(M)$.

Aufgabe 2. Berrechnen Sie $H^*_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\})$ mit $p \neq q$ und geben Sie dabei auch geschlossenen Formen an, welche eine Basis der Kohomologiegruppen representieren.

Aufgabe 3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *konstant*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt so dass $f(x) = c$ für alle $x \in M$.

(i) Angenommen M ist bogenzusammenhängend. Zeigen Sie: Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist konstant genau dann wenn $df = 0$.

(ii) Angenommen $M = \coprod_{i\in I} M_i$ ist eine disjunkte Vereinigung und M_i ist bogenzusammenhängend für alle $i \in I$. Zeigen Sie: Es gibt einen Isomorphismus $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}^I$.

Aufgabe 4. Sei M eine *parallelisierbare* Mannigfaltigkeit, d.h. es gibt $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, so dass für alle $x \in M$ die Vektoren $(X_1)_x, \dots, (X_n)_x$ eine Basis von T_xM bilden. Zeigen Sie, dass $\Omega^*(M)$ als graduierte Algebra isomorph zu $C^\infty(M) \otimes \Lambda^*\mathbb{R}^n$ ist, wobei die Algebrastruktur auf $C^\infty(M) \otimes \Lambda^*\mathbb{R}^n$ gegeben ist durch $(f \otimes v) \wedge (g \otimes w) := fg \otimes (v \wedge w)$.