Blatt 6

Bearbeitung bis: 20.05.

Aufgabe 1. Sei M eine kompakte Fläche und $\{P_i\}$ eine Zerlegung in Polygone, d.h. eine Menge von Polygonen $P_i \subset M$, so dass $\bigcup_i P_i = M$ und für alle i, j mit $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ ist $P_i \cap P_j$ entweder eine Seite oder ein Eckpunkt von P_i und P_j. Bezeichne mit e, k und f die Anzahl der Ecken, Kanten bzw. Polygone, wobei die Ecken und Kanten als Teilmengen von M gezählt werden, d.h. nicht für jedes Polygon einzeln. Zeigen sie

$$e - k + f = \chi(M)\,.$$

Folgern Sie daraus die *Eulersche Polyederformel*: Seien e, k und f die Anzahl der Ecken, Kanten bzw. Fächen eines beschränkten konvexen Polyeders, dann gilt $e - k + f = 2$.
Hinweis: Verwenden Sie die Überdeckung $M = U \cup V$ wobei U das Komplement der Kanten und V eine kleine offene Umgebung der Vereinigung aller Kanten ist. Wieso verschwindet $\chi(U \cap V)$? Um $\chi(V)$ zu berechnen, überdecken Sie V wieder mit zwei geeigneten offenen Mengen.

Aufgabe 2. Sei M eine Riemannsche Fläche mit Gaußkrümmung $K : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Wenn $K \leq 0$, dann gibt keine geodätischen Zweiecke auf M.

(ii) Wenn $K \equiv 1$, dann ist der Flächeninhalt jedes geodätischen Dreiecks mit den Innenwinkeln α, β und γ gegeben durch $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

(iii) Wenn $K \equiv -1$, dann ist der Fächeninhalt jedes geodätischen Dreiecks mit obiger Bezeichnung gegeben durch $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Aufgabe 3. In seinem Artikel *"A 'bicycle wheel' proof of the Gauss-Bonnet theorem"* beschreibt Mark Levi einen Apparat der zur Landvermessung eingesetzt werden könnte. Das *Sphärimeter* ist ein Rad, welches horizontal und drehbar (idealerweise ohne Reibung) auf einer Achse installiert ist. Um die Fläche eines Landes zu bestimmen, läuft man die Grenze des Landes mit dem Sphärimeter ab und misst, wenn man am Startpunkt zurückkehrt, den Winkel α mit dem sich das Rand gedreht hat. Die Fläche des Landes beträgt dann αR^2, wobei R den Erdradius bezeichnet. Begründen Sie, warum dieser Apparat funktioniert.
Hinweis: Das Rad bildet eine physikalische Realisierung des Paralleltransports, d.h. die Speichen des Rades (gesehen als Tangentialvektoren zur Sphäre) werden parallel transportiert.

Aufgabe 4. Sei $K : S^2 \to \mathbb{R}$ die Gaußkrümmung einer beliebinge Metrik auf der Sphäre. Bezeichne mit $vol(A) := \int_A vol$ den Flächeninhalt einer messbare Menge $A \subset S^2$. Angenommen es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $vol(\{x \mid K(x) \leq 0\}) \geq (1 - \varepsilon) vol(S^2)$. Zeigen Sie, dass die folgende Abschätzung gilt:

$$\max K \geq \frac{4\pi}{\varepsilon \cdot vol(S^2)}\,.$$