Blatt 9

Bearbeitung bis: 24.6.2019

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine vollständige einfach-zusammenhängede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung. Gegeben ein geodätischen Dreieck mit Standardbezeichnung für die Seitenlängen a, b, c und Innenwinkel α, β, γ; dann gilt

(i) $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \leq c$,

(ii) $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Außerdem gilt $<$ in den obigen Ungleichungen, falls die Schnittkrümmung negativ ist.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Angenommen es gibt Konstanten λ und μ, so dass für die Schnittkrümmung K gilt

$$0 < \lambda \leq K \leq \mu\,.$$

Weiterhin sei $d = d(p, q)$ der Abstand zweier aufeinanderfolgenden konjugierten Punkte p, q einer Geodäten. Dann gilt

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Angenommen es gibt Konstanten λ und μ, so dass für die Schnittkrümmung K gilt

$$\lambda \leq K \leq \mu\,.$$

Gegeben ein beliebiger Punkt $p \in M$ und $v, w \in T_pM$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v \perp w$. Für alle $t > 0$ und falls $\mu > 0$ zusätzlich $t < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ gilt

$$s_\mu(t) \leq \|(d_{tv}\exp_p)(tw)\| \leq s_\lambda(t)\,,$$

wobei s_ρ für $\rho \in \{\mu, \lambda\}$ die Lösung der Differentialgleichung $\ddot{s}_\rho(t) + \rho s_\rho(t) = 0$ mit Anfangsbedinungen $s_\rho(0) = 0$ und $\dot{s}_\rho(0) = 1$ bedeutet.

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \to M$ eine geschlossene Kurve, d.h. $p = \gamma(b) = \gamma(a)$; dann ist die Determinante des Paralleltransports $P_\gamma : T_pM \to T_pM$ gleich 1.