Blatt 4

Bearbeitung bis: 6.5.2019

Aufgabe 1. Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion von M auf ∂M gibt.

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$.

(i) Zeigen Sie: $H^k_{dR}(M \setminus \{p\}) \cong H^k_{dR}(M)$ wenn $0 \leq k < n$ und $H^n_{dR}(M \setminus \{p\}) = 0$ *Tipp: Natürlich mit der Mayer-Vietoris Sequenz und verwenden Sie dabei die genaue Definition der Abbildungen.*

(ii) Sei $\phi : N \to M$ eine glatte Abbildung mit $\dim N = \dim M = n$ und $\omega \in \Omega^n(M)$, so dass $\int_N \phi^*\omega \neq 0$. Zeigen Sie, dann ist ϕ surjektiv.

(iii) Sei $N = M = S^2$ und ω eine Volumenform auf S^2. Wir identifizieren S^2 mit der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ mittels stereographischer Projektion. Sei $\phi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ gegeben durch ein nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie, dass $\int_{\hat{\mathbb{C}}} \phi^*\omega \neq 0$ und schliessen Sie daraus das Fundamentaltheorem der Algebra. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass das Differential von $\phi = u + iv$ in den Koordinaten $z = x + iy$ komplex-linear ist, d.h. die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt:

$$\partial_x u = \partial_y v$$
$$\partial_y u = -\partial_x v\,.$$

Aufgabe 3. (i) Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit von Dimension $n > 1$ und $p \in M$ ein Punkt. Wir bezeichnen mit $j : M \setminus \{p\} \to M$ die kanonische Einbettung und mit

$$j_* : H^k_{c,dR}(M \setminus \{p\}) \to H^k_{dR}(M)\,,$$

die Abbildung, welche eine Kohomologieklasse representiert durch die geschlossene Form $\omega \in \Omega^k_c(M \setminus \{p\})$ auf die seiner Fortsetzung mit Null in P abbildet. Für welche k ist j_* ein Isomorphismus ?

(ii) Zeigen Sie, dass das Komplement eines Punktes im Torus $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ und das Komplement von zwei Punkten in $\mathbb{R}^2$ isomorphe DeRham-Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger haben. Sind die beiden Mannigfaltigkeiten diffeomorph?

Aufgabe 4. Wir bezeichnen mit x, y die Standardkoordinaten und mit r, θ die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass Poincaré-Duale des Strahls $\{(x, 0) \mid x > 0\}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $d\theta/2\pi$ in $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

(ii) Zeigen Sie, dass das geschlossene Poincaré-Duale des Einheitskreises in $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ verschwindet aber das kompakte Poincaré-Duale gegeben ist durch $\rho(r)\, dr$ in $H^1_{c,dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, wobei ρ eine Funktion mit kompaktem Träger und Integral 1 ist.

Mit anderen Worten, wir haben gezeigt, dass $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ durch einen Strahl und $H^1_{c,dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ durch den Einheitskreis erzeugt wird.