Blatt 8

Bearbeitung bis: 17.06.2019

Aufgabe 1. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an. Wir bezeichnen mit K die Schnittkrümmung und mit Ric die Riccikrümmung.

(i) Es gibt keine Metrik auf $S^2 \times S^1$ mit $K > 0$ oder $\mathrm{Ric} > 0$.

(ii) Es gibt keine Metrik auf $S^2 \times S^1$ mit $K \leq 0$.

(iii) Es gibt keine vollständige Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $K > 0$.

(iv) Es gibt keine vollständige Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $K < 0$.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung, $\gamma : [0, \ell] \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v \in T_pM$ und $w \in T_pM$ so dass $g_p(w, v) = 0$. Wir bezeichnen mit $V, W \in \Gamma(\gamma^*TM)$ die parallelverschobenen Vektorfelder entlang γ mit $V(0) = v$ und $W(0) = w$. Zeigen Sie, dass das Jakobifeld ξ entlang γ mit den Anfangsbedingungen $\xi(0) = v$ und $\nabla_t\xi(0) = w$ durch die folgende Formel gegeben ist:

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(t\sqrt{K})W(t) + \cos(t\sqrt{K})V(t) & \text{falls } K > 0\,, \\ V(t) + tW(t) & \text{falls } K = 0\,, \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(t\sqrt{K})W(t) + \cosh(t\sqrt{-K})V(t) & \text{falls } K < 0\,. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Seien (N, g) und $(M, \bar g)$ zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie die folgende Aussage: Gegeben zwei lokale Isometrien $\phi, \psi : N \to M$, so dass für ein $p \in N$ gilt:

$$\phi(p) = \psi(p), \qquad d_p\phi = d_p\psi\,,$$

dann ist $\phi = \psi$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie den Schnittort $\mathrm{Cut}(p)$, den Injektivitätsradius i_p und den Durchmesser $\mathrm{diam}(M)$ von (M, g) in den Fällen:

(i) der Standardsphäre $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit Standardmetrik und $p \in S^2$ beliebig,

(ii) der Torus $M = \mathbb{R}^2/(v\mathbb{Z} \oplus w\mathbb{Z})$ mit Metrik g, so dass die Projektion $\mathbb{R}^2 \to M$ bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ eine Riemannsche Überlagerung ist; in den Fällen

  (a) $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ und $p = [0, 0]$,

  (b) $v = (1, 0)$, $w = (1/2, \sqrt{3/2})$ und $p = [0, 0]$.