Blatt 5

Bearbeitung bis: 13.05.2019

Aufgabe 1. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Berechnen Sie Repräsentanten der Thom- und Eulerklasse für das Vektorbündel $TS^2 \to S^2$ und verifzieren Sie die Formel $\int_{S^2} e(S^2) = \chi(S^2) = 2$.
Hinweis: Überdecken Sie S^2 mit zwei Karten $U_+ := S^2 \setminus \{(0,0,+1)\}$ und $U_- := S^2 \setminus \{(0,0,-1\}$ wobei $U_\pm \cong \mathbb{R}^2$ durch stereographischer Projektion. Trivialisieren Sie $TS^2|_{U_\pm}$ mit kanonischen Koordinaten und berechnen Sie den Trivialisierungswechsel Ψ. Verwenden Sie nun die Formeln aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe beweisen Sie das *Poincaré-Hopf-Indextheorem* für transversale Vektorfelder. Sei $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel und M geschlossen (d.h. kompakt ohne Rand). Ein Schnitt $s \in \Gamma(E) := \{s : M \to E \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_M\}$ heißt *transversal*, wenn s transversal zum Nullschnitt $O_E := \{(x,0) \in E \mid x \in M\}$ ist. Zeigen Sie:

(i) Für jeden transversalen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ gilt $e(E) = \mathrm{PD}(s^{-1}(O_E))$.

(ii) Wenn M orientierbar und $\chi(M) \neq 0$, dann hat jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine Nullstelle.

(iii) Für alle transversalen $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ gilt
$$\chi(M) = \sum_x \mathrm{ind}_x X\,,$$
wobei die Summe über alle Nullstellen $x \in M$ von X läuft und $\mathrm{ind}_x X \in \{-1,+1\}$ das Vorzeichen von $\det(\partial a^i(x)/\partial x_j)$ bezüglich einer lokalen Darstellung $X|_U = \sum_j a^j \partial x_j$ ist.

Aufgabe 3. Sei M geschlossen und orientiert. Für $\phi : M \to M$ definiere die *Lefschetz-Zahl*
$$L(\phi) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \operatorname{Tr}(\phi^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M))\,,$$
wobei Tr die Spur der linearen Abbildung bedeutet. Zeigen Sie das *Lefschetz-Fixpunkt-Theorem* für glatte Abbildungen: Wenn $L(\phi) \neq 0$, dann hat ϕ einen Fixpunkt.
Hinweis: Die Fixpunkte von ϕ sind die Schnittpunkte der Diagonalen $\Delta = \{(x,x) \mid x \in M\}$ mit dem Graph $\Gamma := \{(x,\phi(x)) \mid x \in M\} = (\mathrm{id}_M \times \phi)(\Delta)$. Verwenden Sie die Formel für das Poincaré-Duale der Diagonalen aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. Seien N und M orientiert ohne Rand aber nicht notwendigerweise kompakt und $\dim M = \dim N = n$. Für jede eigentliche Abbildung $\phi : N \to M$ und $\omega \in \Omega^n_c(M)$ mit $\int_M \omega = 1$ definiere den *Abbildungsgrad* durch $\deg \phi := \int_N \phi^*\omega$. Zeigen Sie:

(i) Der Wert $\deg \phi$ hängt nicht von der Wahl von ω ab und $\deg \phi_0 = \deg \phi_1$ für alle $\phi_0, \phi_1 : N \to M$ mit $\phi_0 \sim_H \phi_1$ bezüglich eigentlicher Homotopie H.

(ii) Es gilt $\deg \phi \circ \psi = \deg \phi \cdot \deg \psi$ für alle $\psi : P \to N$ und $\phi : N \to M$ wie oben.

(iii) Es gilt $\deg \phi = \sum_{y \in \phi^{-1}(x)} \mathrm{ind}_y \phi$ wobei $x \in M$ ein regulärer Wert von ϕ und $\mathrm{ind}_y \phi \in \{-1,+1\}$ das Vorzeichen von $\det(\partial \phi^j(y)/\partial y_i)$ bezüglich einer lokalen Darstellung $\phi|_U = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ ist. *Hinweis: Verwenden sie $\omega = \mathrm{PD}(x)$.*