Blatt 7

Bearbeitung bis: 27.5.2019

Auf diesem Übungsblatt bezeichnet (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 1. Ein *Strahl* in $p \in M$ ist eine Geodäte $\gamma : [0, \infty) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ welche für alle $s > 0$ den Abstand von $\gamma(0)$ nach $\gamma(s)$ minimiert.

(i) Sei M geodätisch vollständig und nicht kompakt. Zeigen Sie, dann gibt es einen Strahl in jedem Punkt.

(ii) Konstruieren Sie eine Riemanschen Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, so dass jede minimale Geodäte endliche Länge hat. Ist diese Mannigfaltigkeit vollständig?

Aufgabe 2. Eine Kurve $\gamma : [0, a) \to M$ heißt *divergent*, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$ ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $\gamma(t) \notin K$ für alle $t > t_0$. Zeigen Sie: Die Mannigfaltigkeit M ist vollständig, genau dann wenn alle divergenten Kurven unendliche Länge haben.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ welche den Abstand von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ minimiert eine glatte Geodäte ist.

Aufgabe 4. Sei (M, g) vollständig und ohne konjugierte Punkte. Betrachte die Exponentialabbildung $\exp_p : T_pM \to M$ für ein $p \in M$. Zeigen Sie:

(i) Der Pull-back $\bar{g} := \exp_p^* g$ definiert eine Riemannsche Metrik auf T_pM.

(ii) Für jedes $v \in T_pM$ ist die Kurve $t \mapsto tv$ eine Geodäte bezüglich $\bar{g}$.

(iii) Schließen Sie daraus, dass $\bar{g}$ vollständig ist.