

# Geometrie und ihre Didaktik

Vorlesungsskript Wintersemester 2024/25

Felix Schmäschke

18. Februar 2025

Dies ist ein Vorlesungsskript. Es kann Fehler enthalten und ersetzt kein Buch.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Vorbereitungen</b>	<b>2</b>
2.1	Was ist ein Axiomatischer Ansatz? . . . . .	2
2.2	Modelle . . . . .	3
2.3	Metrische Räume . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Absolute Geometrie</b>	<b>9</b>
3.1	Axiome . . . . .	9
3.2	Halbebenen . . . . .	12
3.3	Kongruenzsätze . . . . .	17
3.4	Senkrechte Geraden . . . . .	19
3.5	Kreise . . . . .	21
3.6	Isometrien . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Euklidische Geometrie</b>	<b>36</b>
4.1	Parallelenaxiom . . . . .	36
4.2	Proportionssätze . . . . .	40
4.3	Satzgruppe des Pythagoras . . . . .	46
4.4	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	48
4.5	Geraden und Winkel am Kreis . . . . .	55
4.6	Besondere Punkte und Geraden im Dreieck . . . . .	60
4.7	Flächeninhalt . . . . .	72
4.8	Inversion am Kreis . . . . .	75
4.9	Isometrien . . . . .	80

<b>5</b>	<b>Hyperbolische Geometrie</b>	<b>81</b>
5.1	Hyperbolisches Parallelenaxiom . . . . .	81
5.2	Parallele Geraden . . . . .	83
5.3	Isometrien . . . . .	89
5.4	Poincaré Halbebene . . . . .	93

## 1 Einführung

Die Geometrie beschäftigt sich mit den Eigenschaften des Raumes, etwa dem Abstand, Winkel, Länge, Fläche, Volumen etc. Anfangs zur Beschreibung unserer unmittelbaren Welt verwendet, hat sich über viele Jahrhunderte der Rahmen der Geometrie stark erweitert und es haben sich viele Teilgebiete der Geometrie entwickelt, etwa die Differentialgeometrie, die algebraische Geometrie oder diskrete Geometrie. Wir behandeln in diesem Semester vorrangig zweidimensionale Geometrien, insbesondere die Euklidischen Ebene sowie auch die nicht-Euklidische Ebene. Euklid geht in seinem berühmten Werk „Elemente“ den abstrakten Weg der axiomatischen Herleitung der Geometrie. Wir werden in diesem Semester dem Weg von Euklid folgen, allerdings dabei nicht die ursprünglichen Axiome von Euklid verwenden, sondern solche, die durch die Erkenntnisse der Analysis und insbesondere der reellen Zahlen, welche Euklid nicht zur Verfügung standen, modernisiert worden.

## 2 Vorbereitungen

### 2.1 Was ist ein Axiomatischer Ansatz?

Mit einem axiomatischen Ansatz meinen wir, dass die Ebene durch eine Liste von Eigenschaften möglichst eindeutig beschrieben wird. Diese Eigenschaften heißen *Axiome*. Wenn ersteinmal ein solches Axiomensystem festgelegt ist, können anschließend Aussagen von diesen Axiomen abgeleitet werden, die in allen Modellen, die diese Axiome erfüllen, gelten.

Um dies besser zu verstehen versuchen wir selber ein solches Axiomensystem für die Ebene aufzustellen. Hier ist ein erster Prototyp. Wir setzen dabei voraus, dass die Begriffe wie Punkt, Gerade und Winkel intuitiv klar sind.

- (I) Wir können den Abstand zwischen Punkten messen.
- (II) Es gibt eine eindeutige Gerade durch je zwei gegebene Punkte.
- (III) Wir können Winkel messen und eindeutig abtragen.
- (IV) Durch Verschieben und Drehen ändern sich die Messungen nicht.

Wir wollen nun im Folgenden eine mathematische Sprache entwickeln, um diese Axiome etwas rigoröser zu formulieren.

## 2.2 Modelle

Bevor wir uns allerdings diesen Axiomen zuwenden, schauen wir uns ein paar konkrete Modelle von Geometrien an.

**Modell 2.1** (Kartesisches Modell). Die *Kartesische Ebene* ist gegeben als der reelle Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ . Der Abstand zwischen zwei Punkten  $A = (x_A, y_A)$  und  $B = (x_B, y_B)$  ist gegeben durch die Formel

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \quad (2.1)$$

Das Winkelmaß zwischen den Strahlen  $\overrightarrow{OA} = \{O + t(A - O) \mid t \geq 0\}$  und  $\overrightarrow{OB} = \{O + t(B - O) \mid t \geq 0\}$  mit Scheitel  $O = (x_O, y_O)$  und  $d(O, A) = d(O, B) = 1$  ist gegeben durch

$$\overline{\angle AOB} = \pm \arccos \langle u, v \rangle, \quad (2.2)$$

wobei  $\langle u, v \rangle = x_u x_v + y_u y_v$  für  $u = (x_u, y_u)$  und  $v = (x_v, y_v)$  das Skalarprodukt der Vektoren  $u = A - O$  und  $v = B - O$  bezeichnet und das Vorzeichen durch das Vorzeichen der Determinante  $\det(u, v)$  gegeben ist. Skalarprodukt und Abstandsfunktion verallgemeinern direkt zum Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  für beliebiges  $n \geq 1$ .

**Modell 2.2** (Sphärisches Modell). Die 2-Sphäre ist gegeben als

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

der Abstand zwischen den Punkten  $A, B \in S^2$  ist gegeben durch

$$d_{S^2}(A, B) = \arccos \langle A, B \rangle.$$

Geraden in der Sphäre sind sogenannte Großkreise, d.h. Schnitte von  $S^2$  mit 2-dimensionalen Unterräumen von  $\mathbb{R}^3$ . Das Winkelmaß ist durch (2.2) mit entsprechender Interpretation von  $u$  und  $v$  definiert, genauer sind  $u$  und  $v$  Einheitsvektoren tangential zu den Großkreisen durch  $O, A$  bzw.  $O, B$  in Richtung  $A$  bzw.  $B$  (siehe Abbildung 2.1). Man kann zeigen, dass die Innenwinkelsumme von Dreiecken stets größer als  $\pi$  ist.

**Modell 2.3** (Hyperbolisches Modell). Die Hyperboloidschale ist gegeben als

$$H^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\}.$$

Die Abstandsformel ist kompliziert und wir wollen sie nur geometrisch beschreiben. Die Geraden von  $H^2$  sind alle Hyperbeläste die durch Schnitte von  $H^2$  mit 2-dimensionalen Unterräumen von  $\mathbb{R}^3$  entstehen. Je zwei Punkte  $A$  und  $B$  in  $H^2$  liegen auf einem eindeutigen solchen Hyperbelast und der Abstand ist die (Bogen)länge des Stückes zwischen  $A$  und  $B$ . Das Winkelmaß ist wieder durch (2.2) mit entsprechender Interpretation von  $u$  und  $v$  als Tangentialvektoren definiert (siehe Abbildung 2.2).

Alternativ dazu betrachten wird das Modell der Poincaré Kreisscheibe

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

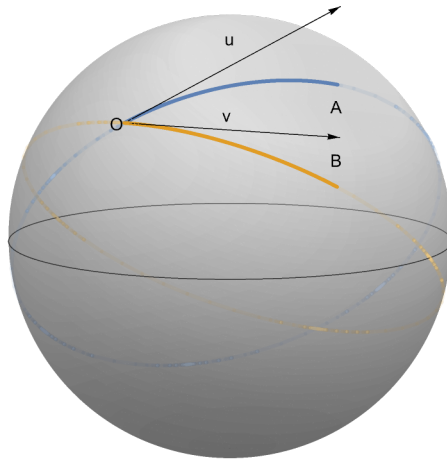


Abbildung 2.1: Ein Winkel in der sphärischen Geometrie.

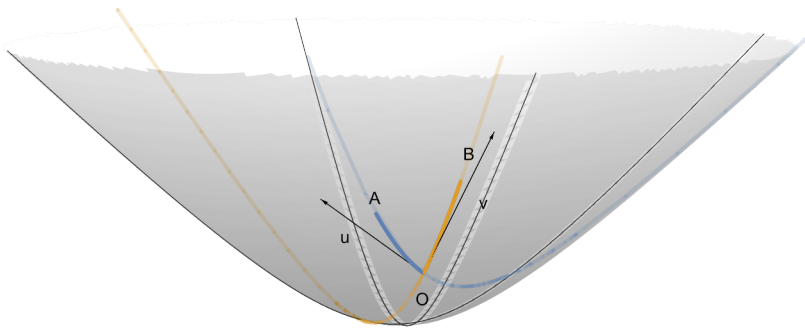


Abbildung 2.2: Ein Winkel auf der Hyperboloidschale.

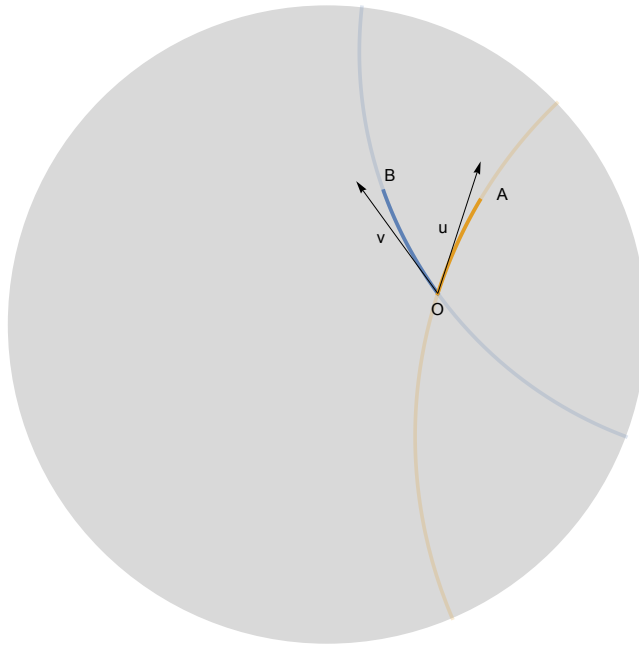


Abbildung 2.3: Ein Winkel in der Poincaré Kreisscheibe. Die Vektoren  $u$  und  $v$  sind der Übersichtlichkeit halber nicht mit korrekter Länge dargestellt.

Die Geraden in diesem Modell, auch *h-Geraden* genannt, sind Teile von Euklidischen Kreisen und Euklidischen Geraden die den Rand von  $D^2$  senkrecht schneiden. Die Abstandsformel in diesem Modell ist etwas einfacher anzugeben, trotzdem werden wir diesen Abstand erst später definieren. Das Winkelmaß ist wieder durch (2.2) gegeben mit entsprechender Interpretation von  $u$  und  $v$  als Tangentialvektoren an die h-Geraden (siehe Abbildung 2.3). Wir werden zeigen, dass die Innenwinkelsumme von Dreiecken stets echt kleiner als  $\pi$  ist. In der Tat gibt es Dreiecke mit beliebig kleiner Innenwinkelsumme. Auch gilt das Parallelenaxiom nicht, d.h. es gibt eine h-Gerade und einen Punkt durch den zwei verschiedene parallele h-Geraden verlaufen.

Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen  $D^2$  und  $H^2$ , welche die Abstände und Winkelmaße erhält. Diese Abbildung heißt *stereographische Projektion* und ist wie folgt definiert: Der Punkt  $A = (x_A, y_A) \in D^2$  wird auf den Schnittpunkt von  $H^2$  und dem 1-dimensionalen Unterraum erzeugt durch  $(x_A, y_A, 1)$  abgebildet, d.h.  $A = (x_A, y_A) \mapsto (tx_A, ty_A, t) \in H^2$  für ein eindeutiges  $t \in \mathbb{R}$ .

### 2.3 Metrische Räume

Metrischen Räume sind notwendig um den Begriff des Abstands genauer zu beschreiben.

**Definition 2.4.** Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , dem *Abstand*, welche folgende Eigenschaften erfüllen für alle  $A, B \in X$

- (i) (*Positivität*)  $d(A, B) \geq 0$
- (ii) (*nicht-ausgeartet*)  $A = B \iff d(A, B) = 0$
- (iii) (*Symmetrie*)  $d(A, B) = d(B, A)$
- (iv) (*Dreiecksungleichung*)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  für alle  $C \in X$ .

Wir schreiben auch  $\overline{AB} = d(A, B)$  wenn klar ist welcher Abstand gemeint ist.

**Beispiel 2.5.** (i) Für jede beliebige Menge  $X$  definiere  $d(A, B) = 1$  für alle  $A \neq B$  sowie  $d(A, A) = 0$ . Dieser Abstand heißt *diskreter Abstand* und der metrische Raum  $(X, d)$  heißt *diskreter Raum*.

(ii) Für  $X = \mathbb{R}$  definiere  $d(A, B) = |A - B|$  für alle  $A, B \in \mathbb{R}$ .

(iii) Für  $X = \mathbb{R}^2$  definiere die Abstände mit  $A = (x_A, y_A)$  und  $B = (x_B, y_B)$

- $d_1(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$  der sogenannte *Manhattan Abstand*,
- $d_2(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$  der *Euklidische Abstand*,
- $d_\infty(A, B) = \max\{|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\}$ .

**Definition 2.6.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  heißt *abstandserhaltend*, falls gilt

$$d_Y(f(A), f(B)) = d_X(A, B),$$

für alle  $A, B \in X$ . Eine bijektive und abstandserhaltende Abbildung heißt *Isometrie*. Die Räume  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  heißen *isometrisch*, falls es eine solche Isometrie gibt.

**Übung 2.7.** Zeigen Sie, dass jede abstandserhaltende Abbildung injektiv ist.

**Übung 2.8.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Isometrie, dann gilt entweder  $f(x) = f(0) + x$  oder  $f(x) = f(0) - x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### Gerade, Strahl und Strecke

Wenn  $(X, d)$  ein metrischer Raum ist, dann ist jede Teilmenge  $Y \subset X$  auch ein metrischer Raum durch Einschränken der Abstandsabbildung.

**Definition 2.9.** Eine Teilmenge  $g \subset X$  eines metrischen Raums  $(X, d)$  heißt *Gerade* wenn  $g$  isometrisch zu  $\mathbb{R}$  ist. Drei Punkte  $A, B, C \in X$  heißen *kollinear*, wenn es eine Gerade  $g \subset X$  gibt mit  $A, B, C \in g$ .

*Bemerkung.* Es gibt metrische Räume ohne Geraden, etwa der diskrete Raum.

**Übung 2.10.** Sei  $g \subset \mathbb{R}^2$  gegeben durch den Graph der Abbildung  $y = |x|$ . Für welche Abstände  $d_1, d_2$  und  $d_\infty$  ist  $g$  eine Gerade?

**Definition 2.11.** Sei  $g$  eine Gerade eines metrischen Raums  $(X, d)$  und  $P, Q \in g$  zwei verschiedene Punkte. Wir bezeichnen

- $(PQ) = g$  falls  $g$  eindeutig durch  $P$  und  $Q$  festgelegt ist.
- $\overrightarrow{PQ} \subset g$  den *Strahl*, eindeutig definiert durch  $f(\overrightarrow{PQ}) = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$  für die Isometrie  $f : g \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(P) = 0$  und  $f(Q) > 0$ .
- $PQ \subset g$  die *Strecke*, eindeutig definiert durch  $f(PQ) = [f(P), f(Q)]$  für eine Isometrie  $f : g \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(P) < f(Q)$ .

**Übung 2.12.** (i) Wenn  $R \in \overrightarrow{PQ}$  dann gilt  $\overline{QR} = |\overline{PR} - \overline{PQ}|$ .

(ii) Wenn  $R \in PQ$  dann gilt  $\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{PQ}$ .

### Winkel und Winkelmaß

**Definition 2.13.** Ein geordnetes Paar von Strahlen  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  mit gleichem Startpunkt  $O$  heißt *Winkel*. Der Punkt  $O$  heißt *Scheitelpunkt*. Wir bezeichnen dieses Paar mit  $\angle AOB$ . Das *Winkelmaß* ist eine Funktion, die jedem Tripel von Punkten  $(A, O, B)$  mit  $A \neq O$  und  $B \neq O$  eine reelle Zahl im Intervall  $(-\pi, \pi]$  zuordnet. Wir bezeichnen diese Zahl mit  $\overline{\angle AOB} \in (-\pi, \pi]$ .

Wir sind nun in der Lage den ersten Teil des Axiomes (III) genauer zu formulieren. Zwar fordern wir, dass für jeden Strahl  $\overrightarrow{OA}$  und jede reelle Zahl  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  es genau einen Strahl  $\overrightarrow{OB}$  gibt, so dass gilt

$$\overline{\angle AOB} = \alpha.$$

Außerdem gelte für je drei Strahlen  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  und  $\overrightarrow{OC}$  die folgende Additionsformel

$$\overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOC} \equiv \overline{\angle AOC},$$

wobei  $\equiv$  bedeutet, *gleich bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$* . Genauer schreiben wir  $\alpha \equiv \beta$ , wenn  $\alpha = \beta + 2\pi n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Übung 2.14.** Zeigen Sie:

(i) Die Relation  $\equiv$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$ .

(ii) Seien  $\alpha \equiv \beta$  und  $\alpha' \equiv \beta'$ , dann gilt

$$\alpha + \alpha' \equiv \beta + \beta' \quad \text{und} \quad \alpha - \alpha' \equiv \beta - \beta'.$$

Außerdem gilt für beliebige  $n \in \mathbb{Z}$ , dass  $n\alpha \equiv n\beta$  aber es gilt nicht notwendigerweise  $\frac{1}{2}\alpha \equiv \frac{1}{2}\beta$ .

## Stetigkeit

Im zweiten Teil des Axiomes (III) fordern wir, dass das Winkelmaß  $(A, O, B) \mapsto \overline{\angle AOB}$  stetig ist. Um das exakt zu formulieren brauchen wir eine klare Definition des Begriffs der Stetigkeit für Abbildung zwischen metrischen Räumen. Diese erhalten wir als direkte Verallgemeinerung des Begriffs für reelle Funktionen.

**Definition 2.15.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  ist *stetig im Punkt*  $A \in X$ , wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$d_X(A, A') < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(A), f(A')) < \epsilon,$$

für alle  $A' \in X$ . Wir sagen  $f$  ist *stetig*, wenn  $f$  stetig in allen Punkten  $A \in X$  ist.

Man zeigt leicht, dass für metrische Räume  $(X, d)$  und  $(X', d')$  auch das kartesische Produkt  $X \times X'$  mit dem Abstand

$$d_{X \times X'}((A, A'), (B, B')) = \max\{d(A, B), d'(A', B')\},$$

ein metrischer Raum ist. Insbesondere trägt  $X \times X \times X$  auch einen induzierten Abstand.

**Übung 2.16.** Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und  $(Z, d_Z)$  sowie stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$ , dann ist auch die Komposition  $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ ,  $A \mapsto h(A) = g(f(A))$  stetig.

## Kongruente Dreiecke

Wir wollen das Axiom (IV) genauer fassen. Dazu verwenden wir Dreiecke.

**Definition 2.17.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ein geordnetes Tripel  $(A, B, C)$  von Punkten heißt *Dreieck* und wird mit  $\triangle ABC$  bezeichnet. Zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  heißen *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $f : X \rightarrow X$  gibt, mit

$$f(A) = A', \quad f(B) = B' \quad \text{und} \quad f(C) = C'.$$

Wir schreiben dann  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

*Bemerkung.* (i) Die Komposition von Isometrien ist auch wieder eine Isometrie. Das Gleiche gilt für die Umkehrabbildung einer Isometrie. Somit ist  $\cong$  eine Äquivalenzrelation. Insbesondere gilt wenn  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  und  $\triangle A'B'C' \cong \triangle A''B''C''$  dann auch  $\triangle ABC \cong \triangle A''B''C''$ .

(ii) Wenn  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  dann gilt

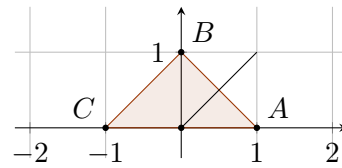
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Für manche metrische Räume gilt auch die Umkehrung, etwa für den diskreten Raum. Das nächste Beispiel allerdings zeigt, dass dies nicht zwangsläufig der Fall ist.

**Beispiel 2.18.** Sei  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  die Ebene mit Manhattan-Abstand. Definiere die Punkte

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 0) \quad \text{und} \quad C = (-1, 0).$$

Es gilt  $d_1(A, B) = d_1(A, C) = d_1(B, C) = 2$ . Außerdem ist  $\triangle ABC \cong \triangle CBA$  durch die Isometrie  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ . Aber  $\triangle ABC$  ist nicht kongruent zum Dreieck  $\triangle ACB$ . Wir wollen dies kurz beweisen. Angenommen es würde gelten  $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ , dann gibt es eine Isometrie  $f$  mit  $f(A) = A$ ,  $f(B) = C$  und  $f(C) = B$ . Ein *Mittelpunkt*  $M$  von  $AB$  ist ein Punkt mit der Eigenschaft



$$d_1(A, M) = d_1(M, B) = \frac{1}{2}d_1(A, B).$$

Es gibt unendlich viele solche Punkte, gegeben durch  $(t, t)$  für  $t \in [0, 1]$ . Nach Isometreeigenschaft ist  $M$  Mittelpunkt von  $AB$  genau dann wenn  $f(M)$  ein Mittelpunkt von  $AC$  ist. Die Strecke  $AC$  hat allerdings nur einen Mittelpunkt, gegeben durch  $(0, 0)$ . Das widerspricht der Bijektivität von  $f$ . Demzufolge kann es keine solche Abbildung  $f$  geben und  $\triangle ABC$  ist nicht kongruent zu  $\triangle ACB$ .

### 3 Absolute Geometrie

#### 3.1 Axiome

Das Tripel  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  heißt *absolute Ebene* (oder *neutrale Ebene* oder *ebene absolute Geometrie*) wenn folgende Axiome erfüllt sind

- (I) Das Paar  $(\mathcal{E}, d)$  ist ein metrischer Raum und  $\mathcal{E}$  hat mindestens zwei Punkte.
- (II) Es gibt eine eindeutige Gerade zwischen je zwei verschiedenen Punkten.
- (III) Jedem Winkel  $\angle AOB$  ist eine reelle Zahl  $\overline{\angle AOB}$  im Intervall  $(-\pi, \pi]$  zugeordnet und es gilt
  - (a) Für jeden Strahl  $\overrightarrow{OA}$  und reelle Zahl  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  gibt es einen eindeutigen Strahl  $\overrightarrow{OB}$ , so dass  $\overline{\angle AOB} = \alpha$ .
  - (b) Für alle Punkte  $A, B$  und  $C$  verschieden von  $O$  gilt

$$\overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOC} \equiv \overline{\angle AOC}.$$

- (c) Die Abbildung  $(A, O, B) \mapsto \overline{\angle AOB}$  ist stetig für alle Tripel  $(A, O, B)$  mit  $A \neq O$ ,  $B \neq O$  und  $\overline{\angle AOB} \neq \pi$ .
- (IV) Es gilt  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  genau dann wenn

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \overline{\angle CAB} = \pm \overline{\angle C'A'B'}.$$

Im Folgenden sei stets eine absolute Ebene  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  vorausgesetzt.

**Übung 3.1.** *Es gibt unendlich viele Punkte und unendlich viele Geraden.*

**Satz 3.2.** *Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in maximal einem Punkt.*

*Beweis.* Angenommen zwei verschiedenen Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich in den Punkten  $P$  und  $Q$  (und womöglich weiteren Punkten). Es folgt  $P, Q \in g$  und  $P, Q \in h$ . Dann gilt nach Axiom (II), dass  $g = (PQ)$  und  $h = (PQ)$ . Also ist  $g = h$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Lemma 3.3.** *Gegeben sei ein Strahl  $\underline{OA}$*

(i) *Wenn  $A' \in \underline{OA}$  mit  $A \neq O$ , dann gilt  $\underline{OA} = \underline{OA'}$*

(ii) *Für jedes  $r \geq 0$  gibt es einen eindeutigen Punkt  $A' \in \underline{OA}$  mit  $\overline{OA'} = r$ .*

*Beweis.* Nach Definition sei  $f : (OA) \rightarrow \mathbb{R}$  die Isometrie mit  $f(O) = 0$  und  $f(A) > 0$ . Zu (i). Für alle  $A' \in \underline{OA}$  mit  $A' \neq O$  gilt  $f(A') > 0$ . Also gilt  $\underline{OA'} = f^{-1}([0, \infty)) = \underline{OA}$ .

Zu (ii). Definiere  $A' := f^{-1}(r)$ . Da  $f$  abstandserhaltend ist, folgt  $\overline{OA'} = |f(A') - f(O)| = r$ . Wegen Bijektivität von  $f$  ist  $A'$  mit dieser Eigenschaft eindeutig.  $\square$

### Nullwinkel

Ein Winkel  $\angle AOB$  heißt *Nullwinkel*, wenn  $\overline{\angle AOB} = 0$ .

**Satz 3.4.** *Der Winkel  $\angle AOB$  ist genau dann ein Nullwinkel, wenn  $[OA) = [OB)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass für alle Punkte  $A \neq O$  gilt  $\overline{\angle AOA} = 0$ . Nach Axiom (III) gilt

$$\overline{\angle AOA} + \overline{\angle AOA} \equiv \overline{\angle AOA}.$$

Nach Subtraktion von  $\overline{\angle AOA}$  erhalten wir  $\overline{\angle AOA} \equiv 0$ . Da  $\overline{\angle AOA} \in (-\pi, \pi]$  folgt  $\overline{\angle AOA} = 0$ . Die Behauptung folgt nun nach Axiom (III) und Lemma 3.3.  $\square$

**Satz 3.5.** *Für alle Punkte  $A, B$  verschieden von  $O$  gilt*

$$\overline{\angle AOB} \equiv -\overline{\angle BOA}.$$

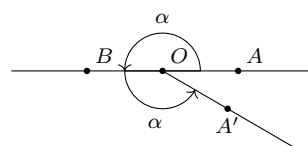
*Beweis.* Nach (IIIb) und Satz 3.4 folgt

$$\overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOA} \equiv \overline{\angle AOA} = 0.$$

Die Behauptung folgt nach Subtraktion.  $\square$

### Gestreckter Winkel

Ein Winkel  $\angle AOB$  heißt *gestreckter Winkel*, wenn  $\overline{\angle AOB} = \pi$ . Wir sagen  $O$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn gilt  $O \in AB$  sowie  $O \neq A$  und  $O \neq B$ .



**Satz 3.6.** Ein Winkel  $\angle AOB$  ist gestreckt, genau dann wenn  $O$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt.

*Beweis.* Wir zeigen die Richtung  $\Leftarrow$  der Äquivalenz. Sei also  $O$  zwischen  $A$  und  $B$ . Nach Lemma 3.3 können wir annehmen, dass  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ . Setze  $\alpha := \overline{\angle AOB}$ . Nach (IIIa) gibt es einen Strahl  $\underline{OA'}$ , so dass  $\overline{\angle BOA'} = \alpha$ . Ohne Einschränkung ist  $\overline{OA'} = 1$ . Nach (IV) ist  $\triangle AOB \cong \triangle BOA'$ . Sei  $f$  die entsprechende Isometrie mit  $f(A) = B$ ,  $f(O) = O$  und  $f(B) = A'$ . Da  $(A'B) = f((AB)) \ni f(O) = O$  gilt  $(A'B) = (AB)$  nach (II), denn beide Geraden enthalten die Punkte  $O$  und  $B$ . Nach Definition der Geraden gibt es genau zwei Punkte auf  $(AB)$  mit Abstand 1 von  $O$ , nämlich  $A$  und  $B$ . Da auch  $A' \in (AB)$  mit  $\overline{OA'} = 1$  gilt entweder  $A' = B$  oder  $A' = A$ . Falls  $A' = B$  gilt  $\alpha = \overline{\angle BOA'} = 0$  und mit Satz 3.4 folgt aus  $\alpha = \overline{\angle AOB} = 0$  dass  $\underline{OA} = \underline{OB}$ . Jedoch liegt dann  $O$  nicht zwischen  $A$  und  $B$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir folgern  $A' = A$  und rechnen mit (IIIb) und Satz 3.4

$$0 = \overline{\angle AOA} \equiv \overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOA} = \overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOA'} = 2\alpha.$$

Damit ist  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = \pi$ . Da wir bereits  $\alpha = 0$  ausgeschlossen haben, folgt  $\alpha = \pi$ .

Wir zeigen die Richtung  $\Rightarrow$  der Äquivalenz. Es gelte also  $\overline{\angle AOB} = \pi$ . Sei  $B' \in (AO)$ , so dass  $O$  zwischen  $A$  und  $B'$  liegt. Nach dem eben Gezeigten folgern wir  $\overline{\angle AOB'} = \pi$  und mit (IIIa)  $\underline{OB} = \underline{OB'}$ . Also ist  $O$  zwischen  $A$  und  $B$ .  $\square$

Ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt *ausgeartet*, wenn die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  kollinear sind. Das folgende Korollar ist eine direkte Konsequenz aus dem letzten Satz.

**Korollar 3.7.** Ein Dreieck  $\triangle ABC$  ist ausgeartet, genau dann wenn einer der Winkel

$$\angle ABC, \quad \angle BCA \quad \text{oder} \quad \angle CAB,$$

gleich 0 oder  $\pi$  misst. Außerdem sind dann bis auf Umordnung die Winkelmaße dieser Winkel gleich 0, 0 und  $\pi$ .

**Übung 3.8.** (i) Drei paarweise verschiedene Punkte  $A$ ,  $O$  und  $B$  sind genau dann kollinear, wenn  $2\angle AOB \equiv 0$ .

(ii) Gegeben Punkt  $A$ ,  $B$  und  $C$  verschieden von  $O$ , dann gilt  $B$ ,  $O$  und  $C$  sind kollinear genau dann wenn  $2\angle AOB \equiv 2\angle AOC$ .

**Übung 3.9.** Es gibt ein Dreieck, das nicht ausgeartet ist.

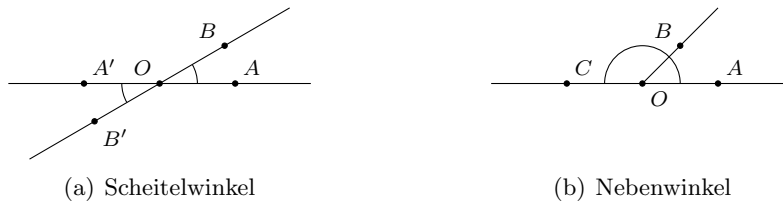


Abbildung 3.1: Wichtige Paare von Winkeln.

### Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Zwei Winkel  $\angle AOB$  und  $\angle A'OB'$  heißen *Scheitelwinkel*, wenn sowohl  $O$  zwischen  $A$  und  $A'$  als auch zwischen  $B$  und  $B'$  liegt.

**Satz 3.10** (Scheitelwinkelsatz). *Scheitelwinkel haben gleich großes Winkelmaß.*

*Beweis.* Die Winkel  $\angle AOA'$  und  $\angle BOB'$  sind gestreckt. Nach (IIIb) und Satz 3.6 gilt

$$0 = \overline{\angle AOA'} - \overline{\angle BOB'} \equiv \overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOA'} - \overline{\angle BOA'} - \overline{\angle A'OB'} = \overline{\angle AOB} - \overline{\angle A'OB'}.$$

Nach Subtraktion folgt  $\overline{\angle AOB} \equiv \overline{\angle A'OB'}$  und da  $\overline{\angle AOB}, \overline{\angle A'OB'} \in (-\pi, \pi]$  folgt die Behauptung.  $\square$

Zwei Winkel  $\angle AOB$  und  $\angle BOC$  heißen *Nebenwinkel* wenn  $O$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt.

**Satz 3.11** (Nebenwinkelsatz). *Für Nebenwinkel  $\angle AOB$  und  $\angle BOC$  gilt*

$$\overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOC} = \pm\pi.$$

*Außerdem haben die Winkelmaße das gleiche Vorzeichen.*

*Beweis.* Der Winkel  $\angle AOC$  ist gestreckt. Setze  $\alpha := \overline{\angle AOB}$  und  $\beta := \overline{\angle BOC}$ . Nach (IIIb) und Satz 3.6 gilt

$$\pi \equiv \overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOC} = \alpha + \beta.$$

Ohne Einschränkung gilt  $|\alpha|, |\beta| < \pi$ . Demnach  $2\pi > |\alpha + \beta| = |\pi + 2\pi n|$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Diese Ungleichung ist nur für  $n = 0, -1$  erfüllt. Das liefert die erste Behauptung. Auch haben  $\alpha$  und  $\beta$  das gleiche Vorzeichen. Sonst wäre  $\pi > |\alpha + \beta| = |\pi + 2\pi n|$  aber diese Ungleichung hat keine Lösung für  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

## 3.2 Halbebenen

**Definition 3.12.** Ein Winkel  $\angle AOB$  heißt

- *echter Winkel*, wenn  $\angle AOB$  weder ein Nullwinkel noch ein gestreckter Winkel ist.
- *positiv*, wenn  $0 < \overline{\angle AOB} < \pi$
- *negativ*, wenn  $\overline{\angle AOB} < 0$

Das Vorzeichen  $Vz\angle AOB$  eines echten Winkels  $\angle AOB$  ist  $+1$  (bzw.  $-1$ ), wenn  $\angle AOB$  positiv (bzw. negativ) ist.

**Korollar 3.13.** Der Winkel  $\angle AOB$  ist genau dann positiv wenn  $\angle BOA$  negativ ist.

*Beweis.* Satz 3.5. □

Wir verwenden den folgenden wichtigen Satz aus der Analysis ohne Beweis.

**Satz 3.14** (Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so dass  $f(a)$  und  $f(b)$  verschiedene Vorzeichen haben, dann gibt es ein  $t_0 \in (a, b)$  so dass  $f(t_0) = 0$ .

**Korollar 3.15.** Sei  $[0, 1] \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}, t \mapsto (A_t, O_t, B_t)$  eine stetige Funktion, so dass  $A_t, O_t$  und  $B_t$  für alle  $t \in [0, 1]$  nicht kollinear sind. Dann haben  $\angle A_0 O_0 B_0$  und  $\angle A_1 O_1 B_1$  das gleiche Vorzeichen.

*Beweis.* Setze  $f(t) := \overline{\angle A_t O_t B_t}$  nach 2.16 und Axiom (IIIc) ist  $f$  stetig und es gilt  $f(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, 1]$  nach Voraussetzung. □

**Lemma 3.16.** Für  $Q' \in \overrightarrow{PQ}$  mit  $Q' \neq P$  und  $X \neq (PQ)$  haben die Winkel  $\angle PQX$  und  $\angle PQ'X$  das gleiche Vorzeichen.

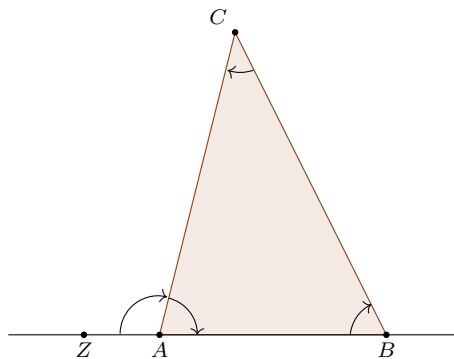


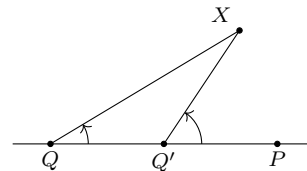
Abbildung 3.2: Innenwinkel im Dreieck haben das gleiche Vorzeichen.

*Beweis.* Nach Lemma 3.3 gibt es für jedes  $t \in [0, 1]$  ein eindeutiges  $Q_t \in \overrightarrow{PQ}$  mit

$$\overline{PQ_t} = (1-t)\overline{PQ} + t\overline{PQ'} > 0.$$

Die Abbildung  $t \mapsto Q_t$  ist stetig, denn es gibt eine Konstante  $c$  so dass  $\overline{Q_s Q_t} = c|s-t|$  für alle  $s, t \in [0, 1]$ .

Außerdem gilt  $Q_0 = Q$  und  $Q_1 = Q'$  sowie  $Q_t \neq P$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Somit folgt die Behauptung aus dem Korollar 3.15. □

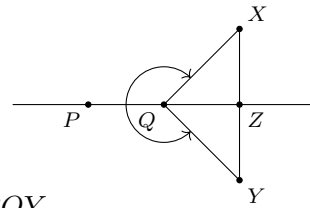


**Lemma 3.17.** Gegeben ein nicht-ausgeartetes Dreieck  $\triangle ABC$ , dann haben die Winkel  $\angle ABC$ ,  $\angle BCA$  und  $\angle CAB$  das gleiche Vorzeichen.

*Beweis.* Sei  $Z$  ein Punkt, so dass  $A$  zwischen  $B$  und  $Z$  liegt. Nach Nebenwinkelsatz 3.11 haben  $\angle ZAC$  und  $\angle CAB$  das gleiche Vorzeichen. Nach Lemma 3.16 haben  $\angle ZAC$  und  $\angle ZBC = \angle ABC$  das gleiche Vorzeichen. Damit haben auch  $\angle ABC$  und  $\angle CAB$  das gleiche Vorzeichen. Analog zeigen wir, dass  $\angle CAB$  und  $\angle BCA$  das gleiche Vorzeichen haben.  $\square$

**Satz 3.18.** Geben eine Strecke  $XY$  und eine Gerade  $(PQ)$ , dann gilt  $XY \cap (PQ) = \emptyset$  genau dann wenn  $\angle PQX$  und  $\angle PQY$  das gleiche Vorzeichen haben.

*Beweis.* Die Richtung  $\Rightarrow$  ist eine Hausaufgabe. Wir zeigen die Rückrichtung  $\Leftarrow$  durch Widerspruch. Angenommen  $XY \cap (PQ) = \{Z\}$ . Ohne Einschränkung gilt  $Z \neq P$ , sonst benenne  $P$  um. Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Lage von  $Z$  auf  $(PQ)$ . Betrachte den Fall  $Z = Q$ . Dann gilt nach Nebenwinkelsatz 3.11



$$V_z \angle PQX = -V_z \angle XPQ = -V_z \angle PQY.$$

Nun der Fall  $Q$  zwischen  $P$  und  $Z$ . Durch abwechselndes Anwenden des Nebenwinkelsatzes 3.11, Lemma 3.17 und Korollar 3.13

$$V_z \angle PQX = -V_z \angle ZQX = V_z \angle QZX = -V_z \angle QZY = V_z \angle ZQY = -V_z \angle PQY.$$

Im letzten Fall ist  $\overrightarrow{QZ} = \overrightarrow{QP}$ . Wir verwenden Lemma 3.16 und Nebenwinkelsatz 3.11

$$V_z \angle PQX = V_z \angle PZX = -V_z \angle PZY = -V_z \angle PQY.$$

Damit wurde der Satz bewiesen.  $\square$

**Korollar 3.19.** Das Komplement einer Geraden  $(PQ)$  in der Ebene ist die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen, genannt Seiten oder Halbebenen. Diese sind eindeutig durch einen der beiden folgenden Punkte beschrieben.

- (i) Zwei Punkte  $X, Y \notin (PQ)$  liegen in der gleichen Seite genau dann wenn  $\angle PQX$  und  $\angle PQY$  das gleiche Vorzeichen haben.
- (ii) Zwei Punkte  $X, Y \notin (PQ)$  liegen in der gleichen Seite genau dann wenn  $XY$  und  $(PQ)$  sich nicht schneiden.

**Definition 3.20.** Gegeben eine Gerade  $(PQ)$  und ein Punkt  $X \notin (PQ)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+(PQ, X) &:= \{Y \in \mathcal{E} \setminus (PQ) \mid XY \cap (PQ) = \emptyset\} \\ \mathcal{H}_-(PQ, X) &:= \{Y \in \mathcal{E} \setminus (PQ) \mid XY \cap (PQ) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Wir sagen  $X, Y$  liegen auf der selben (bzw. verschiedenen) Seite bzgl.  $(PQ)$  wenn  $Y \in \mathcal{H}_+(PQ, X)$  (bzw.  $Y \in \mathcal{H}_-(PQ, X)$ ). Wir definieren das Innere einer Strecke  $AB$ , Strahls  $\overrightarrow{OA}$ , Winkels  $\angle AOB$  und Dreiecks  $\triangle ABC$  durch

- $\text{Inn } AB = AB \setminus \{AB\}$
- $\text{Inn } \underline{OA} = \underline{OA} \setminus \{O\}$ .
- $\text{Inn } \angle AOB = \mathcal{H}_+(AO, B) \cap \mathcal{H}_+(OB, A)$
- $\text{Inn } \triangle ABC = \mathcal{H}_+(AB, C) \cap \mathcal{H}_+(BC, A) \cap \mathcal{H}_+(CA, B)$

Eine Menge  $\Omega \subset \mathcal{E}$  heißt *konvex* wenn für alle  $A, B \in \Omega$  gilt  $AB \subset \Omega$ .

**Übung 3.21.** Zeigen Sie

- (i) Der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist entweder leer oder konvex ist.
- (ii) Eine Gerade, ein Strahl, eine Strecke und eine Halbebene sowie das Innere von Strecke, Winkel und Dreieck sind konvexe Mengen.

Ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt *echt*, genau dann wenn es nicht ausgeartet ist. Die *Seiten* des Dreiecks sind die Strecken  $AB$ ,  $AC$  und  $BC$  und die *Eckpunkte* die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

**Satz 3.22** (Satz von Pasch). Gegeben ein echtes Dreieck  $\triangle ABC$  und eine Gerade  $g$  die keinen Eckpunkt enthält, dann schneidet  $g$  entweder keine oder genau zwei Seiten von  $\triangle ABC$ .

*Beweis.* Angenommen  $AB \cap g \neq \emptyset$ . Mit Korollar 3.19 liegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $g$ . Da  $C \notin g$  gibt es zwei Fälle. Im ersten Fall gilt  $C \in \mathcal{H}_+(g, A) = \mathcal{H}_-(g, B)$ , also  $AC \cap g = \emptyset$  und  $BC \cap g \neq \emptyset$ . Im zweiten Fall  $C \in \mathcal{H}_-(g, A) = \mathcal{H}_+(g, B)$ , also  $AC \cap g \neq \emptyset$  und  $BC \cap g = \emptyset$ .  $\square$

**Lemma 3.23** (Armbrustlemma). Sei  $\angle AOB$  ein echter Winkel und  $\underline{OC}$  ein Strahl mit  $C \in \text{Inn } \angle AOB$ . Dann gilt

- (i)  $\text{Inn } AB \subset \text{Inn } \angle AOB$  und  $\text{Inn } \underline{OC} \subset \text{Inn } \angle AOB$ .
- (ii) Der Strahl  $\underline{OC}$  schneidet die Strecke  $AB$  in genau einem Punkt.

*Beweis.* Zu (i). Gegeben  $X \in \text{Inn } AB$ , dann folgt  $XB \cap (AO) = \emptyset$  und  $XA \cap (OB) = \emptyset$ , also  $X \in \mathcal{H}_+(AO, B)$  und  $X \in \mathcal{H}_+(OB, A)$ . Somit  $X \in \text{Inn } \angle AOB$ .

Gegeben  $X \in \text{Inn } \underline{OC}$ , dann folgt  $\underline{OC} = \underline{OX}$  nach Lemma 3.3. Demnach  $\angle AOX = \angle AOC$  und  $\angle BOX = \angle BOC$ . Insbesondere sind die Vorzeichen dieser Winkel jeweils gleich und es folgt mit Korollar 3.19  $X \in \mathcal{H}_+(AO, B)$  und  $X \in \mathcal{H}_+(OB, A)$ . Somit  $X \in \text{Inn } \angle AOB$ .

Zu (ii). Nach Korollar 3.19 folgt aus  $C \in \mathcal{H}_+(AO, B)$  und  $C \in \mathcal{H}_+(OB, A)$ , dass  $\angle AOB$  und  $\angle AOC$  sowie  $\angle BOC$  und  $\angle BOA$  jeweils das gleiche Vorzeichen haben. Nach dem Nebenwinkelsatz 3.11 folgt, dass  $\angle AOC$  und  $\angle BOC$  verschiedene Vorzeichen haben. Damit ergibt sich wiederum aus Korollar 3.19, dass  $AB$  die Gerade  $(OC)$  schneidet. Sei nun  $Z$  dieser Schnittpunkt. Wir müssen noch zeigen, dass  $Z \in \underline{OC}$ . Angenommen per Widerspruch  $Z \in (OC) \setminus \underline{OC}$ . Dann gilt nach Nebenwinkelsatz 3.11, dass  $\angle AOC$  und  $\angle AOZ$  verschiedene Vorzeichen haben. Also  $Z \in \mathcal{H}_-(AO, C)$ . Dies steht im Widerspruch zu  $Z \in \text{Inn } AB \subset \text{Inn } \angle AOB \subset \mathcal{H}_+(AO, C)$ .  $\square$

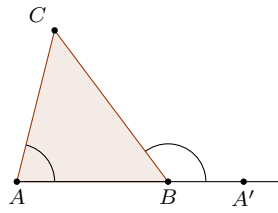


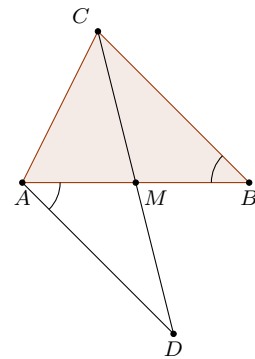
Abbildung 3.3: Außenwinkel im Dreieck  $\triangle ABC$

**Satz 3.24** (schwacher Innenwinkelsatz). *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck, dann gilt*

$$|\overline{\angle CAB}| + |\overline{\angle ABC}| < \pi.$$

*Beweis.* Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$  und  $D \in \overline{CM}$ , so dass  $M$  auch der Mittelpunkt von  $CD$  ist. Nach Scheitelwinkelsatz 3.10 gilt  $\overline{\angle BMC} = \overline{\angle AMD}$ . Nach Konstruktion und Axiom (IV) gilt  $\triangle BMC \cong \triangle AMD$ . Damit gilt  $\angle MBC = \pm \angle MAD$ . Mit dem Lemma 3.17 in den Dreiecken  $\triangle BMC$  und  $\triangle AMD$  da  $\angle BMC$  und  $\angle AMD$  das gleiche Vorzeichen haben, folgt  $\overline{\angle MBC} = \overline{\angle MAD}$ . Da  $M$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt, folgt  $\overline{\angle MAD} = \overline{\angle BAD}$  und  $\angle MBC = \angle ABC$ . Zusammengefasst haben wir gezeigt

$$\overline{\angle ABC} = \overline{\angle BAD}.$$



Wir setzen dies in die folgende Gleichung nach Axiom (IIIb) ein und erhalten

$$\overline{\angle CAD} \equiv \overline{\angle CAB} + \overline{\angle ABC}.$$

Da die Punkte  $M$ ,  $B$  und  $D$  alle auf der gleichen Seite bezüglich  $(AC)$  liegen und erneut mit Lemma 3.17 im Dreieck  $\triangle ABC$  haben alle Winkel in der letzten Gleichung das gleiche Vorzeichen. Demnach gilt  $=$  anstatt von  $\equiv$  und es folgt

$$|\overline{\angle CAB}| + |\overline{\angle ABC}| = |\overline{\angle CAD}| < \pi.$$

Wobei wir in der letzten Ungleichung verwendet haben, dass  $\angle CAD$  kein gestreckter Winkel sein kann.  $\square$

Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck und  $A'$  auf der Geraden  $(AB)$  so dass  $B$  zwischen  $A$  und  $A'$  liegt, dann nenne  $\angle CBA'$  den *Außenwinkel* zu  $\angle CAB$ .

**Korollar 3.25** (Außenwinkelsatz). *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck und  $\angle CBA'$  ein Außenwinkel zu  $\angle CAB$ , dann gilt*

$$|\overline{\angle CAB}| < |\overline{\angle CBA'}|.$$

*Beweis.* Betrachten wir den Fall wenn  $\angle CAB$  positiv ist. Nach Lemma 3.16 und 3.17 ist auch  $\angle CBA'$  und  $\angle ABC$  positiv. Nach Satz 3.24 und Satz 3.10 folgt

$$\overline{\angle CAB} < \pi - \overline{\angle ABC} = \overline{\angle CBA'}.$$

Der Fall wenn  $\angle CAB$  negativ ist folgt analog. □

### 3.3 Kongruenzsätze

Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck, wir schreiben für die Innenwinkel

- $\angle A = \angle CAB$
- $\angle B = \angle ABC$
- $\angle C = \angle BCA$ .

Gegeben seien zwei Winkel  $\angle AOB$  und  $\angle A'O'B'$  sowie zwei Strecken  $AB$  und  $A'B'$ . Wir schreiben

- $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$  für  $\overline{\angle AOB} = \pm \overline{\angle A'O'B'}$
- $AB \cong A'B'$  für  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

In diesem Fall nennen wir die Winkel bzw. Strecken *kongruent*.

**Satz 3.26.** *Gegeben seien zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ . Jede einzelne der folgenden Bedingungen impliziert, dass  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ :*

- (SWS)  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  und  $\angle A \cong \angle A'$ .
- (WSW)  $AB \cong A'B'$ ,  $\angle A \cong \angle A'$  und  $\angle B \cong \angle B'$ .
- (SSS)  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  und  $BC \cong B'C'$ .
- (WWS)  $BC \cong B'C'$ ,  $\angle A \cong \angle A'$  und  $\angle B \cong \angle B'$ .
- (SsW)  $AB \cong A'B'$ ,  $BC \cong B'C'$  und  $\angle A \cong \angle A'$  sowie  $\overline{AB} \leq \overline{BC}$ .

*Bemerkung.* Der Teil (SWS) bedarf keines Beweises, da dies Axiom (IV) ist. Die weitere Bedingung bei (SsW) ist notwendig. Wir werden in der Übung ein Gegenbeispiel zur Aussage des Satzes kennenlernen, wenn sie nicht gilt.

*Beweis von (WSW).* Ohne Einschränkung gilt  $\overline{AC} \geq \overline{A'C'}$ . Sei  $C'' \in AC$  so dass  $AC'' \cong A'C'$ . Nach (SWS) gilt  $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC''$ . Insbesondere auch  $\angle ABC'' \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$ . Damit entweder  $\overline{\angle ABC''} = -\overline{\angle ABC}$  oder  $\overline{ABC''} = \overline{\angle ABC}$ . Der erste Fall ist nicht möglich, da  $C$  und  $C''$  mit Korollar 3.19 auf der gleichen Seite liegen, da  $CC'' \cap (AB) = \emptyset$  und somit die Winkelmaße das gleiche Vorzeichen haben müssen. Im zweiten Fall gilt  $\overline{\angle ABC''} = \overline{\angle ABC}$  und mit Axiom III gilt  $\overline{BC} = \overline{BC''}$ . Also  $(BC) = (BC'')$  und damit  $\{C''\} = (BC'') \cap (AC) = (BC) \cap (AC) = \{C\}$ . Es gilt also  $C = C''$ . Damit  $AC \cong AC''$  und somit nach (SWS) auch  $\triangle ABC \cong \triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C'$ . □

Ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt *gleichschenkelig*, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die dritte Seite heißt dann *Basis*.

**Satz 3.27** (Basiswinkelsatz). *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck. Dann gilt*

$$CA \cong CB \iff \angle A \cong \angle B.$$

*Beweis.* Richtung  $\Rightarrow$ . Für die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BAC$  gelten  $CA \cong CB$ ,  $CB \cong CA$  und  $\angle BCA \cong \angle ACB$ . Damit folgt nach (SWS)  $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ . Insbesondere  $\angle A \cong \angle B$ .

Richtung  $\Leftarrow$  wird in der Übung bewiesen. □

Ein Dreieck mit drei gleichlangen Seiten heißt *gleichseitig*.

**Übung 3.28.** *Sei  $\triangle ABC$  ein gleichseitiges Dreieck, dann gilt  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ .*

*Beweis von (SSS).* Konstruiere  $C''$ , so dass

- Punkte  $C$  und  $C''$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $(AB)$ .
- $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$
- $AC'' \cong A'C'$

Nach (SWS) gilt  $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC''$ . Damit sind die Dreiecke  $\triangle ACC''$  und  $\triangle BCC''$  gleichschenkelig mit Basis  $CC''$ . Wir folgern nach dem Basiswinkelsatz 3.27

$$\overline{\angle ACC''} = -\overline{\angle AC''C} \quad \text{und} \quad \overline{C''CB} = -\overline{\angle CC''B}.$$

Addiere mit Axiom (III) und erhalte

$$\overline{\angle ACB} \equiv -\overline{\angle AC''B}.$$

Da beide Winkelmaße im Intervall  $(-\pi, \pi)$  Werte annehmen gilt sogar  $=$  anstatt von  $\equiv$ . Mit (SWS) folgt  $\triangle ABC \cong \triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C'$ . □

**Satz 3.29.** *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck, dann gilt*

$$|\overline{\angle CAB}| > |\overline{\angle ABC}| \iff \overline{BC} > \overline{AC}.$$

*Beweis.* Richtung  $\Leftarrow$ . Sei  $A' \in BC$ , so dass  $A'C \cong AC$ . Damit ist  $\triangle CAA'$  gleichschenkelig. Wir folgern mit Axiom IIIb

$$\overline{\angle CAB} \equiv \overline{\angle CAA'} + \overline{\angle A'AB}.$$

Nach dem Armbrustlemma 3.23 folgt  $A' \in \text{Inn } \angle CAB$ . Somit sind alle Vorzeichen in der letzten Gleichung gleich und es gilt  $=$  anstatt von  $\equiv$ . Wir schließen

$$|\overline{\angle CAB}| = |\overline{\angle CAA'}| + |\overline{\angle A'AB}| > |\overline{\angle CAA'}| = |\overline{\angle CA'A}| > |\overline{\angle ABC}|,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung den Außenwinkelsatz (siehe Korollar 3.25) verwendet haben.

Für Richtung  $\Rightarrow$  nehmen wir per Widerspruch an, dass  $\overline{AC} \geq \overline{BC}$  gilt. Bei  $=$  folgt  $\angle CAB \cong \angle ABC$  nach Basiswinkelsatz 3.27 was aber durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Falls  $>$  gilt, folgere analog zur Richtung  $\Leftarrow$  mit vertauschten Rollen  $A$  und  $B$ , dass  $|\overline{\angle ABC}| > |\overline{\angle CAB}|$  welches ebenfalls durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist.  $\square$

*Bemerkung.* (i) Der letzte Satz 3.29 besagt, dass in einem Dreieck stets die längere Seite dem größeren Winkel gegenüberliegt.

(ii) Im Beweis haben wir folgende nützliche Aussage bewiesen: Für alle  $B \in \text{Inn } \angle AOC$  gilt

$$\overline{\angle AOC} = \overline{\angle AOB} + \overline{\angle BOC}, \quad (3.1)$$

und alle haben das gleiche Vorzeichen.

*Beweis von Satz 3.26.* Die restlichen Teile werden als Hausaufgabe und Übung bewiesen.  $\square$

*Bemerkung.* In der absoluten Geometrie ist (WWW) im Allgemeinen *keine* Bedingung für die Kongruenz von Dreiecken. Wir werden später sehen, dass (WWW) in der hyperbolischen Geometrie ein Kongruenzsatz ist.

**Satz 3.30.** *Gegben seien zwei echte Winkel  $\angle AOB$  und  $\angle AOC$  mit gleichem Vorzeichen, dann gilt*

$$|\overline{\angle AOC}| > |\overline{\angle AOB}| \iff B \in \text{Inn } \angle AOC.$$

*Beweis.* Richtung  $\Leftarrow$ . Nach Gleichung (3.1) gilt  $|\overline{\angle AOC}| > |\overline{\angle AOB}|$  da  $|\overline{\angle BOC}| > 0$ .

Richtung  $\Rightarrow$ . Wir machen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von  $\angle BOC$ . Im Fall, dass die Vorzeichen von  $\angle BOC$ ,  $\angle AOC$  und  $\angle AOB$  übereinstimmen, folgt nach Korollar 3.19, dass  $B$  und  $A$  sowie  $B$  und  $C$  auf der gleichen bezüglich  $(OC)$  bzw.  $(AO)$  liegen. Damit  $B \in \text{Inn } \angle AOC$ . Im anderen Fall stimmen die Vorzeichen von  $\angle BOC$ ,  $\angle BOA$  und  $\angle COA$  überein. Damit folgt, dass  $C$  und  $A$  sowie  $C$  und  $B$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(BO)$  bzw.  $(AO)$  liegen. Demnach liegt  $C$  im Inneren des Winkels  $\angle AOB$  und wir folgern mit (3.1)  $|\overline{\angle AOB}| > |\overline{\angle AOC}|$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Demnach kann nur der erste Fall eintreten und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

### 3.4 Senkrechte Geraden

Ein echter Winkel  $\angle AOB$  heißt

- *spitzer Winkel*, wenn  $|\overline{\angle AOB}| < \frac{\pi}{2}$ ,
- *rechter Winkel*, wenn  $|\overline{\angle AOB}| = \frac{\pi}{2}$  und
- *stumpfer Winkel*, wenn  $|\overline{\angle AOB}| > \frac{\pi}{2}$ .

Im Fall eines rechten Winkels  $\angle AOB$  schreibe auch  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ . Wir sagen, zwei Geraden  $g = (OA)$  und  $h = (OB)$  *schneiden sich senkrecht*, geschrieben  $g \perp h$ , wenn  $\angle AOB$  ein rechter Winkel ist.

*Bemerkung.* Aufgrund des Nebenwinkelsatzes und des Satzes über den gestreckten Winkel ist „sich senkrecht schneiden“ wohl-definiert.

Gegeben eine Strecke  $AB$  mit Mittelpunkt  $M$ , d.h.  $M \in AB$  so dass  $AM \cong MB$ . Eine Gerade  $g$  heißt *Mittelsenkrechte von  $AB$*  wenn  $g$  die Strecke  $AB$  in  $M$  schneidet und es gilt  $g \perp (AB)$ .

**Satz 3.31** (Satz von der Mittelsenkrechten). *Sei  $AB$  eine Strecke und  $m$  ihre Mittelsenkrechte, dann gilt*

$$m = \{Q \in \mathcal{E} \mid QA \cong QB\}.$$

*Beweis.* Hausaufgabe. □

**Übung 3.32.** *Gegeben eine Strecke  $AB$  und  $m$  ihre Mittelsenkrechte sowie ein beliebiger Punkt  $X \notin m$ . Dann gilt*

$$\overline{AX} < \overline{BX} \iff X \in \mathcal{H}_+(m, A).$$

Gegeben sei eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $P$ . Eine Gerade  $\ell$  heißt *Lot von  $P$  auf  $g$* , wenn  $P \in \ell$  und  $\ell \perp g$  gilt. Der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $g$  heißt *Lotfußpunkt*.

**Satz 3.33** (Satz vom Lot). *Gegeben eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $P$ , dann gibt es ein eindeutiges Lot von  $P$  auf  $g$ .*

*Beweis.* Im Fall, dass  $P \in g$  folgt die Existenz und Eindeutigkeit nach Axiom III. Nehmen wir also an  $P \notin g$ .

Wir zeigen die Existenz. Wähle zwei verschiedene Punkte  $A, B \in g$  und einen Punkt  $P'$  so dass

- $P$  und  $P'$  liegen auf verschiedenen Seiten bezüglich  $g$ ,
- $\angle ABP \cong \angle ABP'$  und
- $AP \cong AP'$ .

Nach (SWS) gilt  $\triangle ABP \cong \triangle ABP'$ . Insbesondere  $BP \cong BP'$  und  $AP \cong AP'$ . Nach dem Satz 3.31 ist damit  $g = (AB)$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $PP'$ . Insbesondere gilt  $\ell = (PP') \perp g$ .

Wir zeigen die Eindeutigkeit. Angenommen es gäbe zwei solche Geraden  $\ell$  und  $\ell'$  mit Schnittpunkten  $F$  bzw.  $F'$  mit  $g$ . Dann hätte das Dreieck  $\triangle PFF'$  zwei rechte Innenwinkel  $\angle PFF'$  und  $\angle PF'F$  im Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24. □

**Satz 3.34** (Eigenschaften vom Lot). *Gegeben eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $P$ . Sei  $F \in g$  der Lotfußpunkt des Lots von  $P$  auf  $g$ , dann gilt*

- (i)  $\overline{PF} < \overline{PQ}$  für alle  $Q \in g$  mit  $Q \neq F$ .

(ii)  $\overline{PZ} < \overline{PQ}$  für alle  $Q, Z \in g$  mit  $Z$  zwischen  $F$  und  $Q$ .

*Beweis.* Übung. □

**Definition 3.35.** Mit Bezeichnung von Satzes 3.34 definiere den *Abstand von Punkt  $P$  zu einer Geraden  $g$*  durch  $d(P, g) := \overline{PF}$ .

**Satz 3.36.** Sind  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  zwei Dreiecke mit  $AC \cong A'C'$  und  $BC \cong B'C'$ , dann gilt

$$\overline{AB} < \overline{A'B'} \iff |\angle ACB| < |\angle A'C'B'|.$$

*Beweis.* Hausaufgabe. □

**Satz 3.37** (Legendre - Saccheri - Lambert). Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck, dann gilt

$$|\angle ABC| + |\angle BCA| + |\angle CAB| \leq \pi.$$

### 3.5 Kreise

**Definition 3.38.** Sei  $M \in \mathcal{E}$  und  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r > 0$ . Dann heißt die Menge

$$K(M, r) := \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{PM} = d(P, M) = r\},$$

*Kreis* um den *Mittelpunkt*  $M$  mit *Radius*  $r$ . Für einen Punkt  $P \in K$  nennen wir die Strecke  $MP$  auch *Radiussegment*. Wir sagen, dass ein Punkt  $A \in \mathcal{E}$  *innerhalb* oder *im Inneren* von  $K(M, r)$  liegt, falls  $\overline{AM} = d(A, M) < r$ . Entsprechend sagen wir, dass  $A$  *außerhalb* von  $K(M, r)$  liegt, falls  $\overline{AM} = d(A, M) > r$  gilt. Sind  $P, Q \in K(M, r)$ , dann heißt die Strecke  $PQ$  *Sehne* des Kreises. Eine Sehne  $PQ$  von  $K(M, r)$  heißt *Durchmesser*, falls  $M \in PQ$ .

**Satz 3.39.** Sei  $K(M, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ . Sei  $PQ$  eine Sehne von  $K(M, r)$  und  $m$  ihre Mittelsenkrechte. Dann gilt  $M \in m$ .

*Beweis.* Da  $P, Q \in K(M, r)$  gilt  $\overline{PM} = \overline{QM} = r$ . Nach dem Satz 3.31 folgt die Behauptung. □

**Übung 3.40.** Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ . Sei  $P$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade durch  $P$ , so dass  $g$  den Kreis  $K$  in zwei verschiedenen Punkten  $X, Y$  schneidet. Zeigen Sie, dass  $P$  genau dann im Inneren von  $K$  liegt, wenn  $P$  zwischen  $X$  und  $Y$  liegt.

**Übung 3.41.** Gegeben seien zwei verschiedene Kreise  $K = K(M, r)$  und  $K' = K(M', r')$  mit  $M \neq M'$  und  $PQ$  eine Sehne von sowohl  $K$  als auch  $K'$ . Zeigen Sie, dass  $(MM')$  die Mittelsenkrechte von  $PQ$  ist

**Satz 3.42.** Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  und sei  $g$  eine Gerade. Dann schneidet  $g$  den Kreis  $K$  in

(i) genau zwei Punkten, falls  $d(M, g) < r$ ,

(ii) genau ein Punkt, falls  $d(M, g) = r$  und

(iii) keinem Punkt, falls  $d(M, g) > r$ .

*Beweis.* Bezeichne mit  $F \in g$  den Lotfußpunkt des Lots von  $M$  auf  $g$ . Wähle einen Strahl  $\overrightarrow{FQ} \subset g$ . Nach Lemma 3.3 gibt es für jedes  $t > 0$  ein eindeutiges  $Q_t \in \overrightarrow{FQ}$ , so dass  $\overline{FQ_t} = t$ . Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto d(M, Q_t)$  ist

- stetig, da nach Dreiecksungleichung  $|f(t) - f(s)| \leq d(Q_s, Q_t) = |s - t|$  für alle  $s, t \geq 0$ ,
- monoton wachsend, da nach Satz (3.34) gilt  $f(s) < f(t)$  für alle  $s < t$  und
- unbeschränkt, da es für alle  $c > 0$  ein  $t := c + d(F, M)$  gibt, so dass wieder nach Dreiecksungleichung gilt  $c = d(F, Q_t) - d(F, M) \leq f(t)$ .

Nun werten wir die Funktion bei 0 aus

- $f(0) = d(M, F) < r$ . Nach dem Zwischenwertsatz und den oben gezeigten Eigenschaften von  $f$  gibt es ein eindeutiges  $Q_t \in \overrightarrow{FQ}$  mit  $f(t) = d(M, Q_t) = r$ . Analog zeigen wir die Existenz eines zweiten Schnittpunktes auf dem entgegengesetzten Strahl  $\overrightarrow{FQ'} \subset g$  mit  $\overrightarrow{FQ'} \cup \overrightarrow{FQ} = g$ . Es gibt also genau zwei Schnittpunkte.
- $f(0) = d(M, F) = r$ , dann folgt  $F \in K$  und mit Satz 3.34 für alle anderen  $P \in g$  mit  $P \neq F$  gilt  $d(M, P) > d(M, F) = r$ . Es gibt also genau einen Schnittpunkt.
- $f(0) = d(M, F) > r$ , dann folgt analog mit Satz 3.34 für alle anderen  $P \in g$  mit  $P \neq F$  dass  $d(M, P) > d(M, F) > r$ . Es gibt also keinen Schnittpunkt.

□

**Definition 3.43.** Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis und  $g$  eine Gerade. Wir nennen  $g$

- Sekante*, wenn  $g$  den Kreis  $K$  in genau zwei Punkten schneidet,
- Tangente*, wenn  $g$  den Kreis  $K$  in genau einem Punkt schneidet und
- Passante*, wenn  $g$  den Kreis  $K$  nicht schneidet.

**Korollar 3.44.** Gegeben sei ein Kreis  $K = K(M, r)$  mit Mittelpunkt  $M$ , eine Gerade  $g$  und ein gemeinsamer Punkt  $P \in g \cap K$ . Dann ist  $g$  genau dann eine Tangente an  $K$ , wenn das Radiussegment  $MP$  senkrecht auf  $g$  steht.

*Beweis.* Sei  $F$  der Lotfußpunkt von  $M$  auf  $g$ . Nach Satz 3.34 und 3.42 gilt  $d(M, F) = d(M, P) = r$  und  $d(M, Q) > r$  für alle  $P \neq Q \in g$  genau dann wenn  $K$  und  $g$  sich nur in  $P$  schneiden. Dies wiederum ist äquivalent zu  $P = F$ , also  $MP = MF \perp g$ . □

**Satz 3.45.** Seien  $K = K(M, r)$  und  $K' = K(N, s)$  zwei verschiedene Kreise mit Mittelpunkten  $M \neq N$ . Dann schneiden  $K$  und  $K'$  sich in maximal zwei Punkten

*Beweis.* Wird in den Übungen gezeigt. □

**Übung 3.46.** Seien  $K = K(M, r)$  und  $K' = K(N, s)$  zwei verschiedene Kreise mit Mittelpunkten  $M \neq N$  und  $P \in K \cap K'$  ein gemeinsamer Punkt. Dann ist äquivalent

- (i) Die Kreise  $K$  und  $K'$  schneiden sich nur im Punkt  $P$ .
- (ii) Die Kreise  $K$  und  $K'$  haben in  $P$  eine gemeinsame Tangente.
- (iii) Die Punkte  $P, M$  und  $N$  sind kollinear.
- (iv) Es gilt  $\overline{NM} = r + s$  oder  $\overline{MN} = |s - r|$ .

**Satz 3.47.** Seien  $K = K(M, r)$  und  $K' = K(N, s)$  zwei verschiedene Kreise mit Mittelpunkten  $M \neq N$ . Dann schneiden  $K$  und  $K'$  sich in

- (i) genau zwei Punkten, wenn  $|r - s| < \overline{MN} < r + s$ ,
- (ii) genau einem Punkt, wenn  $|r - s| = \overline{MN}$  oder  $\overline{NM} = r + s$  und
- (iii) keinem Punkt, wenn  $|r - s| > \overline{MN}$  oder  $\overline{MN} > r + s$ .

Bevor wir diesen Satz beweisen können, müssen wir etwas Vorarbeit leisten. Für ein  $r > 0$  fixiere Punkte  $A, B$  mit  $\overline{AB} = r$ . Damit ist nach Axiom (III) und Lemma 3.3 für jedes  $\beta \in [0, \pi]$  der Punkt  $C_\beta$  mit

$$\overline{BC_\beta} = r \quad \text{und} \quad \angle ABC_\beta = \beta$$

eindeutig definiert. Falls  $0 < \beta < \pi$  dann ist  $\triangle ABC_\beta$  ein echtes Dreieck und nach Axiom (IV) hängt die Länge der Strecke  $AC_\beta$  nicht von der Wahl von  $A$  und  $B$  ab. Wir definieren

$$s(r, \beta) := \overline{AC_\beta}.$$

**Lemma 3.48.** Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\beta > 0$  so dass gilt

$$\beta < \delta \quad \Rightarrow \quad s(r, \beta) < \varepsilon.$$

*Beweis.* Gegeben sei ein  $\varepsilon > 0$ . Wähle einen Punkt  $X$ , so dass der Winkel  $\angle ABX$  positiv ist und einen Punkt  $Y \in \overrightarrow{AX}$ , so dass  $\overline{AY} = \frac{1}{2}\varepsilon$ . Da nach Konstruktion die Punkte  $Y$  und  $X$  auf der gleichen Seite bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegen, ist auch der Winkel  $\angle ABY$  positiv. Wir setzen  $\delta := \overline{\angle ABY}$  und nehmen ein  $\beta < \delta$ . Weiterhin bezeichne mit  $\overrightarrow{BZ}$  die Winkelhalbierende von  $\angle ABC_\beta$ , d.h. es gilt  $\overline{\angle ABZ} = \frac{1}{2}\beta$ . Da  $\beta < \delta$  liegt nach Satz 3.30 der Punkt  $Z$  im Inneren des Winkels  $\angle ABY$  und somit schneidet nach dem Armbrustlemma 3.23 der Strahl  $\overrightarrow{BZ}$  die Strecke  $AY$  im Inneren in genau einem Punkt, nennen wir ihn  $D$ . Da  $D \in \text{Inn } \overrightarrow{AY}$  gilt

$$\overline{AD} < \overline{AY}. \tag{3.2}$$

Da  $D \in \overrightarrow{BZ}$  gilt  $\angle ABD \cong \angle C_\beta BD$  und somit gilt nach Axiom (IV) die Dreiecke  $\triangle ABD$  und  $\triangle C_\beta BD$  kongruent. Insbesondere  $AD \cong DC_\beta$ . Wir rechnen mit Dreiecksungleichung und (3.2)

$$s(r, \beta) = \overline{AC_\beta} \leq \overline{AD} + \overline{DC_\beta} = 2\overline{AD} < 2\overline{AY} = \varepsilon,$$

wobei die letzte Gleichung nach Wahl von  $Y$  gilt.  $\square$

**Korollar 3.49.** Die Abbildung  $[0, \pi] \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $\beta \mapsto C_\beta$  ist stetig.

*Beweis.* Nach letztem Lemma folgt die Stetigkeit im Punkt  $\beta_0 \in [0, \pi]$ , denn für  $\beta_1 \neq \beta_0$  gilt  $d(C_{\beta_0}, C_{\beta_1}) = s(r, |\beta_0 - \beta_1|)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.47.* Ohne Einschränkung gilt  $r < s$ . Wir setzen  $B = M$  und  $A$  im Inneren von  $MN$  so dass  $\overline{AB} = r$ . Sei  $C_\beta$  der Punkt mit  $\overline{MC_\beta} = r$  und  $\angle AMC_\beta = \beta$ . Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \beta \mapsto d(C_\beta, N).$$

Diese Funktion ist nach letztem Korollar und Übung 2.16 stetig.

Falls  $|r - s| > \overline{MN}$  oder  $\overline{MN} > r + s$  kann es nach der Dreiecksungleichung keinen Schnittpunkt zwischen den Kreisen geben. Wir zeigen, dass es mindestens einen Schnittpunkt im Fall  $|r - s| \leq \overline{MN} \leq r + s$  gibt. Wir analysieren die Werte der Funktion an den Intervallgrenzen. Da nach Konstruktion der Punkt  $B$  zwischen  $C_\pi$  und  $C_0 = A$  liegt und  $A$  zwischen  $M$  und  $N$  liegt, liegt auch  $M$  zwischen  $C_\pi$  und  $N$  und es gilt

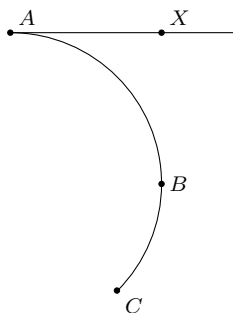
$$\begin{aligned} r + s \geq \overline{MN} &= \overline{MC_0} + \overline{C_0N} = r + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq s. \\ s = s - r + r &= |s - r| + r \leq \overline{NM} + \overline{MC_\pi} = \overline{NC_\pi} = f(\pi). \end{aligned}$$

Falls  $f(0), f(\pi) \neq s$ , dann folgt nach Zwischenwertsatz, dass es  $\beta \in (0, \pi)$  mit  $f(\beta) = s$  gibt. Im anderen Fall gilt  $f(0) = s$  oder  $f(\pi) = s$ . In jedem Fall finden wir also auch ein  $C_\beta$ , so dass  $d(M, C_\beta) = r$  und  $d(N, C_\beta) = f(\beta) = s$ . Somit ist  $C_\beta$  ein Schnittpunkt der Kreise  $K$  und  $K'$  und die Behauptung des Satzes folgt mit Übung 3.46 und Satz 3.45.  $\square$

**Definition 3.50.** Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis und  $A, B, C \in K$  verschiedene Punkte. Wir definieren den *Kreisbogen*  $\frown ABC$  durch

$$\frown ABC := K \setminus \mathcal{H}_-(AC, B).$$

Außerdem definieren wir  $\frown AB\infty := \overrightarrow{AB}$  und  $\frown A\infty B := (AB) \setminus \text{Inn } AB$ .



Die Punkte  $A, C$  heißen *Endpunkte* des Kreisbogens  $\frown ABC$ . Ein Strahl  $\overrightarrow{AX}$  heißt *Tangentenstrahl an  $\frown ABC$  in  $A$* , falls die Gerade  $(AX)$  eine Tangente an  $K$  ist und die Punkte  $X, B$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(AC)$  liegen. Im Fall  $\frown AB\infty$  oder  $\frown A\infty B$  definiere den Tangentenstrahl in  $A$  durch  $\overrightarrow{AB}$  bzw.  $\overrightarrow{AB'}$  mit  $B'$  so dass  $A$  zwischen  $B$  und  $B'$  liegt. Gegeben seien zwei Kreisbögen

$k = \frown OAP$  und  $\ell = \frown OBQ$  mit einem gemeinsamen Endpunkt  $O$  sowie möglicherweise  $P = \infty$  oder  $Q = \infty$ . Wir definieren das *Winkelmaß* von  $(k, \ell)$  durch

$$\overline{\angle(k, \ell)} := \overline{\angle XOY}, \quad (3.3)$$

wobei  $\underline{OX}$  und  $\underline{OY}$  Tangentialstrahlen an  $k$  bzw.  $\ell$  in  $O$  sind.

**Übung 3.51.** Gegeben sei ein Kreis  $K = K(M, r)$  und verschiedene Punkte  $A, B, C \in K$ . Zeigen Sie:

- (i) Der Kreisbogen  $\frown ABC$  ist die Menge aller Punkte  $Q$  mit  $Q = A$ ,  $Q = C$  oder  $Q \in K$ , so dass  $Q$  und  $B$  auf der gleichen Seite bezüglich der Geraden  $(AC)$  liegen.
- (ii) Der Tangentialstrahl  $\underline{AX}$  zum Kreisbogen  $\frown ABC$  ist durch  $A$ ,  $B$  und  $C$  eindeutig bestimmt.
- (iii) Im Kreis  $K$  gibt es genau zwei Kreisbögen mit Endpunkten  $A$  und  $C$ .

### Poincaré Halbebene

Wir haben nun alle Instrumente beisammen um ein Modell der hyperbolischen Geometrie genau zu beschreiben. Wir definieren die *Poincaré Halbebene*

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Die Punkte von  $\mathbb{H}$  nennen wir auch *h-Punkte*. Der Durchschnitt von  $\mathbb{H}$  und Kreisen oder Geraden im kartesischen Modell 2.1, welche die  $x$ -Achse senkrecht schneiden heißen *h-Geraden*. Die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse heißen *ideale Punkte*. Mit anderen Worten, *h-Geraden* sind Teilmengen der Form

$$h_{a,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - a)^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{oder} \quad h_c = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = c\},$$

für reelle Konstanten  $a, c \in \mathbb{R}$  und  $r > 0$  und die idealen Punkte sind  $(a \pm r, 0)$  im ersten Fall und  $(c, 0)$  im zweiten Fall. Für die *h-Gerade* von Typ  $h_c$  sagen wir zusätzlich, dass  $(c, 0)$  und  $\infty$  ideale Punkte sind. Für vier Punkte  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  definieren wir das *Doppelverhältniss*

$$(A, B; C, D) := \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}, \quad (3.4)$$

wobei hier  $AC = d(A, C)$ ,  $BC = d(B, C)$  usw. den euklidischen Abstand bezeichnet. Wir erlauben auch  $\infty$  für die Punkte  $A, B, C$  oder  $D$  indem wir die beiden Abstände welche mit dem entsprechenden Punkt in der Definition weglassen, etwa

$$(A, B; C, \infty) = \frac{AC}{BC}.$$

**Übung 3.52.** Für zwei verschiedene *h-Punkte*  $A$  und  $B$  gibt es eine eindeutige *h-Gerade* durch  $A$  und  $B$ . Wir bezeichnen diese mit  $(AB)_h$ .

Sei  $(AB)_h$  eine  $h$ -Gerade mit idealen Punkten  $X$  und  $Y$  wobei wir diese so bezeichnen, dass die Punkte  $X, A, B, Y$  in dieser Reihenfolge auf dem Kreis bzw. der Geraden liegen, d.h.  $X \notin \frown ABY$  und  $Y \notin \frown BAX$ . Wir definieren

- die  $h$ -Strahlen  $\underline{AB}_h := \frown ABY \setminus \{Y\}$  mit idealem Punkt  $Y$  und  $\underline{BA}_h := \frown BAX \setminus \{X\}$  mit idealem Punkt  $X$ .
- die  $h$ -Strecke  $AB_h := \underline{AB}_h \cap \underline{BA}_h$ .
- den  $h$ -Abstand  $d_h(A, B) := \ln(A, B; Y, X)$  mit  $d_h(A, A) = 0$ .
- für zwei  $h$ -Strahlen  $\underline{OA}_h$  und  $\underline{OB}_h$  mit idealen Punkten  $X$  bzw.  $Y$  definiere das *Winkelmaß* durch

$$\overline{\angle_h AOB} := \overline{\angle(k, \ell)},$$

mit Kreisbögen  $h := \frown OAX$  und  $\ell := \frown OBY$ .

*Bemerkung.* Wir werden zeigen, dass  $(\mathbb{H}, d_h, \angle_h)$  ein Modell einer absoluten Ebene ist und dass die  $h$ -Geraden,  $h$ -Strahlen und  $h$ -Strecken genau den Geraden, Strahlen und Strecken bezüglich  $d_h$  im Sinne der Definitionen 2.9 und 2.11 entsprechen.

### Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Unter einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal verstehen wir die Beschreibung eines Algorithmus welcher aus gegebenen geometrischen Objekten (Punkten, Kreis, Geraden, usw. ) bestimmte gesuchte geometrische Objekte liefert, wobei in der Regel nur ein idealer Zirkel und ein ideales Lineal verwendet werden darf. Das ideale Lineal hat keine Markierungen. Es können damit also keine Messungen vorgenommen, sondern nur Geraden durch zwei gegebene Punkte gezeichnet werden. Der ideale Zirkel kann nur Kreise mit gegebenem Mittelpunkt und Radius zeichnen, d.h. für gegebene Punkte  $M, A$  und  $B$  mit  $A \neq B$ , können wir nur den Kreis  $K(M, r)$  mit  $r = \overline{AB}$  zeichnen. Wir können auch Punkte auf der Ebene oder bereits konstruierten Geraden, Kreisen, usw. und deren Schnitten wählen (vorausgesetzt natürlich, dass diese Schnittpunkte existieren). Es gibt natürlich auch Varianten von Konstruktionsaufgaben, bei denen weitere Werkzeuge erlaubt sind, etwa ein Werkzeug, das einen gegebenen Winkel in drei gleich große Winkel teilt. Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe besteht aus folgenden Teilen.

- *Konstruktionsbeschreibung:* Das ist eine Liste von erlaubten Schritten. Hierbei können auch bereits bekannte Konstruktionen, etwa der Konstruktion der Mittelsenkrechten, verwendet werden. Im letzten Schritt muss erklärt werden, welche der konstruierten Objekte den gesuchten Objekten entspricht.
- *Begründung der Durchführbarkeit:* Es wird bewiesen, weshalb die in der Konstruktionsbeschreibung gewählten Schnittpunkte tatsächlich existieren.
- *Begründung der Korrektheit:* Es wird bewiesen, weshalb die Konstruktionsbeschreibung tatsächlich die gesuchten Objekte liefert.

- *Analyse der Eindeutigkeit:* Es wird bewiesen, wie viele verschiedene oder bist auf Kongruenz verschiedene gesuchte Objekte es gibt. Dieser Teil wird nicht erwartet, wenn nicht explizit danach gefragt ist.

Als erstes Beispiel geben wir die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer gegebenen Strecke  $AB$ .

- **Konstruktion:**
  - (1) konstruiere den Kreis  $K_1 := K(A, r)$  mit  $r = \overline{AB}$ ,
  - (2) konstruiere den Kreis  $K_2 := K(B, r)$ ,
  - (3) bezeichne mit  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte von  $K_1$  und  $K_2$  und
  - (4) konstruiere die Gerade  $m := (PQ)$ . Dies ist die gesuchte Mittelsenkrechte.
- **Durchführbarkeit:** Da  $0 < r < r + r$  folgt nach Satz 3.47, dass sich die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  sich in genau zwei Punkten schneiden.
- **Korrektheit:** Da  $\overline{PA} = \overline{PB}$  und  $\overline{QA} = \overline{QB}$  liegen nach Satz 3.31 die Punkte  $P$  und  $Q$  auf der Mittelsenkrechte von  $AB$  und damit ist  $m = (PQ)$  die gesuchte Mittelsenkrechte.

### 3.6 Isometrien

Wir möchten die Menge der Isometrien verstehen. Isometrien wurden bereits in Definition 2.6 für allgemeine metrische Räume eingeführt. Wir wiederholen hier kurz die Definition. Eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  heißt *Isometrie*, wenn sie abstandserhaltend, d.h. es gilt

$$d(A, B) = d(\Phi(A), \Phi(B)),$$

für alle  $A, B \in \mathcal{E}$  und bijektiv ist. Wir bezeichnen mit

$$\text{Isom}(\mathcal{E}) := \{\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \mid \Phi \text{ ist eine Isometrie}\},$$

die Menge der Isometrien. Diese Menge trägt die Struktur einer Gruppe bezüglich der Gruppenoperation gegeben durch Verknüpfung von Abbildungen. Zur Erinnerung geben wir hier die Definition einer Gruppe.

**Definition 3.53** (Gruppe). Ein Paar  $(G, \cdot)$  aus einer Menge  $G$  und einer Abbildung

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh,$$

der *Gruppenoperation*, heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (i) (*Assoziativität*) Es gilt  $(gh)k = g(hk)$  für alle  $g, h, k \in G$ .
- (ii) (*neutrales Element*) Es gibt ein  $e \in G$ , so dass  $eg = ge = g$  für alle  $g \in G$ .
- (iii) (*inverses Element*) Für alle  $g \in G$  gibt es ein  $g^{-1} \in G$ , so dass  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ .

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn zusätzlich gilt  $gh = hg$  für alle  $g, h \in G$ . Eine Teilmenge  $H \subset G$  heißt *Untergruppe*, wenn  $gh \in H$  und  $g^{-1} \in H$  für alle  $g, h \in H$ .

Beispiele von Gruppen sind etwa die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der Addition oder  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit der Multiplikation, aber auch die Menge der Restklassen  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  bezüglich einer natürlichen Zahl  $n \geq 2$  mit Addition oder die Symmetrische Gruppe

$$\Sigma_n := \{\Phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \Phi \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Verknüpfung von Abbildungen. Man kann zeigen, dass die Gruppe  $\Sigma_n$  für  $n \geq 3$  nicht abelsch ist. Wir geben eine Liste von Isometrien der Ebene.

**Satz 3.54.** *Die folgenden Abbildungen sind Isometrien.*

(i) *Sei  $g$  eine Gerade. Die Geradenspiegelung  $\sigma_g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $P \mapsto P'$  ist definiert durch  $P' = P$  falls  $P \in g$  und falls  $P \notin g$  durch*

- *der Punkt  $P'$  liegt auf dem Lot von  $P$  auf  $g$ ,*
- *es gilt  $FP \cong FP'$ , wobei  $F$  der entsprechende Lotfußpunkt ist und*
- *der  $P'$  liegt auf der anderen Seite als  $P$  bezüglich  $g$ .*

*Mit anderen Worten  $P'$  ist eindeutig dadurch bestimmt, dass  $g$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $PP'$  ist.*

(ii) *Sei  $Z$  ein Punkt und  $\alpha \in (-\pi, \pi]$ . Die Drehung  $\Phi_{Z,\alpha} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $P \mapsto P'$  ist definiert durch  $P' = Z$  falls  $P = Z$  und falls  $P \neq Z$  durch*

- *$ZP \cong ZP'$  und*
- *$\overline{\angle PZP'} = \alpha$ .*

*Der Punkt  $Z$  heißt Drehzentrum und  $\alpha$  ist der Drehwinkel. Im Fall  $\alpha = \pi$  nennen wir die Drehung  $\Phi_Z = \Phi_{Z,\pi}$  auch Punktspiegelung.*

(iii) *Seien  $A$  und  $B$  Punkte mit  $A \neq B$ . Die Translation  $\Phi_{\overrightarrow{AB}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $P \mapsto P'$  ist definiert durch folgende Bedingungen.*

- *Falls  $P \in (AB)$  ist  $P' \in (AB)$  und es gilt*

$$\Psi(P') = \Psi(P) + \Psi(B) - \Psi(A), \tag{3.5}$$

*bezüglich einer Isometrie  $\Psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

- *Falls  $P \notin (AB)$  gilt  $AP \cong A'P'$  und  $\overline{\angle BAP} = \overline{\angle B'A'P'}$  wobei  $A' = \Phi_{\overrightarrow{AB}}(A)$  und  $B' = \Phi_{\overrightarrow{AB}}(B)$ .*

(iv) *Seien  $A$  und  $B$  Punkte mit  $A \neq B$ . Die Gleitspiegelung ist definiert als Verknüpfung  $\Phi_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_g$  mit  $g = (AB)$ .*

Bevor wir diesen Satz beweisen können brauchen wir noch ein Lemma. Dieses Lemma ist nicht trivial, wie man am Beispiel  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto 2n$  mit diskretem Abstand auf  $\mathbb{N}$  sieht.

**Lemma 3.55.** Sei  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  eine abstandserhaltende Abbildung, dann ist  $\Phi$  eine Isometrie.

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, dass jede abstandserhaltende Abbildung injektiv ist. Wir müssen noch zeigen, dass  $\Phi$  auch surjektiv ist. Sei dazu  $P \in \mathcal{E}$  beliebig gegeben. Wir suchen ein  $A$ , so dass  $\Phi(A) = P$ . Wähle weitere Punkte  $B, C \in \mathcal{E}$  und setze  $Q := \Phi(B)$ ,  $R := \Phi(C)$  sowie  $r := d(Q, P)$  und  $s := d(R, P)$ . Ohne Einschränkung gilt  $r, s > 0$  sonst wurde  $A$  gefunden. Da sich die Kreise  $K' = K(Q, r)$  und  $L' = K(R, s)$  im Punkt  $P$  schneiden und da  $\Phi$  abstandserhaltend ist, gilt nach Satz 3.47

$$|r - s| \leq d(Q, R) = d(B, C) \leq r + s,$$

sowie dass  $\Phi$  die Kreise  $K = K(B, r)$  und  $L = K(C, s)$  auf die Kreise  $K'$  bzw.  $L'$  abbildet. Nach Satz 3.47 haben  $K \cap L$  und  $K' \cap L'$  die gleiche Anzahl von Elementen. Die eingeschränkte Abbildung  $\Phi|_{K \cap L} : K \cap L \rightarrow K' \cap L'$  ist injektiv zwischen endlichen Mengen mit gleicher Anzahl an Elementen wovon  $P \in K' \cap L'$  ein Element ist. Insbesondere muss es einen Punkt  $A \in K \cap L$  geben, so dass  $\Phi(A) = P$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.54.* Nach dem letzten Lemma reicht es zu zeigen, dass die Abbildungen abstandserhaltend sind. Gegeben Punkte  $P, Q \in \mathcal{E}$ . Wir zeigen für jede Abbildung  $\Phi$  einzeln, dass  $PQ \cong P'Q'$  wobei  $P' = \Phi(P)$  und  $Q' = \Phi(Q)$ .

- (i) Fall  $\Phi = \sigma_g$ . Sei  $g = (AB)$  wobei ohne Einschränkung  $A, B \neq P, Q$ . Wir zeigen zunächst

$$AP \cong AP' \quad \text{und} \quad \overline{\angle BAP'} \equiv -\overline{\angle BAP}. \quad (3.6)$$

Falls  $P \in g$ , dann folgt  $P = P'$  und die Punkte  $A, B, P = P'$  sind kollinear. Somit folgt (3.6) mit den Sätzen 3.4 und 3.6. Falls  $P \notin g$ , dann ist  $P \neq P'$  und  $(AB)$  die Mittelsenkrechte von  $PP'$ . Damit gilt mit der Eigenschaft der Mittelsenkrechten (siehe Satz 3.31)  $AP \cong AP'$ ,  $BP \cong BP'$  und mit (SSS) auch  $\triangle ABP \cong \triangle ABP'$ . Es gilt also  $AP \cong AP'$  und  $\angle ABP' \cong \angle ABP$ . Da nun  $P$  und  $P'$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $(AB)$  liegen folgt (3.6) mit Korollar 3.19. Wir zeigen auch 3.6 wobei  $P$  durch  $Q$  ersetzt ist. Es gilt also zusammen

$$\begin{array}{ll} \overline{\angle BAP'} \equiv \overline{\angle BAP} & \overline{\angle BAQ'} \equiv \overline{\angle BAQ} \\ AP' \cong AP & AQ' \cong AQ. \end{array}$$

Mit Axiom (III) schließen wir

$$\overline{\angle P'AQ'} \equiv \overline{\angle P'AB} + \overline{\angle BAQ'} \equiv -\overline{\angle PAB} - \overline{\angle BAQ} \equiv -\overline{\angle PAQ}$$

und mit (SWS) folgt  $\triangle P'AQ' \cong \triangle PAQ$ . Also gilt  $PQ \cong P'Q'$  wie gewünscht.

- (ii) Fall  $\Phi = \Phi_{Z,\alpha}$ . Falls  $P = Z$  oder  $Q = Z$  folgt nach Definition  $PQ \cong P'Q'$ . Wir nehmen also an, dass  $P, Q \neq Z$ . Es gilt mit Axiom (III)

$$\overline{\angle P'ZQ'} \equiv \overline{\angle P'ZP} + \overline{\angle PZQ} + \overline{\angle QZQ'} = -\alpha + \overline{\angle PZQ} + \alpha = \overline{\angle PZQ}.$$

Somit folgt mit (SWS), dass  $\triangle P'ZQ' \cong \triangle PZQ$  und insbesondere  $PQ \cong P'Q'$  wie gewünscht.

(iii) Fall  $\Phi = \Phi_{\overrightarrow{AB}}$ . Übung.

(iv) Fall  $\Phi = \Phi_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_{(AB)}$  folgt aus (i) und (iii).

□

**Definition 3.56.** Sei  $\Phi$  eine Isometrie von  $\mathcal{E}$ . Ein Punkt  $P$  heißt *Fixpunkt* wenn  $\Phi(P) = P$ . Wir bezeichnen mit

$$\text{Fix}(\Phi) := \{P \in \mathcal{E} \mid \Phi(P) = P\}$$

die Menge der Fixpunkte von  $\Phi$ .

**Satz 3.57.** Gegeben eine Isometrie  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  und drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$ . Wenn  $A, B, C \in \text{Fix}(\Phi)$ , dann ist  $\Phi$  die Identität.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz indirekt. Angenommen  $\Phi$  ist nicht die Identität. Dann gibt es einen Punkt  $P$ , so dass  $P' = \Phi(P) \neq P$ . Da  $\Phi$  abstandserhaltend ist und  $A, B, C \in \text{Fix}(\Phi)$  gilt  $d(P, A) = d(P', A)$ ,  $d(P, B) = d(P', B)$  und  $d(P, C) = d(P', C)$ . Mit der Eigenschaft der Mittelsenkrechten (siehe Satz 3.31) folgern wir, dass  $A, B$  und  $C$  auf der Mittelsenkrechten von  $PP'$  liegen. Somit sind  $A, B$  und  $C$  kollinear im Widerspruch zur Voraussetzung. □

**Korollar 3.58.** Jede Isometrie  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ist Verknüpfung von maximal drei Geraden-spiegelungen.

*Beweis.* Fixiere nicht kollineare Punkte  $A, B$  und  $C$ . Wir konstruieren bis zu drei Geraden durch folgenden Algorithmus.

- *Schritt 1:* Wenn  $\Phi(A) = A$ , dann setze  $\Phi_1 := \Phi$ . Wenn  $\Phi(A) \neq A$ , dann sei  $g$  die Mittelsenkrechte von  $A\Phi(A)$  und setze  $\Phi_1 := \sigma_g \circ \Phi$ . Dann gilt  $\Phi_1(A) = \sigma_g(\Phi(A)) = A$ . Setze in jedem Fall  $B_1 := \Phi_1(B)$  und  $C_1 := \Phi_1(C)$ . Zusammengefasst gilt

$$A = \Phi_1(A), \quad B_1 = \Phi_1(B) \quad \text{und} \quad C_1 = \Phi_1(C).$$

- *Schritt 2:* Wenn  $B = B_1$ , dann setze  $\Phi_2 = \Phi_1$ . Wenn  $B \neq B_1$ , dann sei  $h$  die Mittelsenkrechte von  $BB_1$  und setze  $\Phi_2 := \sigma_h \circ \Phi_1$ . Da  $\Phi_1(A) = A$  gilt  $A \in h$ . Setze  $C_2 := \Phi_2(C)$ . Zusammengefasst gilt

$$A = \Phi_2(A), \quad B = \Phi_2(B) = \sigma_h(B_1) = B \quad \text{und} \quad C_2 = \Phi_2(C).$$

- *Schritt 3:* Wenn  $C = C_2$ , dann setze  $\Phi_3 = \Phi_2$ . Wenn  $C \neq C_2$  dann sei  $k$  die Mittelsenkrechte von  $CC_2$  und setze  $\Phi_3 := \sigma_k \circ \Phi_2$ . Da  $A = \Phi_2(A)$  und  $B = \Phi_2(B)$  gilt  $A, B \in k$ . Somit folgern wir

$$A = \Phi_3(A) = \sigma_k(A) = A, \quad B = \Phi_3(B) = \sigma_k(B) = B \quad \text{und} \quad C = \Phi_3(C).$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Satz 3.57, dass

$$\Phi_3 = \sigma_k \circ \sigma_h \circ \sigma_g \circ \Phi,$$

die Identität ist, wobei wir die Geradenspiegelung weglassen, wenn die entsprechende Gerade im Algorithmus nicht definiert wurde. Da Geradenspiegelungen zu sich selbst invers sind folgern wir  $\Phi = \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k$ , wobei wir wieder die Geradenspiegelung weglassen, wenn die entsprechende Gerade im Algorithmus nicht definiert wurde.  $\square$

**Korollar 3.59.** *Falls  $\Phi$  mindestens einen Fixpunkt hat, dann ist  $\Phi$  die Verknüpfung von maximal zwei Geradenspiegelungen und falls  $\Phi$  mindestens zwei Fixpunkte  $A$  und  $B$  hat, dann ist  $\Phi$  entweder die Geradenspiegelung  $\sigma_g$  mit  $g = (AB)$  oder die Identität.*

*Beweis.* Wähle als  $A$  bzw.  $A$  und  $B$  die Fixpunkte im Beweis von Korollar 3.58.  $\square$

**Korollar 3.60.** *Wenn zwei Isometrien auf drei nicht kollinearen Punkten übereinstimmen, so sind sie gleich.*

*Beweis.* Geben Isometrien  $\Phi, \Psi$  mit nicht kollinearen Punkten  $A, B$  und  $C$ , so dass  $\Phi(A) = \Psi(A)$ ,  $\Phi(B) = \Psi(B)$  und  $\Phi(C) = \Psi(C)$ . Dann hat die Verknüpfung  $\Psi^{-1} \circ \Phi$  Fixpunkte bei  $A, B$  und  $C$ . Somit ist  $\Psi^{-1} \circ \Phi$  die Identität und es gilt  $\Phi = \Psi$ .  $\square$

**Lemma 3.61.** (i) *Für jede Geradenspiegelung  $\sigma_g$  gilt  $\sigma_g \circ \sigma_g = \text{id}$ .*

(ii) *Die Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen ist keine Geradenspiegelung.*

(iii) *Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $s$  mit  $s \perp g$ . Dann gilt  $\sigma_g(s) = s$  und  $\sigma_g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  für jede Halbebene  $\mathcal{H}$  bezüglich  $s$ .*

(iv) *Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $h$ . Dann gilt für die Verknüpfung  $\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_k$  wobei  $k = \sigma_g(h)$ .*

*Beweis.* Zu (i). Wenn  $P \in g$  so folgt  $\sigma_g(\sigma_g(P)) = \sigma_g(P) = P$ . Falls  $P \notin g$ , dann setze  $P' = \sigma_g(P)$ . Nach Definition der Geradenspiegelung ist  $P \neq P'$  und  $P'$  ist eindeutig dadurch bestimmt, dass  $g$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $PP'$  ist. Nach erneuter Anwendung der Definition gilt  $\sigma_g(P') = P$ , also  $\sigma_g(\sigma_g(P)) = \sigma_g(P') = P$ .

Zu (ii). Mit Widerspruch nehmen wir an, dass es Geraden  $g, h$  und  $k$  gibt mit  $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_k$ . Wenn  $h = g$  dann folgt mit Punkt (i), dass  $\sigma_k = \sigma_g \circ \sigma_g = \text{id}$ , was unmöglich ist. Sei also  $g \neq h$  und wähle einen Punkt  $P \in k$  mit  $P \notin g \cap h$ . Wir rechnen

$$\sigma_g(\sigma_h(P)) = \sigma_k(P) = P \quad \Rightarrow \quad \sigma_h(P) = \sigma_g(P) =: P'.$$

Da  $P \notin g \cap h$  ist  $P \neq P'$  und nach Definition der Geradenspiegelung ist sowohl  $g$  als auch  $h$  die Mittelsenkrechte von  $PP'$ . Nach Eindeutigkeit dieser gilt  $g = h$  im Widerspruch zur Annahme, dass  $h \neq g$ .

Zu (iii). Sei  $P \notin g$  und setze  $P' = \sigma_g(P)$ . Nach Definition ist die Gerade  $(PP')$  das Lot von  $P$  auf  $g$ . Falls  $P \in s$  gilt  $(PP') = s$  nach Eindeutigkeit des Lots, da auch  $s \perp g$ . Insbesondere  $P' \in s$ . Falls  $P \notin s$  gilt  $(PP') \cap s = \emptyset$ , denn wenn es einen Punkt  $Q \in \ell \cap s$

gibt, hätte der Punkt  $Q$  zwei Lote auf  $g$ . Insbesondere  $PP' \cap s = \emptyset$  und somit liegen  $P$  und  $P'$  auf der gleichen Halbebene nach Korollar 3.19.

Zu (iv). Setze  $\Phi := \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ . Sei  $P \in k = \sigma_g(h)$ . Damit gilt mit (i), dass  $P' = \sigma_g(P) \in h$  und  $\Phi(P) = \sigma_g(\sigma_h(P')) = \sigma_g(P') = P$ . Nach Korollar 3.59 ist  $\Phi$  entweder die Identität oder  $\sigma_k$ . Wenn  $\Phi = \text{id}$  folgt  $\sigma_h = \text{id}$  im Widerspruch zu  $\text{Fix}(\sigma_h) = h$ . Damit gilt  $\Phi = \sigma_k$  wie gewünscht.  $\square$

**Satz 3.62.** Gegeben seien Geraden  $g, h$  und  $k$ .

(i) Angenommen es gibt einen Punkt  $Z$  mit  $g \cap h \cap k = \{Z\}$ , dann gibt es eine Gerade  $\ell$  mit  $Z \in \ell$  und es gilt

$$\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_\ell.$$

(ii) Angenommen es gibt eine Gerade  $s$ , so dass  $g, h$  und  $k$  senkrecht auf  $s$  stehen, dann gibt es eine weitere Gerade  $\ell$  mit  $\ell \perp s$  und es gilt

$$\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_\ell.$$

*Beweis.* Zu (i). Setze  $\Phi := \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k$ . Wähle  $P \in k$  mit  $P \neq Z$  und setze  $P' := \Phi(P)$ . Wenn  $P = P'$ , dann definiere  $\ell := (ZP)$ . Wenn  $P \neq P'$ , dann definiere  $\ell$  als Mittelsenkrechte von  $PP'$ . Da  $Z \in g \cap h \cap k$  nach Voraussetzung, folgt  $\Phi(Z) = Z$  und somit  $d(Z, P) = d(Z, P')$ . Mit der Eigenschaft der Mittelsenkrechten 3.31 schließen wir, dass  $Z \in \ell$  in diesem Fall. Für die Verknüpfung  $\Psi := \sigma_\ell \circ \Phi$  gilt

$$\Psi(Z) = \sigma_\ell(\Phi(Z)) = \sigma_\ell(Z) = Z, \quad \Psi(P) = \sigma_\ell(\Phi(P)) = \sigma_\ell(P') = P.$$

Somit ist nach Korollar 3.59 die Abbildung  $\Psi$  entweder die Identität oder die Geraden Spiegelung an der Geraden  $(ZP) = k$ . Angenommen  $\Psi = \sigma_k$ , dann gilt nach Einsetzen der Definition

$$\sigma_\ell \circ \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_k \quad \Rightarrow \quad \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_\ell.$$

Das steht im Widerspruch zu Punkt (ii) von Lemma 3.61. Es muss also gelten, dass  $\Psi$  die Identität ist. Damit gilt nach Einsetzen der Definition

$$\sigma_\ell \circ \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \text{id} \quad \Rightarrow \quad \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_\ell.$$

Damit wurde der Punkt (i) gezeigt.

Zu (ii). Dies ist eine Hausaufgabe.  $\square$

## Drehungen

Drehungen sind genau die Isometrien mit nur einem Fixpunkt. Auch sind Drehungen eindeutig dadurch charakterisiert, dass sie sich als Verknüpfung von zwei Geraden Spiegelungen an Geraden mit genau einem Schittpunkt schreiben lassen. Hierbei kann eine der beiden Geraden frei gewählt werden, solange sie durch den Fixpunkt verläuft.

**Satz 3.63.** Sei  $\Phi$  eine Isometrie und  $Z$  ein Punkt. Dann ist äquivalent

(i) Es gilt  $\Phi = \Phi_{Z,\alpha}$  für ein  $\alpha \neq 0$ .

(ii) Es gilt  $\text{Fix}(\Phi) = \{Z\}$ .

(iii) Es gibt Geraden  $g, h$  mit  $g \cap h = \{Z\}$  und es gilt  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g$ .

(iv) Für jede Gerade  $g$  mit  $Z \in g$  gibt es Geraden  $h, k$  mit  $g \cap h = g \cap k = \{Z\}$  und es gilt  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_k$ .

*Beweis.* Der Schritt (i)  $\Rightarrow$  (ii) ist offensichtlich nach der Definition.

Wir zeigen (ii)  $\Rightarrow$  (iv). Sei  $P \in g$  mit  $P \neq Z$  und setze  $P' := \Phi(P)$ . Es gilt  $P \neq P'$  nach Voraussetzung. Definiere  $h$  als die Mittelsenkrechte von  $PP'$ . Da  $\Phi$  abstandserhaltend ist, gilt  $d(Z, P) = d(Z, P')$  und somit  $Z \in h$  nach der Eigenschaft der Mittelsenkrechten (siehe Satz 3.31). Für die Verknüpfung  $\Psi := \Phi^{-1} \circ \sigma_h \circ \sigma_g$  gilt

$$\begin{aligned}\Psi(Z) &= \Phi^{-1}(\sigma_h(\sigma_g(Z)))\Phi^{-1}(\sigma_h(Z)) = \Phi^{-1}(Z) = Z \\ \Psi(P) &= \Phi^{-1}(\sigma_h(\sigma_g(P))) = \Phi^{-1}(\sigma_h(P)) = \Phi^{-1}(P') = P.\end{aligned}$$

Damit ist mit Korollar 3.59 die Abbildung  $\Psi$  entweder die Identität oder die Geradenspiegelung an der Geraden  $(ZP) = g$ . Angenommen  $\Psi = \sigma_g$ , dann gilt nach Einsetzen der Definition

$$\Phi^{-1} \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_g \quad \Rightarrow \quad \Phi = \sigma_h.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $\text{Fix}(\Phi) = \{Z\}$ . Es muss also gelten, dass  $\Psi$  die Identität ist. Daraus folgt  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g$  wie gewünscht. Die zweite Gerade  $k$  erhalten wir durch  $k := \sigma_g(h)$ . Mit Lemma 3.61 folgt  $\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_k$  und somit  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_k$ .

Der Schritt (iv)  $\Rightarrow$  (iii) ist trivial. Wir zeigen (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Sei per Widerspruch  $P \neq Z$  ein weiterer Fixpunkt von  $\Phi$ . Dann folgt  $P = \Phi(P) = \sigma_h(\sigma_g(P))$  und somit  $\sigma_h(P) = \sigma_g(P) =: P'$ . Wenn  $P = P'$ , dann ist  $P \in g \cap h$ , also  $P = Z$  im Widerspruch zur Annahme. Wenn  $P \neq P'$ , dann ist sowohl  $g$  als auch  $h$  die Mittelsenkrechte von  $PP'$ , also  $g = h$  nach Eindeutigkeit. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung  $g \cap h = \{Z\}$ . Damit wurde (ii) gezeigt.

Schließlich zeigen wir (iv)  $\Rightarrow$  (i). Sei  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g$  und wähle  $P \in g$  mit  $P \neq Z$ . Setze  $\alpha := \overline{\angle PZP'}$  mit  $P' = \Phi(P)$ . Dann gilt für die Verknüpfung  $\Psi := \Phi_{Z,\alpha}^{-1} \circ \Phi$  wieder  $\Psi(Z) = Z$  und  $\Psi(P) = \Phi_{Z,\alpha}^{-1}(P') = P$ . Somit ist  $\Psi$  nach Korollar 3.59 entweder die Identität oder die Geradenspiegelung an der Geraden  $(ZP) = g$ . Angenommen  $\Psi = \sigma_g$ , dann folgt

$$\Phi_{Z,\alpha}^{-1} \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_g \quad \Rightarrow \quad \Phi_{Z,\alpha} = \sigma_h,$$

im Widerspruch zu  $\text{Fix}(\Phi_{Z,\alpha}) = \{Z\}$ . Es muss also gelten, dass  $\Psi$  die Identität ist und somit  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g = \Phi_{Z,\alpha}$ .  $\square$

## Translationen

Translationen sind genau die Isometrien welche eine Gerade und beide Halbebenen erhalten. Auch sind Translationen eindeutig dadurch charakterisiert, dass sie sich als Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen an Geraden mit einer gemeinsamen Senkrech-

ten schreiben lassen. Hierbei kann wieder eine der beiden Geraden frei gewählt werden solange sie senkrecht zu der Geraden verläuft die erhalten bleibt.

**Satz 3.64.** *Sei  $\Phi$  eine Isometrie und  $s$  eine Gerade. Dann ist äquivalent.*

- (i) *Es gilt  $\Phi = \Phi_{\overrightarrow{AB}}$  mit verschiedenen Punkten  $A, B \in s$ .*
- (ii) *Die Isometrie  $\Phi$  hat keine Fixpunkte,  $\Phi(s) = s$  und  $\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  für jede Halbebene  $\mathcal{H}$  von  $s$ .*
- (iii) *Es gibt Geraden  $g$  und  $h$  so dass  $g, h \perp s$  und es gilt  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g$ .*
- (iv) *Für jede Gerade  $g$  mit  $g \perp s$  gibt es Gerade  $k, h$  mit  $h, k \perp s$  und es gilt  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_k$ .*

*Beweis.* Wir zeigen (i)  $\Rightarrow$  (ii). Per Definition gilt  $\Phi(s) = s$ . Angenommen per Widerspruch sei  $P$  Fixpunkt von  $\Phi$ . Falls  $P \in s$ , dann gilt nach (3.5) für eine Isometrie  $\Psi : s \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Psi(P) = \Psi(B) - \Psi(A) + \Psi(P),$$

damit  $\Psi(A) = \Psi(B)$  und somit  $A = B$  im Widerspruch zur Tatsache, dass  $A \neq B$ . Falls  $P \notin s$ , sei  $F$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $s$  und setze  $F' := \Phi(F)$ . Dann sind sowohl  $(PF)$  als auch  $(PF')$  zwei Lote von  $P$  auf  $s$  im Widerspruch zur Eindeutigkeit des Lots 3.33. Damit haben wir gezeigt, dass  $\Phi$  keine Fixpunkte haben kann. Wir zeigen nun, dass  $\Phi$  beide Halbebenen erhält. Sei  $Q \notin s$ . Nach Definition gilt  $\overline{\angle A'B'Q'} = \overline{\angle ABQ}$  mit  $A' = \Phi(A)$ ,  $B' = \Phi(B)$  und  $Q' = \Phi(Q)$ . Eine direkte Konsequenz der Definition ist auch  $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$ . Somit folgt mit Lemma 3.16, dass  $\angle ABQ$ ,  $\angle A'B'Q'$  und  $\angle ABQ'$  das gleiche Vorzeichen haben. Damit nach Korollar 3.19 liegen  $Q$  und  $Q'$  auf der gleichen Halbebene bezüglich  $s$ .

Wir zeigen (ii)  $\Rightarrow$  (iv). Sei  $F$  der Schnittpunkt  $g \cap s$  und wähle einen weiteren Punkt  $P \in g$  mit  $F \neq P$ . Setze  $F' := \Phi(F) \neq F$ ,  $h$  die Mittelsenkrechte von  $FF'$  sowie  $\Psi := \Phi^{-1} \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ . Nach Konstruktion gilt  $\Psi(F) = F$ . Nach Lemma 3.61 und (ii) gilt außerdem für  $P' = \Psi(P)$  dass  $P'$  und  $P$  auf der gleichen Halbebene bezüglich  $s$  liegen,  $FP \cong FP'$  und aus  $FP \perp s$  folgt  $FP' \perp s$ . Wir folgern, dass  $P' = P$ . Also hat  $\Psi$  zwei Fixpunkte in  $F$  und  $P$ . Analog zum Beweis von Satz 3.63 folgern wir  $\Psi = \text{id}$  und somit (iv)

Die Richtung (iv)  $\Rightarrow$  (iii) ist trivial. Wir müssen noch (iii)  $\Rightarrow$  (i) zeigen. Sei nun  $\Phi = \sigma_h \circ \sigma_g$  mit  $g, h \perp s$  gegeben. Sei  $\Psi : s \rightarrow \mathbb{R}$  eine Isometrie. Nach Lemma 3.61 ist  $\sigma_g(s) = \sigma_h(s) = s$ . Seien  $G$  und  $H$  die Schnittpunkte  $g \cap s$  bzw.  $h \cap s$ . Man sieht leicht, dass für  $P \in s$  gilt

$$\Psi(\sigma_g(P)) = 2\Psi(G) - \Psi(P), \quad \Psi(\sigma_h(P)) = 2\Psi(H) - \Psi(P).$$

Damit folgt

$$\Psi(\Phi(P)) = \Psi(\sigma_h(\sigma_g(P))) = 2\Psi(H) - \Psi(\sigma_g(P)) = 2\Psi(H) - 2\Psi(G) + \Psi(P).$$

Damit folgt (3.5) mit  $A = \Psi^{-1}(2\Psi(G))$  und  $B = \Psi^{-1}(2\Psi(H))$ . Da nach Lemma 3.61 auch gilt  $\sigma_g(\mathcal{H}) = \sigma_h(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$  für jede der beiden Halbebenen  $\mathcal{H}$  von  $s$  folgt auch  $\overline{\angle A'B'Q'} = \overline{\angle ABQ}$  für alle  $Q \notin s$  wie gewünscht. Damit haben wir gezeigt, dass  $\Phi$  eine Translation ist.  $\square$

## Orientierungen

Neben der Fixpunktmenge verwende wir Orientierungen um Isometrien genauer voneinander zu unterscheiden.

**Definition 3.65.** Sei  $\Phi$  eine Isometrie und  $\angle AOB$  ein echter Winkel. Wir sagen  $\Phi$  ist *orientierungserhaltend*, wenn  $\overline{\angle AOB} = \overline{\angle A'O'B'}$  für  $A' = \Phi(A)$ ,  $B' = \Phi(B)$  und  $O' = \Phi(O)$ . Im anderen Fall, wenn  $\overline{\angle AOB} = -\overline{\angle A'O'B'}$ , ist  $\Phi$  *orientierungsumkehrend*.

**Satz 3.66.** Die Definition 3.65 ist unabhängig von der Wahl des Winkels.

*Beweis.* Wir verwenden die Notation  $P' := \Phi(P)$  für einen Punkt  $P$ . Gegeben seien zwei Winkel  $\angle A_0O_0B_0$  und  $\angle A_1O_1B_1$  mit gleichen Vorzeichen ohne Einschränkung. Wir müssen zeigen

$$\text{Vz}\angle A'_0O'_0B'_0 = \text{Vz}\angle A'_1O'_1B'_1. \quad (3.7)$$

Dazu betrachten wir einzelne Fälle.

Wenn  $O_0 = O_1$  und  $A_0 = A_1$  gilt  $B_0B_1 \cap (O_0A_0) = \emptyset$  nach Korollar 3.19. Dann auch  $B'_0B'_1 \cap (O'_0A'_0) = B'_0B'_1 \cap (O'_1A'_1) = \emptyset$  und wieder mit Korollar 3.19 gilt (3.7). Analog zeigen wir den Fall  $O_0 = O_1$  und  $B_0 = B_1$  durch Vertauschen der Rollen von  $A$  und  $B$ .

Wenn  $O_0 = O_1$ : Nach Scheitelwinkelsatz 3.10 können wir  $\angle A_0O_0B_0$  mit dem Scheitelwinkel ersetzen ohne das Vorzeichen zu ändern. Ohne Einschränkung liegen also  $A_0$  und  $A_1$  auf der gleichen Seite bezüglich der Geraden  $(O_1B_1)$ . Dann folgt nach dem letzten Schritt

$$\text{Vz}\angle A'_0O'_0B'_0 = \text{Vz}\angle A'_1O'_0B'_0 = \text{Vz}\angle A'_1O'_1B'_1.$$

Wenn  $O_0 \neq O_1$ : Nach Anwenden des letzten Falls nehmen wir an, dass  $A_0 = B_1$ ,  $B_0 = O_1$  und  $A_1 = O_0$  sowie dass  $O_0$ ,  $O_1$  und  $A_0$  nicht kollinear sind. Mit anderen Worten  $\angle A_0O_0B_0$  und  $\angle A_1O_1B_1$  sind die Innenwinkel des echten Dreiecks  $\Delta O_0O_1A_0$ . Damit sind auch  $\angle A'_0O'_0B'_0$  und  $\angle A'_1O'_1B'_1$  die Innenwinkel des echten Dreiecks  $\Delta O'_0O'_1A'_0$  und (3.7) folgt aus dem Lemma 3.17.  $\square$

**Satz 3.67.** Geradenspiegelungen und Gleitspiegelungen sind orientierungsumkehrend. Drehungen und Translationen sind orientierungserhaltend.

*Beweis.* Der Beweis wird in der Übung besprochen.  $\square$

*Bemerkung.* Wir werden sehen, dass im Allgemeinen Geradenspiegelungen und Gleitspiegelungen genau die orientierungsumkehrenden Abbildungen sind. Für die Euklidische Geometrie sind die orientierungserhaltenden Isometrien genau die Drehungen und Translationen. Beim Modell der hyperbolischen Geometrie gibt es allerdings noch eine orientierungserhaltende Isometrie, welche wir noch nicht kennengelernt haben.

**Definition 3.68.** Eine Isometrie  $\Phi$  heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn es Geraden-  
spiegelungen gibt  $\sigma_{g_1}, \sigma_{g_2}, \dots, \sigma_{g_n}$  mit  $n = 2k$  (bzw.  $n = 2k + 1$ ) mit  $k \in \mathbb{N}_0$  und es  
gilt

$$\Phi = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} \circ \dots \circ \sigma_{g_n}.$$

**Satz 3.69.** Eine Isometrie ist genau dann orientierungserhaltend, wenn sie gerade ist,  
sowie genau dann orientierungsumkehrend, wenn sie ungerade ist. Die Menge der ori-  
entierungserhaltenden Abbildungen

$$\text{Isom}_+(\mathcal{E}) := \{\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \mid \Phi \text{ orientierungserhaltende Isometrie}\}$$

bildet eine Untergruppe in der Gruppe der Isometrien.

*Beweis.* Der Beweis wird in der Übung besprochen. □

## 4 Euklidische Geometrie

### 4.1 Parallelenaxiom

**Definition 4.1.** Zwei Geraden  $g$  und  $h$  heißen

- *parallel*, geschrieben  $g \parallel h$ , wenn  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$  und
- *transversal*, wenn sich  $g$  und  $h$  in genau einem Punkt schneiden.

Falls  $g \parallel h$ , dann sagen wir auch  $h$  ist eine *Parallele zu  $g$* . Falls  $g$  und  $h$  transversal ist, dann  
sagen wir auch  $h$  ist eine *Transversale zu  $g$* . Falls  $g = (AB)$  und  $h = (CD)$  schreiben wir  
auch  $AB \parallel CD$  für  $(AB) \parallel (CD)$ .

**Satz 4.2.** Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $P$  gibt es eine Gerade  $h$ , so dass  $P \in h$   
und  $h \parallel g$ .

*Beweis.* Dies ist die sogenannte *Doppellotkonstruktion*. Der Fall  $P \in g$  ist trivial, da  
dann  $h = g$  genügt. Angenommen  $P \notin g$ , dann sei  $\ell$  das Lot von  $P$  auf  $g$  und  $h$  das Lot  
von  $P$  auf  $\ell$ . Wir behaupten, dass gilt  $h \cap g = \emptyset$ . Angenommen  $Q$  sei der Schnittpunkt  
 $h \cap g$ , dann hat  $Q$  zwei Lote auf  $\ell$  im Widerspruch zur Eindeutigkeit 3.33. □

Die Gerade  $h$  im letzten Satz ist nicht eindeutig. Wir fügen noch ein Axiom zu unserer  
Liste hinzu, das *Parallelenaxiom*:

- (V) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $P$  existiert eine *eindeutige* Gerade  $h$ , so dass  
 $P \in h$  und  $h \parallel g$ .

Ein Modell  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  heißt *euklidische Ebene*, wenn die Axiome (I) – (V) erfüllt sind.

## Stufen/Wechselwinkel

Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $h$  mit einer gemeinsamen Transversalen  $s$ . Seien  $P$  und  $Q$  die Schnittpunkte  $g \cap s$  bzw.  $h \cap s$  sowie  $A \in g$  und  $B \in h$  auf verschiedenen Seiten von  $s$ , dann heißen die Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle PQB$  *Wechselwinkel*. Sei außerdem  $\angle P'QB'$  der Scheitelwinkel zu  $\angle PQB$ , dann heißen die beiden Winkel  $\angle APQ$  und  $\angle P'QB'$  *Stufenwinkel* (Siehe Abbildung 4.1).

**Lemma 4.3** (Umkehrung des Stufen/Wechselwinkelsatzes). *Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  eine absolute Ebene. Gegeben zwei Gerade  $g$  und  $h$  mit gemeinsamer Transversalen  $s$  und kongruenten Wechselwinkeln, dann gilt  $g \parallel h$ .*

*Beweis.* Seien  $\angle APQ$  und  $\angle PQB$  die Wechselwinkel wobei  $g = (PA)$  und  $h = (BQ)$ . Wir nehmen per Widerspruch an, dass  $g$  und  $h$  transversal sind. Sei  $R$  der Schnittpunkt  $g \cap h$ . Ohne Einschränkung liegen  $R$  und  $A$  auf der gleichen Seite bezüglich  $s = (PQ)$ . Dann liegt  $Q$  zwischen  $B$  und  $R$  und  $A$  liegt auf dem Strahl  $\overrightarrow{QR}$ . Nach Nebenwinkelsatz 3.11 gilt für die Innenwinkel im Dreieck  $\triangle PQR$

$$|\overline{\angle RPQ}| + |\overline{\angle PQR}| = |\overline{\angle APQ}| + \pi - |\overline{\angle PQB}| = \pi.$$

Das ist ein Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24. □

## Innenwinkelsumme

**Satz 4.4.** *Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  eine absolute Ebene. Dann ist äquivalent*

- (i) *Es gilt das Parallelenaxiom.*
- (ii) *In jedem Dreieck  $\triangle ABC$  gilt  $|\overline{\angle CAB}| + |\overline{\angle ABC}| + |\overline{\angle BCA}| = \pi$ .*

*Beweis.* Wir zeigen  $(i) \Rightarrow (ii)$ . Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$ . Wir schreiben für die Innenwinkel  $\angle A = \angle CAB$ ,  $\angle B = \angle ABC$  und  $\angle C = \angle BCA$ . Ohne Einschränkung ist  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck, denn sonst ist nichts zu zeigen nach Korollar 3.7. Sei  $P$  auf

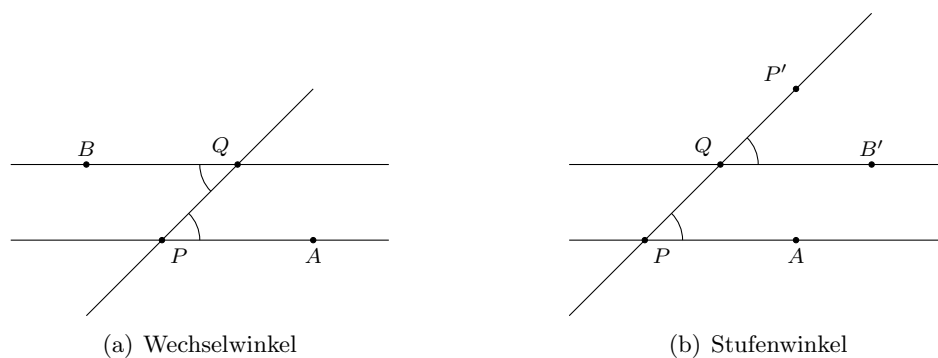


Abbildung 4.1: Weitere wichtige Paare von Winkeln.

der anderen Seite als  $B$  bezüglich  $(AC)$  mit  $\angle PCA \cong \angle A$  und  $Q$  auf der anderen Seite als  $A$  bezüglich  $(BC)$  mit  $\angle QCB \cong \angle B$ . Nach Lemma 4.3 ist  $CP \parallel AB$  und  $AB \parallel CQ$ . Nach dem Parallelenaxiom gibt es nur eine zu  $(AB)$  parallele Gerade durch  $C$ . Demnach sind die Punkte  $C, P$  und  $Q$  kollinear. Nach Konstruktion liegt  $C$  zwischen  $P$  und  $Q$  sowie  $B$  und  $Q$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(AC)$ . Wegen Parallelität liegt  $A$  und  $B$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(CQ)$ . Also liegt  $B$  in  $\text{Inn} \angle ACQ$  und mit dem Nebenwinkelsatz 3.11 sowie Formel (3.1) gilt

$$\pi = |\overline{\angle PCA}| + |\overline{\angle ACQ}| = |\overline{\angle A}| + |\overline{\angle C}| + |\overline{\angle BCQ}| = |\overline{\angle A}| + |\overline{\angle C}| + |\overline{\angle B}|.$$

Wir zeigen  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Wir nehmen nach Widerspruch an, dass es Geraden  $g, h$  und  $k$  gibt mit  $h, k \parallel g$  und  $h \cap k = \{P\}$ . Sei  $F$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $g$ . Ohne Einschränkung ist  $h$  das Doppellot, d.h.  $h \perp \ell$  wobei  $\ell = (FP)$ . Sei  $R \in k \cap \mathcal{H}_+(h, F)$  und  $Q \in g \cap \mathcal{H}_+(\ell, R)$ . Wir definieren eine Folge von Punkten  $Q_1, Q_2, \dots \in FQ$  durch  $Q_1 := Q$  und für  $n > 1$  gilt  $Q_n \notin FQ_{n-1}$  mit  $Q_{n-1}Q_n \cong Q_{n-1}P$ . Setze  $\alpha_n := |\overline{\angle FQ_nP}|$ . Da  $\angle FQ_{n-1}P$  der Nebenwinkel zu  $\angle PQ_{n-1}Q_n$  und nach Konstruktion das Dreieck  $\triangle Q_{n-1}Q_nP$  gleichschenkelig ist, gilt nach Basiswinkelsatz 3.27 und Satz 3.37

$$\pi \geq |\overline{\angle PQ_{n-1}Q_n}| + 2|\overline{\angle Q_{n-1}Q_nP}| = \pi - \alpha_{n-1} + 2\alpha_n \quad \Rightarrow \quad \alpha_n \leq \frac{1}{2}\alpha_{n-1}.$$

Mit anderen Worten  $(\alpha_n)$  ist eine Nullfolge. Sei nun  $S \in h \cap \mathcal{H}_+(\ell, R)$  und setze  $\delta := |\overline{\angle SPR}|$ . Nach Konstruktion und Parallelität von  $g$  und  $h$  liegen  $S, R$  und  $Q_n$  auf der gleichen Seite bezüglich  $\ell$  sowie  $R, F$  und  $Q_n$  auf der gleichen Seite bezüglich  $h$ . Insbesondere  $R, Q_n \in \text{Inn} \angle FQS$ . Wir behaupten außerdem  $Q_n \in \text{Inn} \angle FPR$ . Im anderen Fall ist  $R \in \text{Inn} \angle RPQ_n$  und nach dem Armbrustlemma 3.23 schneidet  $k = (PR)$  die Strecke  $FQ_n$  im Widerspruch zu  $k \parallel g$ . Diese Beobachtungen liefert mit Satz 3.30 und Formel (3.1)

$$\frac{\pi}{2} = |\overline{\angle FPS}| = |\overline{\angle FPR}| + |\overline{\angle RPS}| > |\overline{\angle FPQ_n}| + \delta.$$

Sei nun  $n \gg 1$  groß genug, dass  $\alpha_n < \delta/2$ . Dann gilt für die Innenwinkelsumme im Dreieck  $\triangle FPQ_n$  mit Satz 3.30

$$|\overline{\angle PFQ_n}| + |\overline{\angle FQ_nP}| + |\overline{\angle Q_nPF}| < \frac{\pi}{2} + \alpha_n + \frac{\pi}{2} - \delta < \pi - \frac{\delta}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch zu  $(ii)$ . □

## Euklidische Bedingung

**Definition 4.5.** Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  eine absolute Ebene. Eine Aussage welche äquivalent zum Parallelenaxiom ist, heißt *euklidische Bedingung*.

*Bemerkung.* Hier eine nicht vollständige Liste. Jede einzelne Aussage ist eine euklidische Bedingung.

- (i) Gegeben eine Gerade  $g = (AB)$  und Punkte  $P, Q$  auf der gleichen Halbebene bezüglich  $g$  mit

$$|\angle PAB| + |\angle ABQ| < \pi,$$

dann schneiden sich die Strahlen  $\underline{AP}$  und  $\underline{BQ}$ .

- (ii) Jedes Dreieck hat Innenwinkelsumme gleich  $\pi$ .
- (iii) Es gibt ein Dreieck mit Innenwinkelsumme gleich  $\pi$ .
- (iv) Es gibt ein Rechteck.
- (v) Es gilt der Stufen/Wechselwinkelsatz.
- (vi) Es gilt der Strahlensatz.
- (vii) Es gilt der Satz des Pythagoras.
- (viii) Es gilt der Satz des Thales.
- (ix) Je drei Geraden haben eine gemeinsame Transversale.
- (x) In jedem echten Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der Seiten.
- (xi) Je drei nicht kollineare Punkte liegen auf einem Kreis.
- (xii) Es gibt zwei ähnliche aber nicht kongruente Dreiecke.
- (xiii) Es gibt eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $P \notin g$  sodass es genau eine zu  $g$  parallele Gerade durch  $P$  gibt.
- (xiv) Die Menge aller Punkte auf einer Seite und mit gleichem Abstand zu einer gegebenen Geraden (die sogenannte *Abstandsgleiche*) ist eine Gerade.
- (xv) Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden, d.h. wenn  $g \parallel h$  und  $h \parallel k$  dann gilt  $g \parallel k$ .

Wir werden in diesem Kurs nicht vollständig beweisen können, dass jede dieser Aussagen eine euklidische Bedingungen ist. Wir werden allerdings zeigen, dass die Aussagen alle in der euklidischen Geometrie gelten. Für den Rest dieses Kapitels sei nun also stets eine euklidische Ebene  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  vorausgesetzt.

**Satz 4.6** (Stufen/Wechselwinkelsatz). *Gegeben zwei Geraden  $g$  und  $h$  mit einer gemeinsamen Transversalen  $s$ . Angenommen  $g = (PA)$ ,  $h = (BQ)$  und  $s = (PQ)$  mit  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Halbebenen bezüglich  $s$ , dann gilt*

$$\angle APQ \cong \angle PQB \quad \iff \quad h \parallel g.$$

*Beweis.* Die Richtung  $\Rightarrow$  wurde schon in Lemma 4.3 gezeigt. Wir zeigen die Richtung  $\Leftarrow$ . Sei  $B' \in \mathcal{H}_+(s, B)$  mit  $\angle APQ \cong \angle PQB'$  und setze  $k = (B'Q)$ . Dann gilt nach Lemma 4.3  $k \parallel g$ . Nach dem Parallelenaxiom gilt  $k = h$  und somit  $B' \in \overrightarrow{QB}$ . Es folgt  $\angle PQB' = \angle PQB$  und somit  $\angle APQ \cong \angle PQB$  wie gewünscht.  $\square$

**Satz 4.7** (Euklid V). *Gegeben eine Gerade  $g = (AB)$  und Punkte  $P, Q$  auf der gleichen Seite bezüglich  $g$  mit*

$$|\overline{\angle PAB}| + |\overline{\angle ABQ}| < \pi, \quad (4.1)$$

*dann schneiden sich die Strahlen  $\overrightarrow{AP}$  und  $\overrightarrow{BQ}$ .*

*Beweis.* Wir nehmen per Widerspruch an, dass  $\overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{BQ} = \emptyset$ . Wir behaupten, dass auch  $(AP) \cap (BQ) = \emptyset$ . In der Tat, sei per Widerspruch  $R$  ein Schnittpunkt von  $(AP) \cap (BQ)$ . Der Punkt  $R$  liegt dann auf der anderen Halbebene als  $P$  und  $Q$  und mit Nebenwinkelsatz 3.11 und (4.1) gilt für die Innenwinkel im Dreieck  $\triangle ABR$

$$|\overline{\angle BAR}| + |\overline{\angle RBA}| = \pi - |\overline{\angle PAB}| + \pi - |\overline{\angle ABQ}| > \pi,$$

Im Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24. Es gilt also  $(AP) \parallel (BQ)$ .

Sei nun  $Q' \in \mathcal{H}_-(g, Q)$ , so dass  $\angle PAB \cong \angle ABQ'$ . Damit sind nach der Umkehrung des Stufen/Wechselwinkelsatzes 4.3 die Geraden  $(AP)$  und  $(BQ')$  parallel. Dann sind nach dem Parallelenaxiom die Gerade  $(BQ)$  und  $(BQ')$  gleich. Dann folgt wieder mit Nebenwinkelsatz 3.11

$$|\overline{\angle PAB}| + |\overline{\angle ABQ}| = |\overline{\angle PAB}| + \pi - |\overline{\angle ABQ'}| = \pi,$$

im Widerspruch zu (4.1).  $\square$

## 4.2 Proportionssätze

Ab jetzt sei stets  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell der euklidischen Ebene vorausgesetzt, wenn nicht anders angegeben.

**Satz 4.8** (Parallelogrammregel). *Gegeben seien Punkte  $A, A', B, B'$  so dass  $AA' \parallel BB'$  und  $AB \parallel A'B'$ , dann gilt  $AA' \cong BB'$  und  $AB \cong A'B'$ .*

*Beweis.* Hausaufgabe.  $\square$

**Satz 4.9** (Strahlensatz). *Gegeben seien Geraden  $g, h, s$  und  $t$  mit  $s \neq t$  sowie Schnittpunkte  $O, A, B, C, D$  so dass  $O \in s \cap t$ ,  $g = (AB)$ ,  $h = (CD)$ ,  $s = (AC)$  und  $t = (BD)$ . Dann ist äquivalent*

(i) *Die Geraden  $g$  und  $h$  sind parallel.*

(ii) *Die Winkel  $\angle AOB$  und  $\angle COD$  sind Scheitelwinkel oder gleich und*

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}, \quad (4.2)$$

*wobei wir zwecks Übersichtlichkeit die Querstriche für die Abstände weggelassen haben.*

Auch impliziert jede der beiden Aussagen

(iii) Es gilt

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}. \quad (4.3)$$

*Bemerkung.* Die letzte Aussage ist nicht äquivalent zu den anderen aus einem ähnlichen Grund, dass es keinen Kongruenzsatz (sSW) gibt (siehe Abbildung 4.2).

*Beweis.* Wir zeigen (i)  $\Rightarrow$  (ii) und (iii) in einzelnen Fällen. Für die ersten drei Fälle gilt  $C \in \overrightarrow{OA}$  und  $\lambda := OC/OA$ .

*Fall 1:*  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Wir beweisen dies per Induktion. Der Induktionsanfang  $\lambda = 1$  ist klar, denn dann gilt  $C = A$  und somit  $h = g$ , also auch  $D = B$  und demnach (ii) und (iii).

Für den Induktionsschritt sei  $\lambda = OC/OA = n + 1$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $C' \in AC$  mit  $OC'/OA = n$ . Sei  $h'$  die eindeutige Gerade mit  $C' \in h'$  und  $h' \parallel g$ . Nach Satz von Pasch 3.22 schneidet  $h'$  die Strecke  $OD$  in einem Punkt, sagen wir  $D'$ . Sei nun  $s'$  die Gerade mit  $D' \in s'$  und  $s' \parallel s$ . Erneut durch Satz von Pasch schneidet  $s'$  die Strecke  $CD$  in einem Punkt, sagen wir  $E$  (siehe Abbildung 4.3). Nach der Parallelogrammregel 4.8 gilt  $CC' \cong D'E$  und  $C'D' \cong CE$  und Stufen-/Wechselwinkelsatz haben die Dreiecke  $\triangle AOB$  und  $\triangle DD'E$  kongruente Innenwinkel. Da außerdem  $OA \cong CC' \cong D'E$  folgt  $\triangle AOB \cong \triangle ED'D$  und mit Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{OD}{OB} &= \frac{OD' + D'D}{OB} = \frac{OD'}{OB} + \frac{D'D}{OB} = n + 1, \\ \frac{CD}{AB} &= \frac{CE + ED}{AB} = \frac{C'D'}{AB} + \frac{ED}{AB} = n + 1. \end{aligned}$$

Wir haben (ii) und (iii) für den Fall gezeigt.

*Fall 2:*  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Sei  $\lambda = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  sowie  $C' \in \overrightarrow{OA}$  mit  $OC'/OA = \frac{1}{q}$  und  $D' \in OB$  wie im ersten Fall konstruiert, so dass  $C'D' \parallel AB$ . Da  $OA/OC' = q \in \mathbb{N}$  und  $OC'/OC' = OC/OA \cdot OA/OC' = p \in \mathbb{N}$  gilt mit dem ersten Schritt

$$q = \frac{OA}{OC'} = \frac{OB}{OD'} = \frac{AB}{C'D'} \quad \text{und} \quad p = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

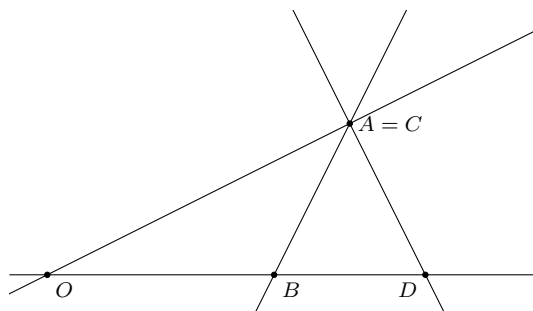


Abbildung 4.2: Ein Gegenbeispiel für die Implikation (iii)  $\Rightarrow$  (i) im Strahlensatz 4.9. Hier ist  $AB \cong AD$ .



**Definition 4.10** (Ähnlichkeit). Zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  heißen *ähnlich*, geschrieben  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , wenn mit den üblichen Bezeichnungen für die Innenwinkel gilt

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}, \quad \angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B' \quad \text{und} \quad \angle C \cong \angle C'.$$

**Satz 4.11** (Ähnlichkeitssätze). Gegeben zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$ . Jede einzelne der folgenden Aussagen impliziert  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

- (sws)  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ .
- (www)  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\angle B \cong \angle B'$  und  $\angle C \cong \angle C'$ .
- (sss)  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
- (Ssw)  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ , sowie  $\overline{AB} \leq \overline{BC}$ .

*Beweis von (sws).* Sei  $B'' \in \overline{AB}$  mit  $AB'' \cong A'B'$  und  $C'' \in \overline{AC}$  mit  $AC'' \cong A'C'$ . Nach (SWS) gilt  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ . Damit folgt

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AC''}.$$

Mit dem Strahlensatz 4.9 gilt  $BC \parallel B''C''$  und somit auch  $BC/B'C' = AB/A'B'$ . Mit Stufen-/Wechselwinkelsatz 4.6 folgt  $\angle C \cong \angle AC''B'' \cong \angle C'$  sowie  $\angle B \cong \angle AB''C'' \cong \angle B'$ .  $\square$

*Beweis von (www).* Sei wieder  $B'' \in \overline{AB}$  mit  $AB'' \cong A'B'$  und  $C'' \in \overline{AC}$  mit  $AC'' \cong A'C'$ . Nach (SWS) gilt  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ . Insbesondere  $\angle B \cong \angle B' \cong \angle AB''C''$  und nach Stufen-/Wechselwinkelsatz 4.6 gilt  $BC \parallel B''C''$ . Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''},$$

und die Aussage folgt, da nach Kongruenz  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$  gilt  $AB'' \cong A'B'$ ,  $AC'' \cong A'C'$  und  $B''C'' \cong B'C'$ .  $\square$

## Ähnlichkeitsabbildungen

Die Isometrien charakterisieren die kongruenten Dreiecke. Wir beschreiben jetzt Abbildungen, welche die ähnliche Dreiecke charakterisieren.

**Definition 4.12.** Ein Abbildung  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  heißt *winkeltreu*, wenn

$$\angle \Phi(A)\Phi(O)\Phi(B) \cong \angle AOB,$$

für jeden Winkel  $\angle AOB$ . Eine winkeltreue Bijektion heißt *Ähnlichkeitsabbildung*.

**Beispiel 4.13.** Sei  $Z$  ein Punkt und  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die *zentrische Streckung*

$$\Phi_{Z,k} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad P \mapsto P',$$

ist definiert durch:

- $P' = P$  wenn  $P = Z$  und für  $P \neq Z$  gilt
- $P' \in \underline{ZP}$  wenn  $k > 0$  und  $P' \in (ZP) \setminus \underline{ZP}$  falls  $k < 0$  sowie
- $\overline{ZP'} = |k|\overline{ZP}$ .

Anhand der Definition folgen sofort die Eigenschaften:

- (i)  $\Phi_{Z,1} = \text{id}$ ,
- (ii)  $\Phi_{Z,-1} = \Phi_Z$  ist eine Punktspiegelung,
- (iii)  $\Phi_{Z,k} \circ \Phi_{Z,\ell} = \Phi_{Z,k\ell}$  für alle  $k, \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sowie
- (iv)  $\Phi_{Z_1,k_1} \circ \Phi_{Z_2,k_2}$  ist eine zentrische Streckung falls  $k_1 k_2 \neq 1$  und eine Translation wenn  $k_1 k_2 = 1$  für alle Punkte  $Z_1, Z_2$  und reelle Zahlen  $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Satz 4.14.** Sei  $\Phi_{Z,k}$  eine zentrische Streckung, dann gilt

(i)  $\Phi_{Z,k}$  ist bijektiv und  $\Phi_{Z,k}^{-1} = \Phi_{Z,\frac{1}{k}}$

(ii) Es gilt

$$d(\Phi_{Z,k}(P), \Phi_{Z,k}(Q)) = |k|d(P, Q),$$

für alle  $P, Q \in \mathcal{E}$ .

(iii)  $\Phi_{Z,k}$  ist winkeltreu.

*Beweis.* Punkt (i) ist klar nach den oben festgestellten Eigenschaften. Zu (ii). Seien  $P, Q$  zwei Punkte mit  $P \neq Q$  und auch  $Z \neq P, Q$ , denn sonst ist nichts zu zeigen. Setze  $P' := \Phi_{Z,k}(P)$  und  $Q' = \Phi_{Z,k}(Q)$ . Dann gilt nach Definition

$$|k| = \frac{ZP'}{ZP} = \frac{ZQ'}{ZQ}.$$

Es folgt aus dem Strahlensatz 4.9, dass  $PQ \parallel P'Q'$  und damit  $P'Q'/PQ = |k|$  wie gefordert.

Zu (iii). Wenn  $A, O, B$  kollinear sind, etwa  $\overline{\angle AOB} = \pi$ , dann ist  $O$  zwischen  $A$  und  $B$  und es gilt

$$\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB} \quad \stackrel{(ii)}{\implies} \quad |k|(\overline{A'O'} + \overline{O'B'}) = |k|\overline{A'B'},$$

wobei  $A' = \Phi_{Z,k}(A)$ ,  $O' = \Phi_{Z,k}(O)$  und  $B' = \Phi_{Z,k}(B)$ . Damit ist auch  $O'$  zwischen  $A'$  und  $B'$  und demnach  $\overline{\angle A'O'B'} = \pi$ . Analog zeigen wir den Fall  $\overline{\angle A'O'B'} = 0$ .

Sei nun  $A, O$  und  $B$  nicht kollinear. Dann folgt aus (sss) und (ii), dass  $\triangle A'O'B' \cong \triangle AOB$  und insbesondere gilt  $\angle A'O'B' \cong \angle AOB$ .  $\square$

**Satz 4.15.** Sei  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  winkeltreu, dann gibt es eine Konstante  $k > 0$  und es gilt

$$d(\Phi(P), \Phi(Q)) = kd(P, Q), \quad (4.4)$$

für alle  $P, Q \in \mathcal{E}$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $P' := \Phi(P)$  für einen Punkt  $P$ . Fixiere ein echtes Dreieck  $\Delta ABC$ . Da  $\Phi$  winkeltreu ist gilt nach (www), dass  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$  und insbesondere

$$k := \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Gegeben beliebige Punkte  $P, Q$ . Da  $(AB) \cap (AC) \cap (BC) = \emptyset$  nehmen wir ohne Einschränkung an, dass  $P, Q \notin (AB)$ . Dann gilt aus dem gleichen Grund wie eben  $\Delta ABP \sim \Delta A'B'P'$  und  $\Delta ABQ \sim \Delta A'B'Q'$  und insbesondere

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'P'}{AP} = \frac{A'Q'}{AQ}.$$

Da außerdem  $\angle P'A'Q' \cong \angle PAQ$ , weil ja  $\Phi$  winkeltreu ist, folgt auch  $\Delta PAQ \sim \Delta P'A'Q'$  nach (sws). Wir schließen

$$k = \frac{A'P'}{AP} = \frac{P'Q'}{PQ}.$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Korollar 4.16.** Jede Winkeltreue Abbildung ist die Verknüpfung von einer zentrischen Streckung und einer Isometrie.

*Beweis.* Gegeben eine winkeltreue Abbildung  $\Phi$ . Nach Satz 4.15 gibt es ein  $k > 0$  so dass (4.4). Setze  $\Psi := \Phi_{Z, \frac{1}{k}} \circ \Phi$ . Dann gilt für alle  $P, Q$

$$d(\Psi(P), \Psi(Q)) = \frac{1}{k}d(\Phi(P), \Phi(Q)) = d(P, Q).$$

Also ist  $\Psi$  eine Isometrie.  $\square$

**Korollar 4.17.** Gegeben zwei echte Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$ , dann ist äquivalent

(i)  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

(ii) Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  und  $A' = \Phi(A)$ ,  $B' = \Phi(B)$  sowie  $C' = \Phi(C)$

*Beweis.* Die Richtung (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist klar nach Ähnlichkeitssatz (www). Wir zeigen (i)  $\Rightarrow$  (ii). Dazu sei  $B'' \in \underline{AB}$  und  $C'' \in \underline{AC}$  mit  $AB'' \cong A'B'$  und  $AC'' \cong A'C'$ . Nach (SWS) gilt  $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB''C''$ . Insbesondere gibt es eine Isometrie  $\Psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  mit  $\Psi(A') = A$ ,  $\Psi(B') = B''$  und  $\Psi(C') = C''$ . Setze nun  $k := AC''/AC$ , dann gilt für die Verknüpfung  $\Phi := \Psi^{-1} \circ \Phi_{A, k}$ ,  $\Phi(A) = A'$ ,  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$  wie gewünscht.  $\square$

Das letzte Korollar erlaubt eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ähnlichkeit für beliebige Teilmengen der Ebene.

**Definition 4.18.** Gegeben zwei Teilmengen  $\Omega, \Omega' \subset \mathcal{E}$ . Wir sagen  $\Omega$  und  $\Omega'$  sind *ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  gibt mit  $\Phi(\Omega) = \Omega'$ .

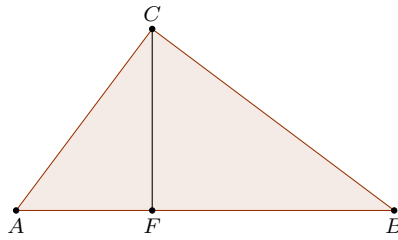


Abbildung 4.4: Ein rechtwinkliges Dreieck mit Lot

### 4.3 Satzgruppe des Pythagoras

Ein Dreieck  $\triangle ABC$  heißt *rechtwinklig*, wenn es einen rechten Innenwinkel hat. Angenommen  $\angle C$  ist der rechte Innenwinkel, dann heißt die Seite  $AB$  die *Hypotenuse* und die Seiten  $AC$  und  $BC$  heißen *Katheten*.

**Lemma 4.19.** *Sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei  $\angle C$  und sei  $F$  der Lotfußpunkt von  $C$  auf  $(AB)$ , dann gilt  $F \in \text{Inn } AB$ .*

*Beweis.* Angenommen per Widerspruch, dass  $F \notin \text{Inn } AB$ . Im ersten Fall liegt  $F \in \{A, B\}$ , sagen wir  $F = A$ . Dann hat das Dreieck  $\triangle ABC$  zwei rechte Innenwinkel  $\angle C$  und  $\angle A$  im Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24. Im zweiten Fall liegt  $F \in (AB) \setminus AB$ , sagen wir  $A$  liegt zwischen  $F$  und  $B$ , dann gilt nach dem Außenwinkelsatz 3.25

$$|\overline{\angle A}| = |\overline{\angle CAB}| > |\overline{\angle CFA}| = \frac{\pi}{2},$$

Dies liefert erneut den Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24  $|\overline{\angle A}| + |\overline{\angle C}| > \pi/2 + \pi/2 = \pi$ .  $\square$

**Satz 4.20** (Pythagoras). *Sei  $\triangle ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Innenwinkel  $\angle C$  und  $F$  der Lotfußpunkt von  $C$  auf  $(AB)$ , dann gilt*

$$(i) \text{ (Pythagoras) } \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(ii) \text{ (Höhensatz) } \overline{FC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$$

$$(iii) \text{ (Kathetensatz) } \overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AF} \text{ und } \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{FB}$$

*Beweis.* Es gilt nach (www)

$$\triangle ACF \sim \triangle ABC \sim \triangle CBF,$$

da mit Lemma 4.19 in den Dreiecke jeweils ein Winkel gleich und ein rechter Winkel ist sowie nach Innenwinkelsumme 4.4 auch das Winkelmaß des letzten Winkels gleich

ist. Damit folgen die Verhältnisse mit den Bezeichnungen  $a := \overline{BC}$ ,  $b := \overline{AC}$ ,  $c := \overline{AB}$ ,  $p := \overline{AF}$ ,  $q := \overline{FB}$  und  $h := \overline{CF}$

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{c} \text{ und } \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow b^2 = pc \text{ und } a^2 = qc.$$

Das ist der Kathetensatz. Damit zeigen wir

$$a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q)c = c^2. \quad (4.5)$$

Das ist der Satz des Pythagoras und schließlich

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Rightarrow h^2 = pq.$$

Das ist der Höhensatz. □

*Bemerkung.* Es gibt mehrere verschiedene bekannte Beweise des Satzes des Pythagoras. Die meisten verwenden die Eigenschaften des Flächeninhalts. Wir werden noch darauf zurück kommen.

**Satz 4.21** (Pythagoras Umkehrung). *Sei  $\Delta ABC$  ein Dreieck und  $F$  der Lotfußpunkt von  $C$  auf  $(AB)$ . Jede einzelne der folgenden Aussagen impliziert, dass  $\angle C$  ein rechter Winkel ist.*

(i)  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ .

(ii)  $\overline{FC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$  und  $F \in AB$ .

(iii)  $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AF}$  und  $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{FB}$  und  $\Delta ABC$  ist ein echtes Dreieck.

*Beweis.* Zu (i). Sei  $\Delta A'B'C'$  ein Dreieck mit  $A'C' \cong AC$ ,  $B'C' \cong BC$  und  $\overline{\angle C'} = \frac{\pi}{2}$ . Dieses Dreieck existiert, nach Lemma 3.3 und Axiom (III). Nach Satz des Pythagoras 4.20 und der Voraussetzung gilt

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'C'}^2 + \overline{B'C'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

Also auch  $AB \cong A'B'$  und  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$  nach (SSS). Insbesondere gilt  $\overline{\angle C} = \pm \overline{\angle C'} = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Zu (ii). Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 4.20 gilt  $h^2 = pq$  und damit

$$c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p^2 + h^2 + h^2 + q^2 = a^2 + b^2,$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz des Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke  $\Delta ACF$  und  $\Delta BCF$  angewendet haben. Es gilt also die Voraussetzung des schon bewiesenen Teils der Umkehrung und wie schließen mit (i), dass  $\angle C$  ein rechter Winkel ist.

Zu (iii). Falls  $F \in \text{Inn } AB$  gilt (4.5) und wir schließen, dass  $\angle C$  rechtwinklig ist aus (i). Bleibt zu zeigen, dass  $F \in \text{Inn } AB$  gilt. Angenommen  $F \in \{A, B\}$ , sagen wir  $F = A$ ,

dann gilt  $p = 0$  und somit auch  $b = 0$  im Widerspruch, dass  $\triangle ABC$  nicht ausgeartet ist. Falls  $F \notin AB$ , sagen wir  $A$  liegt zwischen  $F$  und  $B$ , dann gilt  $A \neq F$  und  $q = p + c$ . Damit

$$a^2 = cq = c(c + p) = c^2 + cp = c^2 + b^2,$$

also nach Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist  $\sphericalangle A$  ein rechter Winkel und daher  $A = F$  nach Eindeutigkeit des Lotfußpunktes 3.33 im Widerspruch zu  $A \neq F$ .  $\square$

#### 4.4 Existenz und Eindeutigkeit

Wir behandeln die Fragen

- Gibt es überhaupt ein Modell der euklidischen Geometrie?
- Wie viele verschiedene Modelle der euklidischen Geometrie gibt es?

Zuerst müssen wir einen sinnvollen Begriff dafür beschreiben, wenn wir zwei Modelle als verschieden bzw. gleich betrachten.

**Definition 4.22.** Wir sagen zwei Modelle  $(\mathcal{E}, d, \sphericalangle)$  und  $(\mathcal{E}', d', \sphericalangle')$  einer absoluten Ebene sind *isometrisch*, wenn es eine Isometrie  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  gibt.

**Lemma 4.23** (Abstand bestimmt Winkelmaß). *Sei  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  eine Isometrie zwischen zwei absoluten Ebenen  $(\mathcal{E}, d, \sphericalangle)$  und  $(\mathcal{E}', d', \sphericalangle')$ , dann ist  $\Phi$  auch winkeltreu, d.h. es gibt ein  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  so dass*

$$\overline{\sphericalangle' A'O'B'} = \varepsilon \overline{\sphericalangle AOB},$$

für alle  $A, O, B \in \mathcal{E}$  mit  $A, B \neq O$  und  $A' = \Phi(A)$ ,  $O' = \Phi(O)$  und  $B' = \Phi(B)$ .

*Beweis.* Für  $A, O, B \in \mathcal{E}$  mit  $A, B \neq O$  setze  $\overline{\sphericalangle' A'O'B'} := \varepsilon \overline{\sphericalangle AOB}$ , wobei  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  eine universelle Konstante unabhängig von  $A, O$  und  $B$  ist, welche so gewählt wird, dass die Vorzeichen der Winkelmaße  $\overline{\sphericalangle A_0 O_0 B_0}$  und  $\overline{\sphericalangle' A_0 O_0 B_0}$  für einen fixierten echten Winkel  $\sphericalangle A_0 O_0 B_0$  übereinstimmen. Demnach sind  $(\mathcal{E}, d, \sphericalangle)$  und  $(\mathcal{E}, d, \sphericalangle')$  zwei Modelle einer absoluten Ebene. Zunächst zeigen wir, dass auch die Vorzeichen  $\overline{\sphericalangle AOB}$  und  $\overline{\sphericalangle' AOB}$  für alle echten Winkel  $\sphericalangle AOB$  übereinstimmen. Nach Korollar 3.19 stimmen die Vorzeichen für alle echten Winkel  $\sphericalangle AO_0 B_0$  überein, wobei  $A$  beliebig ist. Demnach auch für alle echten Winkel  $\sphericalangle AO_0 B$  wobei  $A$  und  $B$  beliebig ist. Nach Lemma 3.16 stimmen sie für alle echten Winkel  $\sphericalangle AOB$  solange  $O \in \underline{AO_0}$ . Diese Zusatzbedingung können wir aber durch erneutes Anwenden von Korollar 3.19 ignorieren. Das zeigt, dass sie auf allen echten Winkeln übereinstimmen.

Wir zeigen nun, dass  $\overline{\sphericalangle AOB} = \overline{\sphericalangle' AOB}$  für alle Winkel  $\sphericalangle AOB$ . Angenommen per Widerspruch gilt  $\overline{\sphericalangle AOB} \neq \overline{\sphericalangle' AOB}$  für einen Winkel  $\sphericalangle AOB$ . Sei  $\epsilon > 0$  klein genug, so dass

$$|\overline{\sphericalangle AOB} - \overline{\sphericalangle' AOB}| > \pi \epsilon. \quad (4.6)$$

Sei weiterhin  $n$  groß genug, so dass  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . Ohne Einschränkung gilt  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$  und  $\sphericalangle AOB$  ist positiv. Wir definieren Punkte  $A_i$  durch  $\overline{\sphericalangle AOA_i} = i \frac{\pi}{n}$  und  $\overline{OA_i} = 1$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Nach Winkeladdition (3.1) und Satz 3.30 gilt

$$\overline{\sphericalangle AOA_i} = \overline{\sphericalangle A_{i-1}OA_i} + \overline{\sphericalangle AOA_{i-1}},$$

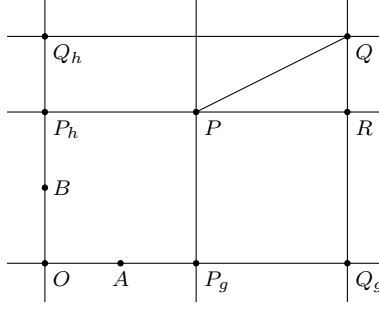


Abbildung 4.5: Konstruktion im Beweis von Satz 4.24

also  $\overline{\angle A_{i-1}OA_i} = \frac{\pi}{n}$  für alle  $i$ . Damit sind die Dreiecke  $\Delta A_{i-1}OA_i$  alle kongruent bezüglich des Modells  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  nach (SWS). Insbesondere gilt  $A_{i-1}A_i \cong A_0A_1$  für alle  $i$ . Dies wiederum aber impliziert, dass alle Dreiecke  $\Delta A_{i-1}OA_i$  auch kongruent bezüglich des Modells  $(\mathcal{E}, d, \angle')$  sind nach (SSS). Insbesondere folgt  $\overline{\angle' A_{i-1}OA_i} = \overline{\angle' A_0OA_1}$ . Nach Satz über den gestreckten Winkel 3.6, Nebenwinkel 3.11 und da  $\overline{\angle' A_0OA_i}$  positiv ist folgt

$$\pi = \overline{\angle' A_0OA_n} = \overline{\angle' A_0OA_1} + \overline{\angle' A_1OA_2} + \cdots + \overline{\angle' A_{n-1}OA_n} = n\overline{\angle' A_0OA_1}.$$

Damit folgt, dass  $\overline{\angle' A_{i-1}OA_i} = \frac{\pi}{n}$  und  $\overline{\angle' AOA_i} = i\frac{\pi}{n}$  für alle  $i$ . Der Punkt  $B$  kann also nicht einer der  $A_i$  sein. Es gibt ein  $i$ , so dass  $\overline{\angle AOA_{i-1}} < \overline{\angle AOB} < \overline{\angle AOA_i}$  und damit  $B \in \text{Inn} \angle A_{i-1}OA_i$ . Nach Satz 3.30 sind die Winkelmaße  $\overline{\angle' AOB}$  und  $\overline{\angle AOB}$  im Intervall  $((i-1)\frac{\pi}{n}, i\frac{\pi}{n})$ . Also gilt

$$|\overline{\angle AOB} - \overline{\angle' AOB}| < \frac{\pi}{n} < \pi\epsilon.$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.6). □

**Satz 4.24** (Existenz und Eindeutigkeit). *Das kartesische Modell 2.1 erfüllt alle Axiome der euklidischen Geometrie und jedes Modell der euklidischen Geometrie ist isometrisch zum kartesischen Modell.*

*Beweis der Eindeutigkeit.* Sei  $(\mathbb{R}^2, d, \angle)$  das kartesische Modell und  $(\mathcal{E}', d', \angle')$  ein weiteres Modell der euklidischen Geometrie. Wir konstruieren eine Isometrie  $\Phi : \mathcal{E}' \rightarrow \mathbb{R}^2$  wie folgt. Wähle eine Gerade  $g = (AO)$  und sei  $B$  so dass  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ . Setze  $h := (OB)$ . Bezeichne die Isometrien  $\Psi_g : g \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Psi_h : h \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $\Psi_g(O) = \Psi_h(O) = 0$  und  $\Psi_g(A), \Psi_h(B) > 0$ . Für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathcal{E}'$  bezeichne weiterhin  $P_g$  und  $P_h$  die Lotfußpunkte auf  $g$  bzw.  $h$  und definiere

$$\Phi : \mathcal{E}' \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad P \mapsto (\Psi_g(P_g), \Psi_h(P_h)).$$

Wir zeigen, dass  $\Phi$  surjektiv ist. Sei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Setze  $P_x := \Psi_g^{-1}(x) \in g$  und  $P_y := \Psi_h^{-1}(y) \in h$ . Bezeichne mit  $\ell_x$  und  $\ell_y$  die Lote von  $P_x$  bzw.  $P_y$  auf  $g$  bzw.  $h$ . Es gibt einen

eindeutigen Schnittpunkt  $P$  in  $\ell_x \cap \ell_y$ , denn sonst ist  $\ell_x \parallel \ell_y$  und es gäbe zwei verschiedene Parallelen zu  $\ell_x$  durch  $P_y$ , nämlich  $\ell_y$  und  $h$  nach dem Stufen-/Wechselwinkelsatz 4.6 im Widerspruch zu Axiom (V). Offensichtlich gilt  $\Phi(P) = (x, y)$  nach Konstruktion.

Wir zeigen, dass  $\Phi$  eine Isometrie ist. Es genügt zu zeigen, dass  $\Phi$  abstandserhaltend ist. Gegeben Punkte  $P, Q \in \mathcal{E}'$ . Seien  $P_g, P_h, Q_g$  und  $Q_h$  die Lotfußpunkte in obiger Bezeichnung (siehe Abbildung 4.5). Nach Stufen-/Wechselwinkelsatz 4.6 sind die drei Geraden  $(OB)$ ,  $(PP_g)$ ,  $(QQ_g)$  sowie auch  $(OA)$ ,  $(PP_h)$  und  $(QQ_h)$  paarweise parallel. Wir machen eine Fallunterscheidung

Fall  $P_g = Q_g$ . Dann gilt  $PQ \parallel P_h Q_h$  und  $QQ_h \parallel PP_h$ . Nach der Parallelogrammregel 4.8 gilt  $d'(P, Q) = d'(P_h, Q_h)$  somit nach (2.1)

$$\begin{aligned} d(\Phi(P), \Phi(Q))^2 &= (\Psi_g(P_g) - \Psi_g(Q_g))^2 + (\Psi_h(P_h) - \Psi_h(Q_h))^2 \\ &= d'(P_h, Q_h)^2 = d'(P, Q)^2. \end{aligned}$$

Ganz analog folgt der Fall  $P_h = Q_h$ .

Wir betrachten nun den Fall  $P_g \neq Q_g$  und  $P_h \neq Q_h$ . Wir behaupten, dass es einen eindeutigen Schnittpunkt, sagen wir  $R$ , in  $(PP_h) \cap (QQ_g)$  gibt. Ansonsten ist  $(PP_h)$  parallel zu  $(QQ_g)$  und es gibt zwei verschiedene Parallelen durch  $P$  zur Geraden  $(QQ_g)$ , nämlich  $(PP_h)$  und  $(PP_g)$ . Nach Konstruktion ist  $\triangle PQR$  ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel in  $\angle R$ . Wieder mit Parallelogrammregel 4.8 gilt  $d'(P, R) = d'(P_g, Q_g)$  und  $d'(Q, R) = d'(Q_h, P_h)$  und mit Satz des Pythagoras 4.20

$$\begin{aligned} d(\Phi(P), \Phi(Q))^2 &= (\Psi_g(P_g) - \Psi_g(Q_g))^2 + (\Psi_h(P_h) - \Psi_h(Q_h))^2 \\ &= d'(P_g, Q_g)^2 + d'(P_h, Q_h)^2 = d'(P, R)^2 + d'(R, Q)^2 = d'(P, Q)^2. \end{aligned}$$

Damit wurde die Eindeutigkeit bewiesen. □

*Bemerkung.* Der letzte Satz erlaubt zwei Beweismethoden für Sätze in der euklidischen Geometrie:

- (*synthetischer Beweis*) Dies ist ein Beweis auf Grundlage der Axiome, d.h. so wie wir bisher alle Beweise geführt haben.
- (*analytischer Beweis*) Dies ist ein Beweis in  $\mathbb{R}^2$  mittels Koordinaten und Vektoren. Nach Satz 4.24 und Lemma 4.23 gelten bewiesene Aussagen in  $\mathbb{R}^2$  über Abstände und Winkelmaße in allen Modellen der euklidischen Geometrie.

**Satz 4.25** (Kosinussatz). *Für alle  $A, O$  und  $B$  mit  $A, B \neq O$  gilt*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{BO} \cdot \cos \angle AOB.$$

*Beweis.* Übung. □

## Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist gegeben durch

$$z = x + iy,$$

wobei  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $i$  so dass  $i^2 = -1$ . Wir bezeichnen den *Realteil*, den *Imaginärteil* durch  $\Re z = x$  bzw.  $\Im z = y$  sowie die *Konjugation* mit  $\bar{z} := x - iy$ . Multiplikation und Addition ist so definiert, dass das Assoziativ- und Distributivgesetz gilt, d.h. für  $w = x' + iy'$  gilt

$$zw = (xx' - yy') + i(xy' + x'y), \quad z + w = (x + x') + i(y + y').$$

Das zeigt insbesondere, dass mit Identifikation  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  die Vektoraddition in  $\mathbb{R}^2$  der Addition in  $\mathbb{C}$  entspricht. Weiterhin entspricht

$$\langle z, w \rangle = xx' + yy' = \Re(z\bar{w}), \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Wir definieren die *Exponentialreihe*

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert auf ganz  $\mathbb{C}$  und liefert die Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto \exp z \tag{4.7}$$

Ferner gilt

$$\exp(z + w) = \exp z \exp w. \tag{4.8}$$

und die *Euler Identität* für  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha. \tag{4.9}$$

Man zeigt leicht, dass für die Konjugation gilt

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

Dies erweitert auf Reihen und es folgt

$$\overline{e^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(i\alpha)^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} = e^{-i\alpha}.$$

Damit schließen wir aus (4.8) und (4.9) den *trigonometrische Pythagoras*

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = |e^{i\alpha}|^2 = e^{i\alpha} \cdot \overline{e^{i\alpha}} = e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = e^0 = 1, \tag{4.10}$$

sowie die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \Re e^{i(\alpha+\beta)} = \Re(e^{i\alpha}e^{i\beta}) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \Im e^{i(\alpha+\beta)} = \Im(e^{i\alpha}e^{i\beta}) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).\end{aligned}$$

Aus der Analysis wissen wir, dass  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  stetig und monoton fallend ist. Damit gibt es eine stetige monoton fallende Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x = \cos(\theta) \mapsto \theta.$$

Wir schließen daraus, dass sich jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eindeutig durch

$$z = re^{i\alpha}, \quad r = |z| > 0, \quad \alpha \in (-\pi, \pi],$$

darstellen lässt und die Abbildung

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi], \quad z = re^{i\alpha} \mapsto \alpha = \pm \arccos \frac{\Re z}{|z|},$$

wobei  $+$  wenn  $\Im z > 0$  und  $-$  wenn  $\Im z < 0$ , definiert und auf  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  stetig ist.

**Lemma 4.26.** *Es gilt für alle  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

$$\arg(zw) \equiv \arg z + \arg w, \quad \arg \frac{z}{w} \equiv \arg z - \arg w, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

*Beweis.* Übung. □

*Bemerkung.* Beachten Sie, dass in den Gleichungen im letzten Lemma  $\equiv$  und nicht  $=$  steht.

### Kartesisches Modell

Mit diesen Vorbereitungen gilt für den Abstand und das Winkelmaß im kartesischen Modell 2.1

$$d(A, B) = |A - B| \quad \overline{\angle AQB} = \arg \frac{B - Q}{A - Q}. \quad (4.11)$$

für alle  $A, B, Q \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  mit  $A, B \neq Q$ .

**Lemma 4.27.** *Jede der folgenden Abbildungen ist eine winkeltreue Isometrie*

- $\tau_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + a$  für  $a \in \mathbb{C}$
- $\mu_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az$  für  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| = 1$
- $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ .

*Beweis.* Übung. □

**Lemma 4.28.** *Jede Isometrie  $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Verknüpfung von Abbildungen von 4.27. Insbesondere sind alle Isometrien winkeltreu.*

*Beweis.* Sei  $\Phi$  eine gegebene Isometrie und betrachte Punkte  $O$ ,  $E$  und  $I$  mit komplexen Koordinaten  $0$ ,  $1$  bzw.  $i$ . Wir behaupten, dass es eine Isometrie  $\Psi$  gibt, welche Verknüpfung von Abbildungen von 4.27 ist und es gilt  $O' := \Psi(O) = \Phi(O)$ ,  $E' := \Psi(E) = \Phi(E)$  und  $I' := \Psi(I) = \Phi(I)$ .

In der Tat setze schrittweise  $O_1 := O$ ,  $E_1 := \Psi_1(E')$  und  $I_1 := \Psi_1(I')$ , wobei  $\Psi_1 := \tau_a$  mit  $a := -O'$ . Zweitens  $O_2 := O$ ,  $E_2 := E = \Psi_2(E_1)$ ,  $I_2 := \Psi_2(I_1)$ , wobei  $\Psi_2 := \mu_b$  mit  $b := \kappa(E_1)$ . Nach Isometrieeigenschaft gilt  $d(I_2, O) = 1$  und  $d(I_2, E) = \sqrt{2}$ . Da die Kreise  $K(O, 1)$  und  $K(E, \sqrt{2})$  sich nur in den Punkten  $I$  und  $\kappa(I)$  schneiden gibt es zwei Möglichkeiten und setze entsprechend  $\Psi_3 = \text{id}$  bzw.  $\Psi_3 := \kappa$ . Definiere schließlich  $\Psi = (\Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1)^{-1}$ , dann gilt  $\Psi(O) = O'$ ,  $\Psi(E) = E'$  und  $\Psi(I) = I'$  nach Konstruktion wie gewünscht.

Die Verknüpfung  $\Phi' := \Psi^{-1} \circ \Phi$  hat die Fixpunkte  $O$ ,  $E$  und  $I$ . Wir behaupten  $\Psi' = \text{id}$ . Gegeben ein beliebiger Punkt  $Z$  mit  $Z \neq O, E, I$ . Wir behaupten, dass der Schnitt der Kreise

$$K(O, r) \cap K(E, s) \cap K(I, t),$$

wobei  $r = \overline{OZ}$ ,  $s = \overline{EZ}$  und  $t = \overline{IZ}$  nur den Punkt  $Z$  enthält. Sei dazu  $w$  die komplexe Koordinate eines Punktes  $W$  im Schnitt der Kreise, dann gilt

$$\begin{aligned} |w|^2 &= r \\ |w - 1|^2 &= |w|^2 - 2\Re w + 1 = s \\ |w - i|^2 &= |w|^2 - 2\Im w + 1 = t \end{aligned}$$

Wir subtrahieren die erste Gleichung von den anderen beiden und erhalten

$$\Re w = \frac{1}{2}(r + 1 - s), \quad \Im w = \frac{1}{2}(r + 1 - t).$$

Damit ist  $W$  eindeutig bestimmt, also gilt  $W = Z$ . Da  $\Phi'$  eine Isometrie ist, ist  $\Phi'(Z)$  ein Element aus dem Schnitt der Kreise und somit gilt  $\Phi'(Z) = Z$ , also  $\Phi' = \text{id}$  bzw.  $\Phi = \Psi$ .  $\square$

*Beweis der Existenz im Satz 4.24.* Wir müssen zeigen, dass  $(\mathbb{C}, d, \angle)$  die Axiome (I)-(V) erfüllt. Die Axiome (I) und (II) wurden bereits in Aufgabe 1.1 gezeigt. Dazu gibt es auch eine gute Musterlösung auf Moodle. Wir zeigen, dass Axiom (III) gilt. Zunächst (a). Sei dazu ein Strahl  $\overrightarrow{QA}$  und  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  gegeben. Definiere

$$B := e^{i\alpha}(A - Q) + Q.$$

Damit gilt

$$\overline{\angle AQB} = \arg \frac{e^{i\alpha}(A - Q)}{A - Q} = \arg e^{i\alpha} = \alpha.$$

Wir müssen noch zeigen, dass das Winkelmaß konstant auf dem Strahl ist. Sei dazu  $B' \in \overrightarrow{QB}$  und  $A' \in \overrightarrow{QA}$ , also  $A' = Q + t(A - Q)$  und  $B' = Q + s(B - Q)$  für  $s, t > 0$ .  
Damit

$$\overline{\angle A'QB'} = \arg \frac{B' - Q}{A' - Q} = \arg \frac{s(B - Q)}{t(A - Q)} = \arg \left( \frac{s}{t} e^{i\alpha} \right) = \alpha.$$

Wir zeigen (b). Gegeben Punkte  $A, B, C$  und  $Q$  mit  $A, B, C \neq Q$ . Es gilt mit Lemma 4.26

$$\begin{aligned} \overline{\angle AQB} + \overline{\angle BQC} &= \arg \frac{B - Q}{A - Q} + \arg \frac{C - Q}{B - Q} \\ &\equiv \arg \frac{(B - Q)(C - Q)}{(A - Q)(B - Q)} = \arg \frac{C - Q}{A - Q} = \overline{\angle AQC}. \end{aligned}$$

Schließlich folgt (c), da die Funktion  $\arg$  sowie Addition und Multiplikation in  $\mathbb{C}$  stetig ist.

Wir zeigen, dass das Axiom (IV) gilt, d.h. für zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  müssen wir zeigen:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff AB \cong A'B', AC \cong A'C', \angle A \cong \angle A'.$$

Die Richtung  $\Rightarrow$  folgt aus dem Lemma 4.28. Wir zeigen  $\Leftarrow$ . Mit den Isometrien gegeben in Lemma 4.27 definiere schrittweise

$$A_1 := \tau_b(A) = 0, \quad B_1 := \tau_b(B) = B - A \quad \text{und} \quad C_1 := \tau_b(C) = C - A,$$

wobei  $b = -A$ . Dann setze

$$A_2 := \mu_a(A_1) = 0, \quad B_2 := \mu_a(B_1) = c \quad \text{und} \quad C_2 := \mu_a(C_1),$$

wobei  $e = e^{i\alpha}$  mit  $\alpha = -\arg B_1$  und  $c = \overline{AB}$ . Schließlich, falls  $\Im C_2 < 0$  setze

$$A_3 := \kappa(A_2) = 0, \quad B_3 := \kappa(B_2) = c \quad \text{und} \quad C_3 := \kappa(C_2).$$

In jedem Fall haben wir eine Isometrie  $\Psi = \mu_a \circ \tau_b$  bzw.  $\Psi = \kappa \circ \mu_a \circ \tau_b$ , so dass  $\Psi(A) = 0$ ,  $\Psi(B) = c$  und  $\Psi(C) = be^{i\gamma}$  wobei  $b = \overline{AC}$  und  $\gamma = |\overline{\angle A}|$ . Analog definieren wir eine Isometrie  $\Psi'$  mit  $\Psi'(A') = 0$ ,  $\Psi'(B') = c$  und  $\Psi'(C') = be^{i\gamma}$ . Damit ist  $\Phi = \Psi^{-1} \circ \Psi'$  die gesuchte Isometrie welche  $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$  liefert.

Wir zeigen, dass das Axiom (V) gilt. In Aufgabe 1.1 wurde auch bewiesen, dass jede Gerade in  $\mathbb{C}$  die Form  $g = Q + \mathbb{R}v$  für  $Q, v$  mit  $v \neq 0$ . Sei  $P \notin g$  und  $h = P + \mathbb{R}w$  eine Gerade durch  $P$  mit  $w \neq 0$ . Definiere  $u := P - Q$ . Da  $P \notin g$  sind die Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  linear unabhängig, d.h. es gibt  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  so dass  $w = \lambda v + \mu u$ . Es gilt

$$g \parallel h \iff g \cap h = \emptyset \iff \mu = 0 \iff \mathbb{R}v = \mathbb{R}w \iff h \text{ ist eind. bestimmt.}$$

Damit wurde das Axiom (V) bewiesen. □

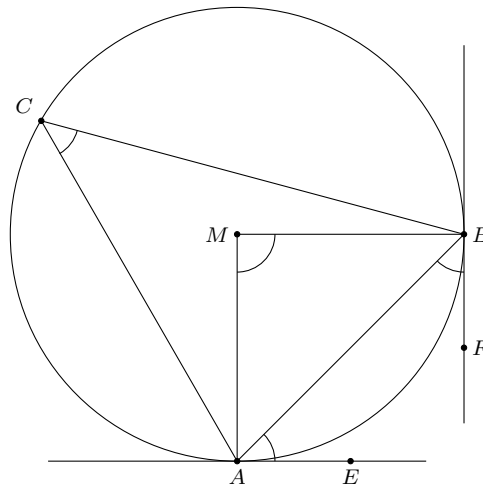


Abbildung 4.6: Peripherie, Sehnen-Tangenten und Zentriwinkel

#### 4.5 Geraden und Winkel am Kreis

**Definition 4.29.** Gegeben seien  $K = K(M, r)$  ein Kreis,  $AB$  eine Sehne,  $C \in K \setminus \{A, B\}$  ein Punkt sowie  $g = (AE)$  und  $h = (BF)$  Tangenten an den Kreis  $K$  im Punkt  $A$  bzw.  $B$ , so dass  $C$  auf der anderen Seite als  $E, F$  bzgl. der Geraden  $(AB)$  liegt. Wir bezeichnen

- $\angle BCA$  den *Peripheriewinkel*
- $\angle ABF$  und  $\angle BAE$  die *Sehnen-Tangentenwinkel* und
- $\angle BMA$  den *Zentriwinkel*.

**Satz 4.30** (Peripheriewinkelsatz). Gegeben seien ein Kreis  $K = K(M, r)$ , eine Sehne  $AB$ , ein Punkt  $C \in K \setminus \{A, B\}$  und Tangenten  $g = (AE)$ ,  $h = (BF)$  an  $K$ , so dass  $E, F$  auf der gegenüberliegenden Seite von  $C$  bzgl. der Geraden  $(AB)$  liegen, dann gilt

(i) dass der Peripheriewinkel kongruent zu jedem Sehnen-Tangentenwinkel ist, d.h.

$$\angle ACB \cong \angle ABF \cong \angle BAE,$$

(ii) falls zusätzlich gilt dass  $M$  und  $C$  auf der gleichen Seite bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegen, dass der Peripheriewinkel halb so groß ist wie der Zentriwinkel, d.h.

$$\overline{\angle ACB} = \frac{1}{2} \overline{\angle AMB}.$$

**Lemma 4.31.** Es gilt  $\angle ABF \cong \angle BAE$ .

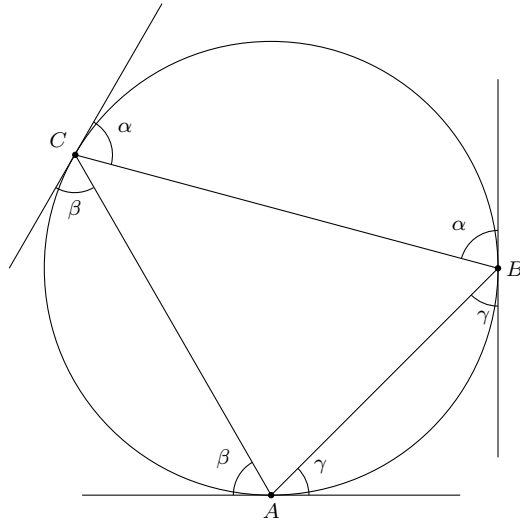


Abbildung 4.7: Sehnentangentenwinkel im Beweis von Satz 4.30

*Beweis.* Es gibt zwei Fälle. Im ersten Fall ist die Sehne  $AB$  ein Durchmesser. Damit sind  $MA$  und  $MB$  Radiussegmente und daher  $\angle ABF = \angle MBF$  sowie  $\angle BAE = \angle MAE$  rechte Winkel nach Korollar 3.44.

Im zweiten Fall sind  $A$ ,  $M$  und  $B$  nicht kollinear. Wir behaupten, dass sich in diesem Fall die Tangenten  $g$  und  $h$  in einem Punkt, sagen wir  $P$ , schneiden. Sonst gilt  $g \parallel h$  und sei  $k$  die zu  $g$  parallele Gerade durch  $B$  welche durch die Doppellotkonstruktion entsteht (siehe Beweis von Satz 4.2), dann gilt  $k \neq h$  und es gibt zwei zu  $g$  parallele Geraden durch den  $B$  im Widerspruch zum Axiom (V).

Nach Satz 3.42 liegt  $P$  außerhalb des Kreises, d.h.  $d(M, P) > r$ . Nach (SsW) sind die Dreiecke  $\triangle MBP$  und  $\triangle MAP$  kongruent, da  $MA \cong MB$  und im Eckpunkt  $A$  bzw.  $B$  ein rechter Winkel ist. Das Dreieck  $\triangle MAB$  ist gleichschenkelig mit Basis  $AB$  und somit ist die Mittelsenkrechte von  $AB$  gleich der Winkelhalbierenden von  $\angle AMB$ , wiederum gleich der Geraden  $(MP)$ . Sei  $Q$  der Schnittpunkt  $AB \cap (MP)$ . Die Dreiecke  $\triangle QAP$  und  $\triangle AMP$  sind ähnlich nach (www), da beide Dreiecke den Winkel  $\angle MPA$  gemeinsam und jeweils einen rechten Winkel als Innenwinkel haben. Genauso folgt  $\triangle QBP \sim \triangle BMP$ . Wir schließen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke und  $\triangle MBP \cong \triangle MAP$

$$\angle ABP = \angle QBP \cong \angle BMP \cong \triangle AMP \cong \angle QAP = \angle BAP. \quad (4.12)$$

Im Fall, wenn  $E, F$  auf der gleichen Seite wie  $P$  bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegen gilt  $\angle ABP = \angle ABF$  und  $\angle BAP = \angle BAE$  und die Behauptung folgt. Im dem anderen Fall sind  $\angle ABP$  und  $\angle BAP$  die Nebenwinkel von  $\angle ABF$  bzw.  $\angle BAE$  und die Behauptung folgt aus dem Nebenwinkelsatz 3.11.  $\square$

*Beweis von Satz 4.30.* Nach Lemma 4.31 sind die Sehnentangentenwinkel kongruent. Seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Beträge der Winkelgrößen der Sehnentangentenwinkel bezüglich

der Sehne  $BC$  und Punkt  $A$ , Sehne  $AC$  und Punkt  $B$  bzw.  $AB$  und Punkt  $C$  (siehe Abbildung 4.7), dann gilt nach Nebenwinkelsatz 3.11

$$\begin{aligned} |\overline{\angle CAB}| + \beta + \gamma &= \pi \\ \alpha + |\overline{\angle ABC}| + \gamma &= \pi \\ \alpha + \beta + |\overline{\angle BCA}| &= \pi \end{aligned}$$

Wir addieren diese drei Gleichungen und erhalten

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + IWS(\Delta ABC) = 3\pi,$$

wobei  $IWS(\Delta ABC)$  für die Innenwinkelsumme des Dreiecks  $\Delta ABC$  steht. Nach Satz 4.4 gilt  $IWS(\Delta ABC) = \pi$  und demnach folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Aus den oberen drei Gleichungen folgt damit

$$\alpha = |\overline{\angle CAB}|, \quad \beta = |\overline{\angle ABC}| \quad \text{und} \quad \gamma = |\overline{\angle BCA}|.$$

Damit haben wir (i) gezeigt. Zu (ii). Dies folgt aus der Gleichung (4.12), da im diesem Fall  $E, F$  auf der gleichen Seite wie  $P$  bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegt und  $\overline{MP}$  die Winkelhalbierende des Zentriwinkels  $\angle AMB$  ist.  $\square$

**Korollar 4.32** (Thales). *Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis,  $AB$  ein Durchmesser von  $K$  und  $C \in K \setminus \{A, B\}$  ein Punkt, dann ist  $\angle BCA$  ein rechter Winkel.*

*Beweis.* Dies folgt aus dem Peripheriewinkelsatz 4.30 mit der Tatsache, dass die Sehnen-Tangentenwinkel nach Korollar 3.44 in diesem Fall rechte Winkel sind.  $\square$

**Korollar 4.33.** *Gegeben seien ein Kreis  $K = K(M, r)$  und Punkte  $A, B, C, C' \in K$ .*

(i) *Falls  $C$  und  $C'$  auf der gleichen Seite bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegen gilt*

$$\overline{\angle ACB} \cong \overline{\angle AC'B},$$

*d.h. Peripheriewinkel mit Scheitel auf der gleichen Seite bezüglich der Sehne sind kongruent.*

(ii) *Falls  $C$  und  $C'$  auf verschiedenen Seiten bezüglich der Geraden  $(AB)$  liegen gilt*

$$|\overline{\angle ACB}| + |\overline{\angle AC'B}| = \pi,$$

*d.h. Peripheriewinkel mit Scheitel auf verschiedenen Seiten bezüglich der Sehne ergänzen sich zu  $\pi$ .*

*Beweis.* Sei  $g$  die Tangente an  $K$  im Punkte  $A$ , sowie  $E, E' \in g \setminus \{A\}$ , so dass  $E \in \mathcal{H}_-(AB, C)$  sowie  $E' \in \mathcal{H}_-(AB, C')$  Im ersten Fall ist  $\angle BAE = \angle BAE'$ . Im zweiten Fall sind  $\angle BAE$  und  $\angle E'AB$  Nebenwinkel. Die Behauptung folgt dann nach dem Peripheriewinkelsatz 4.30 und Nebenwinkelsatz 3.11.  $\square$

**Definition 4.34** (Sehnenviereck). Ein (einfaches) Viereck  $\square ABCD$  heißt *Sehnenviereck*, falls es einen Umkreis besitzt, d.h. falls es einen Kreis  $K = K(M, r)$  mit  $A, B, C, D \in K$  gibt.

**Korollar 4.35.** Sei  $\square ABCD$  ein einfaches Viereck, dann ist äquivalent

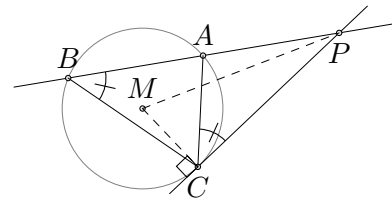
- (i) Das Viereck  $\square ABCD$  ist ein Sehnenviereck.
- (ii) Es gilt  $|\overline{\angle ABC}| + |\overline{\angle CDA}| = |\overline{\angle BCD}| + |\overline{\angle DAB}| = \pi$ .

*Beweis.* Die Richtung  $\Rightarrow$  folgt direkt aus dem obigen Korollar 4.33. Die Richtung  $\Leftarrow$  ist eine Hausaufgabe (siehe Aufgabe 9.3).  $\square$

**Satz 4.36** (Tangentensatz). Gegeben sei ein Kreis  $K = K(M, r)$  und ein Punkt  $P$  außerhalb der Kreisscheibe, d.h.  $\overline{MP} > r$ . Ferner seien  $s$  und  $t$  eine Sekante bzw. eine Tangente von  $K$  durch  $P$ . Bezeichne mit  $A, B$  die Schnittpunkte von  $s$  mit  $K$  und  $C$  den Berührungspunkt von  $t$  an  $K$ . Dann gilt

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP}^2.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung gilt  $\overline{AP} < \overline{BP}$  sonst benenne die Punkte um, d.h.  $A$  liegt zwischen  $B$  und  $P$ . Betrachte  $\angle ABC$  als Peripheriewinkel über der Sehne  $AC$ . Da  $P \in \mathcal{H}_-(AC, B)$  aus dem Peripheriewinkelsatz 4.30  $\angle ABC \cong \angle ACP$ . Außerdem gilt  $\angle BPC = \angle APB$ , da  $A \in \overrightarrow{PB}$ . Mit Ähnlichkeitssatz (*www*) folgt  $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ . Insbesondere gilt



$$\frac{AP}{CP} = \frac{CP}{BP} \iff \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP}^2.$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen. Da außerdem  $\triangle MCP$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $MP$  ist gilt zusätzlich

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{MP}^2 - r^2. \quad (4.13)$$

nach Satz des Pythagoras 4.20.  $\square$

**Satz 4.37** (Sekantensatz). Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt außerhalb der Kreisscheibe, d.h.  $\overline{MP} > r$ .

- (i) Sind  $s, s'$  Sekanten von  $K$  durch  $P$  und  $A, B$  bzw.  $A', B'$  die Schnittpunkte von  $s$  bzw.  $s'$  mit  $K$  dann gilt

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A'P} \cdot \overline{B'P}.$$

- (ii) Für jede Sekante  $s$  durch  $P$  mit  $A, B$  Schnittpunkte von  $s$  und  $K$  gilt

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{MP}^2 - r^2.$$

*Beweis.* Es reicht (ii) zu zeigen. Dies folgt aus Gleichung (4.13).  $\square$

**Satz 4.38** (Sehnensatz). *Sei  $K = K(M, r)$  ein Kreis und  $P$  innerhalb der Kreisscheibe, d.h.  $\overline{MP} < r$ .*

(i) *Sind  $AB$  und  $A'B'$  Sehnen von  $K$  die sich in  $P$  schneiden, dann gilt*

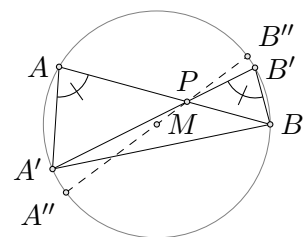
$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A'P} \cdot \overline{B'P}.$$

(ii) *Für jede Sehne durch  $P$  gilt*

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = r^2 - \overline{MP}^2.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst (i). Betrachte  $\angle A'AB$  und  $\angle A'B'B$  als Peripheriewinkel über der Sehne  $A'B$ . Da  $AP \cap (A'B) = \emptyset$  und  $PB' \cap (A'B) = \emptyset$  liegen nach Korollar 3.19 die Punkte  $A, P$  und  $B'$  auf einer Seite bezüglich  $(A'B)$ . Also ist nach Peripheriewinkelsatz 4.30

$$\angle A'AP = \angle A'AB \cong \angle BB'B = \angle BB'P.$$



Außerdem sind  $\angle A'PA$  und  $\angle BPB'$  Scheitelwinkel und nach Scheitelwinkelsatz 3.10 gilt  $\angle A'PA \cong \angle BPB'$ . Wir schließen  $\triangle A'AP \sim \triangle BB'P$  mit Ähnlichkeitssatz (www). Insbesondere

$$\frac{AP}{B'P} = \frac{A'P}{BP} \iff \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A'P} \cdot \overline{B'P}.$$

Für (ii) seien  $A'', B''$  die Schnittpunkte von  $K$  mit der Geraden  $(MP)$ . Ohne Einschränkung gilt  $\overline{PB''} \leq \overline{PA''}$ . Dann gilt mit (i)

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{A''P} \cdot \overline{B''P} = (\overline{A''M} + \overline{MP}) \cdot (\overline{B''M} - \overline{MP}) = r^2 - \overline{MP}^2.$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Definition 4.39.** Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck. Der *Umkreis* von  $\triangle ABC$  ist ein Kreis  $K = K(M, r)$  mit  $A, B, C \in K$ . Wir benennen mit  $r$  den *Umkreisradius*.

**Satz 4.40** (Sinussatz). *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck mit Umkreisradius  $R$ , dann gilt*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

mit üblicher Bezeichnungen  $a := \overline{BC}$ ,  $b := \overline{AC}$  und  $c := \overline{AB}$  sowie  $\alpha := |\angle A|$ ,  $\beta := |\angle B|$  und  $\gamma := |\angle C|$ .

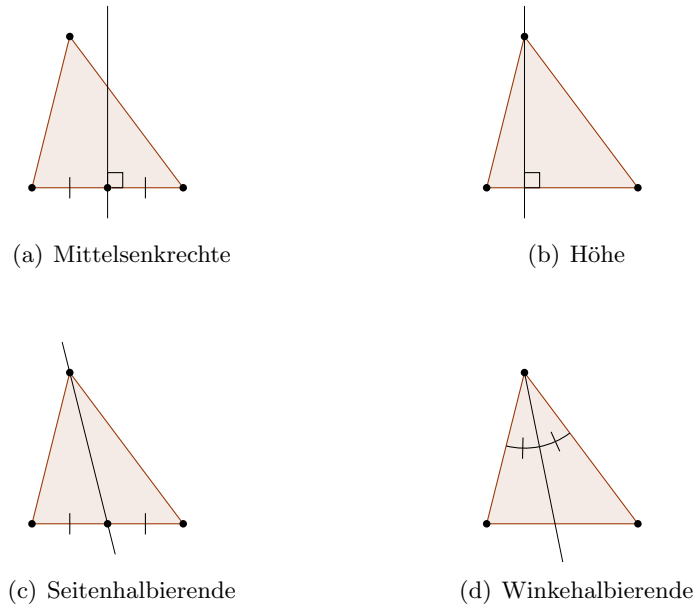


Abbildung 4.8: wichtige Geraden am Dreieck

*Beweis.* Sei  $K = K(M, R)$  der Umkreis von  $\triangle ABC$  und  $D \in K$ , so dass  $CD$  Durchmesser von  $K$  ist. Es gibt zwei Fälle. Im ersten Fall liegt  $D$  und  $A$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(BC)$ . Dann folgt mit dem Korollar aus dem Peripheriewinkelsatz 4.33, dass  $\angle A \cong \angle BDC$ . Nach Thales 4.32 ist  $\triangle DAC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $CD$  und es gilt

$$\sin \alpha = \sin |\overline{\angle BDC}| = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}.$$

Im zweiten Fall liegen  $D$  und  $A$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $(BC)$ . Wieder folgt mit Korollar 4.33, dass  $\alpha + |\overline{\angle BDC}| = \pi$  und mit den aus der Analysis bekannten Eigenschaften des Sinus gilt

$$\sin \alpha = \sin(\pi - |\overline{\angle BDC}|) = \sin |\overline{\angle BDC}| = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}.$$

Analog zeigen wir auch die anderen Gleichungen. □

## 4.6 Besondere Punkte und Geraden im Dreieck

Wir zeigen unter anderem, dass jedes Dreieck in der Euklidischen Geometrie einen Umkreis besitzt.

**Definition 4.41.** Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck. Wir definieren (siehe Abbildung 4.8)

- (i) die *Mittelsenkrechten* als die Mittelsenkrechten der Seiten  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$ ,

- (ii) die *Höhen* als die Lote der Eckpunkte auf die jeweils gegenüberliegenden Seitengeraden,
- (iii) die *Seitenhalbierenden* als die Geraden durch jeweils einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite und
- (iv) die *Winkelhalbierenden* als die Strahlen von jeweils einem Eckpunkt ins Innere des entsprechenden Winkels, sodass das Winkelmaß halbiert wird.

Ein Kreis  $K = K(I, r)$  welcher die Seitengeraden  $(BC)$ ,  $(AC)$  und  $(AB)$  jeweils tangential im Inneren der Seiten berührt heißt *Inkreis* von  $\triangle ABC$ . In diesem Fall nennen wir  $r$  den *Inkreisradius*.

**Satz 4.42.** *Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck, dann gilt:*

- (i) *Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt  $M$ , dem Mittelpunkt des Umkreises von  $\triangle ABC$ .*
- (ii) *Die Höhen schneiden sich in einem Punkt  $P_H$ , dem Orthozentrum.*
- (iii) *Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt  $P_S$ , dem Schwerpunkt. Dieser teilt die drei Strecken vom Eckpunkt zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite im Verhältnis 2 : 1.*
- (iv) *Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt  $I$ , dem Mittelpunkt des Inkreises von  $\triangle ABC$ .*

*Beweis.* Zu (i). Seien  $m_a, m_b, m_c$  sowie  $M_a, M_b, M_c$  die Mittelsenkrechten bzw. Mittelpunkte der Seiten  $BC, AC$  bzw.  $AB$ . Wir behaupten, dass  $m_b$  transversal zu  $m_c$  ist. Um dies zu zeigen nehmen wir per Widerspruch an, dass  $m_b \parallel m_c$  gilt. Dann ist  $(AC)$  transversal zu  $m_c$ , denn sonst gibt es zwei verschiedene zu  $m_c$  parallele Geraden durch  $M_b$  im Widerspruch zu Axiom (V). Nach Stufen/Wechselwinkelsatz 4.6 gilt dann  $(AC) \perp m_c$ . Da aber auch  $m_c \perp (AB)$  folgt  $AC \parallel AB$ . Das ist ein Widerspruch. Also gibt einen Schnittpunkt  $M$  in  $m_b \cap m_c$ . Mit der Eigenschaft der Mittelsenkrechten 3.31

$$d(M, C) = d(A, M) = d(M, B) =: R,$$

wobei hier die erste Gleichung folgt, da  $M \in m_b$  und die zweite da  $M \in m_c$ . Da wiederum  $d(M, C) = d(M, B)$  folgt auch  $M \in m_c$ . Also schneiden sich die Mittelsenkrechten im Punkt  $M$  und außerdem gilt  $A, B, C \in K(M, R)$  wie gewünscht.

Zu (ii). Seien  $h_a, h_b, h_c$  die Höhen von  $A, B$  bzw.  $C$ . Wir zeigen, dass es ein Dreieck  $\triangle A'B'C'$  gibt, mit der Eigenschaft, dass die Höhen von  $\triangle ABC$  die Mittelsenkrechten von  $\triangle A'B'C'$  sind. Dann folgt die Behauptung aus Schritt (i). Seien dazu  $g_A, g_B, g_C$  durch Axiom (V) eindeutig bestimmte Geraden, so dass

- $A \in g_A$  und  $g_A \parallel BC$
- $B \in g_B$  und  $g_B \parallel AC$

- $C \in g_C$  und  $g_C \parallel AB$ .

Wir behaupten, dass  $g_A$  transversal zu  $g_B$  ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir per Widerspruch an, dass  $g_A \parallel g_B$ . Da mit Axiom (V) die Relation  $\parallel$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden ist, folgern wir aus  $BC \parallel g_A$  und  $g_A \parallel g_B$ , dass  $BC \parallel g_B$  und mit  $g_B \parallel AC$ , dass  $BC \parallel AC$ . Das ist ein Widerspruch und somit muss  $g_A$  transversal zu  $g_B$  sein. Sei  $C'$  der Schnittpunkt von  $g_A$  und  $g_B$ . Analog definiere  $A'$  als den Schnittpunkt  $g_B \cap g_C$  und  $B'$  als den Schnittpunkt  $g_A \cap g_C$ . Nach Parallelogrammregel 4.8 gilt  $B'A \cong BC$  und  $BC \cong AC'$  somit  $B'A \cong AC'$ . Also ist  $A$  der Mittelpunkt von  $B'C'$ . Wieder mit Axiom (V) folgt, dass  $h_a$  transversal zu  $g_A = (B'C')$  ist und mit Stufen/Wechselwinkelsatz 4.6 gilt  $h_a \perp (B'C')$ . Demnach ist  $h_a$  die Mittelsenkrechte von  $B'C'$ . Analog zeigen wir, dass  $\{h_a, h_b, h_c\}$  die Mittelsenkrechten von  $\Delta A'B'C'$  sind. Damit folgt (ii).

Zu (iii). Seien  $M_a, M_b, M_c$  die Mittelpunkte der Seiten  $BC, AC$  bzw.  $AB$ . Es gilt nach Konstruktion

$$\frac{CA}{CM_b} = \frac{2}{1} = \frac{CB}{CM_a}.$$

Somit nach Strahlensatz 4.9  $M_a M_b \parallel AB$  und damit auch

$$\frac{AB}{M_a M_b} = \frac{2}{1}.$$

Nach Armbrustlemma 3.23 gibt es Schnittpunkte  $P \in \overline{AM_a} \cap \overline{BM_b}$  und  $P' \in \overline{AM_a} \cap \overline{BM_b}$ . Nach Axiom (II) muss gelten  $P = P' \in \overline{AM_a} \cap \overline{BM_b}$ . Erneut nach Strahlensatz 4.9 gilt

$$\frac{PA}{PM_a} = \frac{PB}{PM_b} = \frac{AB}{M_a M_b} = \frac{2}{1}.$$

Es folgt, dass  $P \in \overline{AM_a}$  im Verhältnis 2:1 teilt. Analog zeigen wir, dass es einen Schnittpunkt  $Q \in \overline{AM_a} \cap \overline{CM_c}$  gibt, welcher  $\overline{AM_a}$  im Verhältnis 2:1 teilt. Es folgt  $Q = P$  und wir definieren  $P_S := P$ . Dies ist der gemeinsame Schnittpunkt von  $\overline{AM_a}, \overline{BM_b}$  und  $\overline{CM_c}$ .

Zu (iv). Seien  $w_a, w_b, w_c$  die Winkelhalbierenden in  $A, B$  bzw.  $C$ . Nach Armbrustlemma 3.23 gibt es einen Schnittpunkt  $X \in w_a \cap BC$  und dann auch  $I \in w_b \cap AX$ . Es gilt  $I \in w_a \cap w_b$ . Seien  $F_a, F_b, F_c$  die Lotfußpunkte von  $I$  auf die Seitengeraden  $(BC), (AC)$  bzw.  $(AB)$ . Nach Aufgabe 10.1(a) gilt

$$d(I, F_b) = d(I, F_c) = d(I, F_a) =: r, \quad (4.14)$$

wobei hier die erste Gleichung aus  $I \in w_a$  und die zweite aus  $I \in w_b$  folgt. Damit gilt  $d(I, F_a) = d(I, F_b)$  und daraus folgt  $I \in w_c$ . Also schneiden sich die Winkelhalbierenden im Punkt  $I$ . Aus der Gleichung (4.14) folgt zusammen mit Satz 3.42, dass der Kreis  $K(I, r)$  der Inkreis von  $\Delta ABC$  ist.  $\square$

*Bemerkung.* Zum Beweis von (iv) in Satz 4.42 haben wir nicht das Axiom (V) verwendet. In der Tat gibt es auch in der absoluten Ebene für jedes Dreieck stets einen Inkreis.

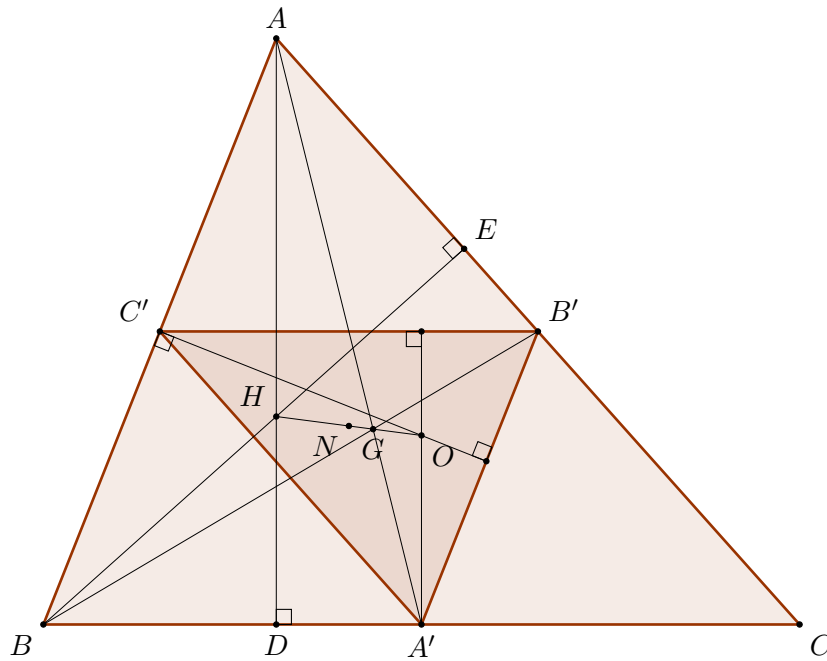


Abbildung 4.9: Konstruktion im Beweis von Satz 4.43

### Eulersche Gerade

Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck. Das Dreieck  $\triangle A'B'C'$  mit Eckpunkten gegeben durch die Mittelpunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  der Seiten  $BC$ ,  $AC$  bzw.  $AB$  heißt *Mittendreieck*.

**Satz 4.43** (Euler-Gerade). *In jedem Dreieck  $\triangle ABC$  liegt*

- *der Schwerpunkt  $G$ ,*
- *das Orthozentrum  $H$ ,*
- *der Mittelpunkt  $O$  des Umkreises und*
- *der Mittelpunkt  $N$  des Umkreises des Mittendreiecks*

*auf einer Geraden, der Euler-Geraden. Außerdem ist  $N$  der Mittelpunkt der Strecke  $HO$  und der Umkreisradius des Mittendreiecks ist halb so groß, wie der von  $\triangle ABC$ .*

*Beweis.* Sei  $\triangle A'B'C'$  das Mittendreieck von  $\triangle ABC$ . Analog zum Schritt (iii) im Beweis von Satz 4.42 zeigen wir mit Hilfe des Strahlensatzes 4.9

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = 2.$$

sowie  $BC \parallel B'C'$ ,  $AC \parallel A'C'$  und  $AB \parallel A'B'$ . Da  $A'O \perp BC$  und  $BC \parallel B'C'$  folgt auch  $A'O \perp B'C'$ . Also ist  $(A'O)$  eine Höhe von  $\triangle A'B'C'$ . Analog zeigen wir, dass  $(B'O)$

und  $(C'O)$  auch Höhen von  $\Delta A'B'C'$  sind. Daraus folgt, dass  $O$  das Orthozentrum von  $\Delta A'B'C'$  ist.

Sei  $\Phi = \Phi_{G, -\frac{1}{2}}$  die zentrische Streckung. Nach Satz 4.42 (iii) gilt  $\overline{GA'} = \frac{1}{2}\overline{GA}$  und  $G$  liegt zwischen  $A$  und  $A'$ . Daraus folgt  $\Phi(A) = A'$ . Analog zeigen wir  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$ . Da  $\Phi$  winkeltreu ist, bildet  $\Phi$  Höhen von  $\Delta ABC$  auf Höhen von  $\Delta A'B'C'$  ab und somit gilt auch  $\Phi(H) = O$ . Nach Definition der zentrischen Streckung, folgt dass  $H, G$  und  $O$  kollinear sind.

Aus  $\Phi(H) = O$  folgt mit Satz 4.14

$$\overline{O\Phi(O)} = \overline{\Phi(H)\Phi(O)} = \frac{1}{2}\overline{HO}.$$

Daher ist  $\Phi(O)$  der Mittelpunkt von  $HO$ . Mit Satz 4.14 folgt auch, dass  $\Phi$  Mittelpunkte der Seiten von  $\Delta ABC$  auf Mittelpunkte der Seiten von  $\Delta A'B'C'$  und somit auch Mittelsenkrechten von  $\Delta ABC$  auf Mittelsenkrechten von  $\Delta A'B'C'$  abbildet. Wir schließen, dass  $N = \Phi(O)$  der Mittelpunkt des Umkreises von  $\Delta A'B'C'$  ist. Auch folgt mit Satz 4.15 aus  $N = \Phi(O)$  und  $A' = \Phi(A)$

$$\overline{NA'} = \frac{1}{2}\overline{OA}.$$

Also ist der Umkreisradius von  $\Delta A'B'C'$  halb so groß, wie der von  $\Delta ABC$ . □

### Feuerbachkreis

Sei  $\Delta ABC$  ein echtes Dreieck. Die *Höhenfußpunkte* sind die Lotfußpunkte der Eckpunkte auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten.

**Satz 4.44** (Feuerbachkreis). *In jedem Dreieck liegen*

- *die Höhenfußpunkte,*
- *die Mittelpunkte der Seiten und*
- *die Mittelpunkte der Strecken von den drei Eckpunkten zum Orthozentrum*

*auf einem Kreis, dem Feuerbachkreis oder auch Neun-Punkte-Kreis. Der Mittelpunkt des Feuerbachkreises ist der Mittelpunkt der Strecke von Orthozentrum und Umkreismittelpunkt und der Radius des Feuerbachkreises ist der halbe Umkreisradius des Dreiecks.*

*Beweis.* Wir setzen die Notation aus dem Beweis von Satz 4.43 fort. Seien  $K, L, M$  die Mittelpunkte der Strecken  $AH, BH$  bzw.  $CH$ . Da  $BC$  eine gemeinsame Seite der beiden Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta HBC$  ist, gilt für die Mittelpunkte der anderen beiden Seiten nach Strahlensatz 4.9  $C'B' \parallel BC$  und  $LM \parallel BC$ , also auch  $C'B' \parallel LM$ . Analog folgt, da  $AH$  die gemeinsame Seite von  $\Delta BAH$  und  $\Delta CAH$  ist,  $C'L \parallel AH$  und  $B'M \parallel AH$ , also auch  $C'L \parallel B'M$ . Wir schließen daraus, dass  $\square B'C'LM$  ein Parallelogramm ist. Da außerdem  $BC \perp AH$  folgt, dass  $\square B'C'LM$  sogar ein Rechteck ist. Analog zeigen wir, dass  $\square A'B'KL$  und  $\square C'A'MK$  Rechtecke sind.

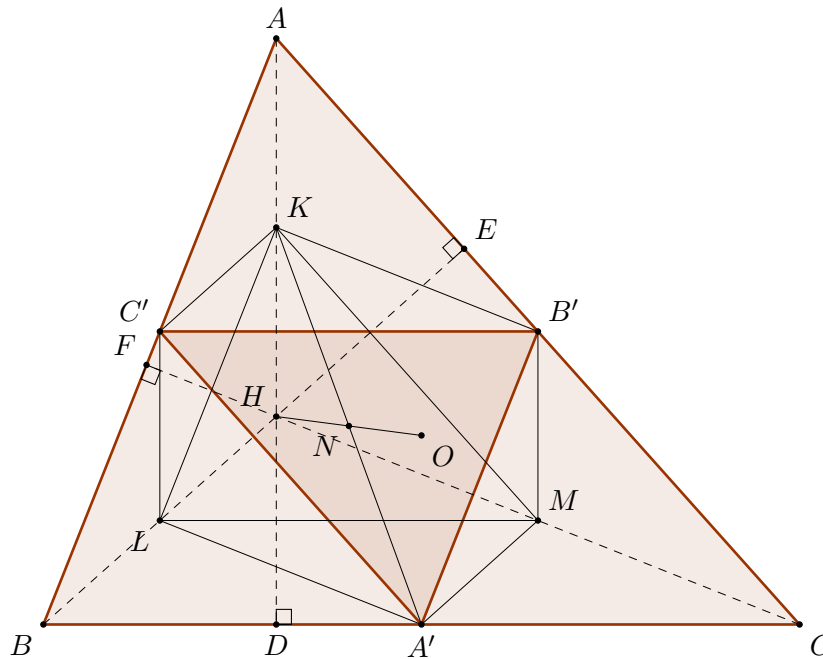


Abbildung 4.10: Konstruktion im Beweis von Satz 4.44

Sei  $\Gamma$  der Kreis mit Durchmesser  $A'K$ . Wir schließen aus der Umkehrung des Satzes von Thales (siehe Aufgabe 9.3), dass  $B', L \in \Gamma$ , da  $\square A'B'KL$  ein Rechteck ist und  $C', M \in \Gamma$  da  $\square C'A'MK$  ein Rechteck ist. Da außerdem auch  $\angle A'DK$  ein rechter Winkel ist folgt auch  $D \in \Gamma$ . Analog schließen wir  $E, F \in \Gamma$ .

Wir haben gezeigt, dass alle neun Punkte auf  $\Gamma$  liegen. Insbesondere ist  $\Gamma$  der Umkreis des Mittendreiecks  $\triangle A'B'C'$  und alle weiteren Aussagen folgen aus Satz 4.43.  $\square$

*Bemerkung.* (i) Das eigentliche Theorem von Feuerbach besagt, dass der Feuerbachkreis sowohl den Inkreis als auch alle drei Ankreise tangential berührt. Diese Aussage können wir vielleicht später beweisen.

(ii) Betrachten wir den Inkreis, den Feuerbachkreis und den Umkreis, dann sind die Seiten des Dreiecks Strecken so dass

- (a) die Endpunkte auf dem Umkreis liegen,
- (b) die Mittelpunkte auf dem Feuerbachkreis liegen und
- (c) den Inkreis tangential berühren.

Sherman fand 1993 überraschenderweise heraus, dass es stets noch genau eine weitere Strecke mit den Eigenschaften (a) – (c) gibt. Diese nannte er die *vierte Seite* des Dreiecks, siehe auch B.F. Sherman, The Fourth Side of a Triangle, *Mathematics Magazine*, Vol. 66, No. 5 (Dec., 1993), pp. 333-337.

## Simonsche Gerade

**Definition 4.45.** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck und  $P$  ein Punkt. Das Dreieck  $\triangle A_P B_P C_P$  mit Eckpunkten gegeben aus den Fußpunkten  $A_P, B_P$  und  $C_P$  von  $P$  auf die Seitengeraden  $(BC), (AC)$  bzw.  $(AB)$  heißt *Fußpunktdreieck*.

**Satz 4.46.** Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck und  $P$  ein Punkt. Dann gilt für die Seitenlängen des Fußpunktdreiecks  $\triangle A_P B_P C_P$

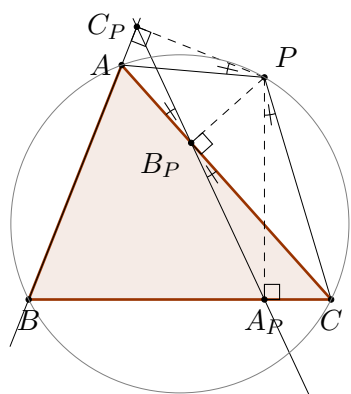
$$\overline{B_P C_P} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AP}}{2R}, \quad \overline{A_P C_P} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{BP}}{2R} \quad \text{und} \quad \overline{A_P B_P} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{CP}}{2R},$$

wobei  $R$  der Umkreisradius von  $\triangle ABC$  ist.

*Beweis.* Nach Umkehrung des Satzes des Thales 4.32 liegen  $B_P$  und  $C_P$  dem Kreis mit Durchmesser  $AP$ . Wir wenden den Sinussatz 4.40 auf die Dreiecke  $\triangle A B_P C_P$  und  $\triangle ABC$  an

$$\frac{\overline{B_P C_P}}{\overline{AP}} = \sin \overline{\angle A} = \frac{\overline{BC}}{2R}.$$

Daraus folgt die Behauptung. Die anderen Gleichungen folgen analog. □



Wenn  $P = O$  der Umkreismittelpunkt ist, gilt  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = R$  und wir sehen, dass das Fußpunktdreieck  $\triangle A_P B_P C_P$  in diesem Fall das Mittendreieck ist. Wir analysieren, unter welcher Bedingung das Fußpunktdreieck ausgeartet ist. Dies führt zur Simonschen Gerade.

**Satz 4.47** (Simson-Gerade). Sei  $\triangle ABC$  ein echtes Dreieck und  $P$  ein Punkt. Das Fußpunktdreieck  $\triangle A_P B_P C_P$  ist genau dann ausgeartet, wenn  $P$  auf dem Umkreis von  $\triangle ABC$  liegt.

*Beweis.* Angenommen  $P$  liegt auf dem Umkreis von  $\triangle ABC$ . Wir zeigen, dass dann  $\triangle A_P B_P C_P$  ausgeartet ist. Ohne Einschränkung gilt nach möglicher Weise Umbenennen der Eckpunkte  $P \in \text{Inn} \angle B$ . Mit Umkehrung des Satzes von Thales 4.32 liegen die Punkte  $A_P$  und  $C_P$  auf dem Kreis mit Durchmesser  $BP$ . Auch liegen  $B$  und  $P$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $(A_P C_P)$ . Nach Voraussetzung ist  $\square ABCP$  ein Sehnenviereck und somit liegen  $B$  und  $P$  auf verschiedenen Seiten bezüglich  $(AC)$ . Außerdem gilt  $\angle B = \angle ABC = \angle C_P B A_P$  da  $P \in \text{Inn} \angle ABC$ . Damit gilt nach Peripheriewinkelsatz 4.33

$$|\overline{\angle APC}| = \pi - |\overline{\angle B}| = |\overline{\angle C_P P A_P}|.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten das Winkelmaß von  $\angle A P A_P$  ab und erhalten daraus

$$\angle A_P P C \cong \angle C_P P A.$$

Wieder gilt mit Umkehrung des Satzes von Thales, dass  $B_P$  und  $C_P$  auf dem Kreis mit Durchmesser  $AP$  liegen sowie  $A_P$  und  $B_P$  mit Durchmesser  $CP$ . Auch liegen  $P$  und  $B_P$

auf der gleichen Seite bezüglich sowohl  $(AC_P)$  als auch  $(A_P C)$  da  $P \in \text{Inn} \angle B$ . Damit gilt nach Peripheriewinkelsatz 4.33 und letzter Gleichung

$$\angle A_P B_P C \cong \angle A_P P C \cong \angle C_P P A \cong \angle C_P B_P A.$$

Es folgt nach Umkehrung des Scheitelwinkelsatzes (siehe Aufgabe 2.1) dass  $A_P, B_P$  und  $C_P$  kollinear sind.

Sei nun umgekehrt  $\Delta A_P B_P C_P$  ausgeartet. Wir gehen wieder davon aus, dass nach etwaigem Umbenennen der Eckpunkte  $P \in \text{Inn} \angle B$ . Wir können nun die obigen Schritte alle umkehren und erhalten, dass  $P$  auf dem Umkreis von  $\Delta ABC$  liegt.  $\square$

### Satz von Ceva und Menelaos

Es gibt ein Kriterium, dass sich drei Geraden durch die Eckpunkte eines Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Das ist der Satz von Ceva. Analog gibt es ein Kriterium darüber wenn drei Punkte auf den Seitengeraden kollinear sind. Das ist der Satz von Menelaos. Um diese zu beweisen müssen wir ein wenig vorgreifen und den Flächeninhalt für das Dreieck behandeln. Mit etwas Doppeldeutigkeit bezeichnen wir auch mit der *Höhe* eines Eckpunktes in einem Dreieck, die Länge der Strecke dieses Eckpunktes zum Lotfußpunkt auf die gegenüberliegende Seitengerade.

**Satz 4.48** (Flächeninhalt von Dreiecken). *Sei  $\Delta ABC$  ein echtes Dreieck und  $h_a, h_b, h_c$  die Höhen der Eckpunkte  $A, B$  bzw.  $C$ . Dann gilt*

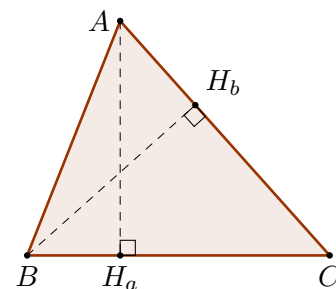
$$h_a \cdot \overline{BC} = h_b \cdot \overline{AC} = h_c \cdot \overline{AB}.$$

Wir definieren den Flächeninhalt von  $\Delta ABC$  als

$$\mu(ABC) := \mu(\Delta ABC) := \frac{1}{2} h_a \cdot \overline{BC}. \quad (4.15)$$

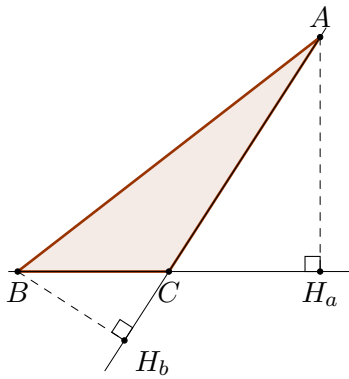
*Beweis.* Bezeichne mit  $H_a, H_b, H_c$  die Lotfußpunkte der Eckpunkte  $A, B, C$  auf die jeweils gegenüberliegenden Seitengeraden. Angenommen  $\angle C$  ist ein spitzer Winkel, dann gilt  $H_a \in \overline{CB}$  denn sonst folgt mit Nebenwinkelsatz 3.11, dass das Dreieck  $\Delta AH_a C$  in den Eckpunkten  $H_a$  und  $C$  zwei Innenwinkel mit Summe der Winkelmaße größer als  $\pi$  hat, im Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 4.4. Genauso folgern wir, dass  $H_b \in \overline{CA}$ . Es gilt also

$$\angle H_a C A = \angle B C A = \angle B C H_b.$$



Im Fall, dass  $\angle C$  ein stumpfer Winkel ist, liegt mit einer analogen Begründung  $C$  zwischen sowohl  $H_a$  und  $B$  als auch  $A$  und  $H_b$ . Demnach sind  $\angle H_a C A$  und  $\angle B C H_b$  Scheitelwinkel und nach dem Scheitelwinkelsatz 3.10 gilt

$$\angle H_a C A \cong \angle B C H_b.$$



In beiden Fällen sind die Innenwinkel in den Dreiecken  $\Delta H_aCA$  und  $\Delta BCH_b$  im Eckpunkt  $C$  kongruent und da diese Dreiecke noch jeweils einen weiteren rechten Innenwinkel haben, stimmt mit der Innenwinkelsumme 4.4 auch noch das Winkelmaß des dritten Innenwinkels überein und wir schließen aus dem Ähnlichkeitssatz (www), dass  $\Delta H_aCA \sim \Delta BCH_b$ . Insbesondere folgt

$$\frac{AC}{AH_a} = \frac{BC}{BH_b}.$$

Damit folgt  $h_a \cdot \overline{BC} = h_b \cdot \overline{AC}$ . Die andere Gleichung folgt analog.  $\square$

**Satz 4.49** (Eigenschaften des Flächeninhalts). *Sei  $\Delta ABC$  ein echtes Dreieck.*

(i) *Sei  $D \in BC \setminus \{B, C\}$ , dann gilt*

$$\mu(\Delta ABC) = \mu(\Delta ABD) + \mu(\Delta ADC).$$

(ii) *Sei  $\Delta A'B'C'$  ein Dreieck mit  $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$ , dann gilt*

$$\mu(\Delta A'B'C') = \mu(\Delta ABC).$$

(iii) *Sei  $\Delta A'B'C'$  ein Dreieck mit  $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ , dann gilt*

$$\mu(\Delta A'B'C') = k^2 \mu(\Delta ABC),$$

wobei  $k = A'B'/AB > 0$ .

*Beweis.* Zu (i). Sei  $h_a$  die Höhe vom Eckpunkt  $A$  im Dreieck  $\Delta ABC$ . Dies ist auch die Höhe vom Eckpunkt  $A$  in den Dreiecken  $\Delta ABD$  und  $\Delta ADC$ . Es gilt, da  $D$  zwischen  $B$  und  $C$  liegt.

$$\mu(\Delta ABC) = \frac{1}{2} h_a \overline{BC} = \frac{1}{2} h_a (\overline{BD} + \overline{DC}) = \mu(\Delta ABD) + \mu(\Delta ADC).$$

Zu (ii). Sei  $\Phi$  die Isometrie mit  $\Phi(A) = A'$ ,  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$ . Seien  $H_a, H'_a$  die Höhenfußpunkte von  $A$  bzw.  $A'$ . Da  $\Phi$  winkeltreu ist gilt  $\Phi(H_a) = H'_a$ . Wir berechnen

$$\mu(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \overline{AH_a} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{A'H'_a} \cdot \overline{B'C'} = \mu(\Delta A'B'C').$$

Zu (iii). Sei  $\Phi$  die Ähnlichkeitsabbildung mit  $\Phi(A) = A'$ ,  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$ . Wieder ist  $\Phi$  winkeltreu und damit  $\Phi(H_a) = H'_a$ . Mit Satz 4.15 gilt

$$\mu(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2} \overline{A'H'_a} \cdot \overline{B'C'} = k^2 \frac{1}{2} \overline{AH_a} \cdot \overline{BC} = k^2 \mu(\Delta ABC).$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt.  $\square$

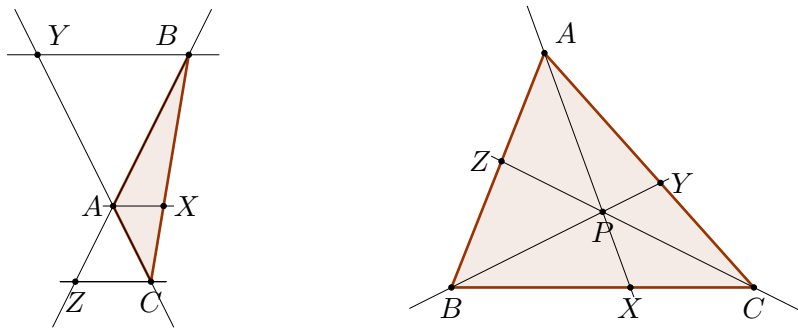


Abbildung 4.11: Konstruktion im Beweis von Satz 4.50.

Für jede Gerade  $(AB)$  und Punkt  $P \in (AB) \setminus \{A, B\}$  oder  $P = \infty$  definieren wir das *Teilungsverhältnis*

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{PB} := \begin{cases} \frac{AP}{PB} & \text{wenn } P \in AB \\ -\frac{AP}{PB} & \text{wenn } P \in (AB) \setminus AB \\ -1 & \text{wenn } P = \infty. \end{cases}$$

**Satz 4.50** (Ceva). *Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta ABC$  sowie Punkte  $X, Y$  und  $Z$  auf den Seitengeraden  $(BC) \setminus \{B, C\}$ ,  $(AC) \setminus \{A, C\}$  bzw.  $(AB) \setminus \{A, B\}$ , dann ist äquivalent:*

(i) *Die Geraden  $(AX)$ ,  $(BY)$  und  $(CZ)$  schneiden sich entweder in einem gemeinsamen Punkt oder  $AX \parallel BY \parallel CZ$ .*

(ii) *Es gilt*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{XC} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{YA} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{ZB} = 1.$$

*Beweis.* Im Beweis zeigen wir die etwas stärkere Aussage, welche erlaubt, dass  $X, Y, Z = \infty$ , wobei dann etwa im Fall  $X = \infty$  die Gerade  $(AX)$  durch die zu  $(BC)$  parallele Gerade durch  $A$  ersetzt wird.

Wir zeigen  $(i) \Rightarrow (ii)$ . Angenommen  $AX \parallel BY \parallel CZ$ . In diesem Fall ist  $X = \infty$  nicht möglich, denn sonst wäre  $BY \parallel BC$  und somit  $Y = C$ . Dies wurde aber ausgeschlossen. Genauso muss gelten  $Y \neq \infty$  und  $Z \neq \infty$ . Wir berechnen mit Strahlensatz 4.9 und Lemma 4.51 unten

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AY}{CA} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{CY}{CA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

wobei wir erste Gleichung den Strahlensatz von  $C$  und in der letzten den Strahlensatz von  $A$  aus verwendet haben.

Es bleibt die Vorzeichen der drei Teilungsverhältnisse zu überprüfen. Angenommen ein Vorzeichen ist negativ, d.h. ein Punkt liegt nicht in der entsprechenden Strecke, etwa  $X \notin BC$ . Dann liegt nach etwaigen Umbenennen der Punkte  $B$  zwischen  $C$  und  $X$ .

Nach Satz von Pasch 3.22 im Dreieck  $\triangle ACX$  und  $BY \parallel AX$  schneidet die Gerade  $(BY)$  die Seite  $AC$ , also  $Y \in AC$ . Erneut nach Pasch im Dreieck  $\triangle AYB$  und  $CZ \parallel BY$  folgt, dass  $Z \notin AB$ . Somit haben wir  $(ii)$  für diesen Fall gezeigt.

Angenommen  $(AX) \cap (BY) \cap (CZ) = \{P\}$ . Betrachte den Fall, dass kein Punkt  $X, Y, Z = \infty$ . Da entsprechende Dreiecke jeweils die gleiche Höhe haben, gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\mu(ABX)}{\mu(AXC)} = \frac{\mu(PBX)}{\mu(PXC)} = \frac{\mu(ABP)}{\mu(ACP)}.$$

Die letzte Gleichung folgt aus Lemma 4.51 und  $\mu(ABP) = \mu(ABX) \pm \mu(PBX)$  mit – genau dann wenn  $P \in AX$ . Analog zeigen wir

$$\frac{CY}{YA} = \frac{\mu(BCP)}{\mu(BAP)} \quad \text{und} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{\mu(CAP)}{\mu(CBP)}.$$

Mit diesen Gleichungen berechnen wir

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = \frac{\mu(ABP)}{\mu(ACP)} \frac{\mu(BCP)}{\mu(BAP)} \frac{\mu(CAP)}{\mu(CBP)} = 1,$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass der Flächeninhalt des Dreiecks nicht von der Anordnung der Eckpunkte abhängt, etwa  $\mu(ABP) = \mu(BAP)$ . Im Fall, dass genau ein Punkt  $X, Y, Z = \infty$ , etwa  $Z = \infty$ , haben wir

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = \frac{\mu(ABP)}{\mu(ACP)} \frac{\mu(BCP)}{\mu(BAP)} = \frac{\mu(ACP)}{\mu(BCP)} = 1,$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass  $\triangle ACP$  und  $\triangle BCP$  die gleiche Höhe von  $A$  bzw.  $B$  haben, da nach Voraussetzung gilt  $AB \parallel CP$ . Gelte nun schließlich, dass zwei Punkte  $X, Y, Z = \infty$ , etwa  $Z = \infty$  und  $Y = \infty$ , dann ist  $\square ABCP$  ein Parallelogramm und somit  $X$  der Mittelpunkt der Diagonale  $BC$  und es gilt  $\overline{BX}/\overline{XC} = 1$ . Hieraus folgt auch, dass  $X = \infty$  unmöglich ist.

Wir müssen noch die Vorzeichen der Teilungsverhältnisse überprüfen. Wenn  $P \in \text{Inn} \triangle ABC$ , dann folgt nach Armbrustlemma 3.23, dass die drei Punkte  $X, Y, Z$  im Inneren der jeweiligen Strecke liegen, also alle Vorzeichen positiv sind. Wenn  $P \notin \text{Inn} \triangle$ , liegt  $P$  auf jeden Fall im Inneren eines Innenwinkels, d.h. nach etwaigem Umbenennen der Eckpunkte gilt  $P \in \text{Inn} \angle A$ . Damit folgt aus dem Armbrustlemma 3.23,  $X \in BC$ . Da in diesem Fall  $P$  nicht im inneren des Dreiecks liegt, liegt  $X$  zwischen  $A$  und  $P$ . Mit Satz von Pasch 3.22 folgt, dass die Gerade  $(CP)$  keine der Seiten von  $\triangle AXB$  schneidet, da sie weder die Seite  $AX$  noch die Seite  $XB$  schneiden kann. Also folgt  $Z \notin AB$ , wobei hier  $Z = \infty$  möglich ist. Analog zeigen wir, dass  $Y \notin AC$ . Somit haben wir auch  $(ii)$  für diesen Fall gezeigt.

Wir zeigen  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Angenommen es gilt  $AX \parallel BY$ , dann sei  $Z' \in (AB)$  so dass  $CZ' \parallel AX$ . Nach dem bereits gezeigten Schritt  $(i) \Rightarrow (ii)$  und Voraussetzung  $(ii)$  folgt für die Teilungsverhältnisse

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1 = \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}}. \quad (4.16)$$

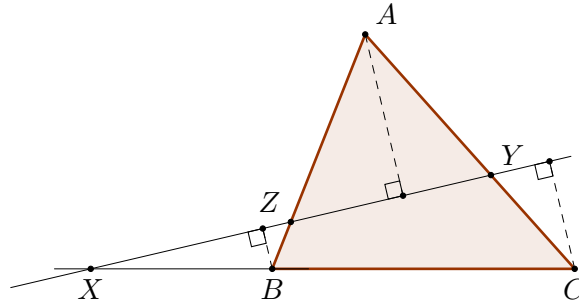


Abbildung 4.12: Konstruktion im Beweis von Satz 4.52.

Damit folgt  $Z = Z'$  und somit auch (i). Angenommen es gibt einen Schnittpunkt  $P$  in  $(AX) \cap (BY)$ . Sei  $Z'$  der Schnittpunkt von  $(CP)$  und  $(AB)$ , wobei hier  $Z' = \infty$ , wenn  $CP \parallel AB$ . Nun schließen wir erneut mit (4.16), dass  $Z' = Z$  und damit (i).  $\square$

**Lemma 4.51.** Gegeben  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $b, d, b + d \neq 0$  sowie  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , dann gilt  $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ .

*Beweis.* Wir multiplizieren die Gleichung der Voraussetzung mit  $bd \neq 0$  und erhalten  $ad = cb$ . Damit folgt

$$a(b+d) = ab + ad = ab + cb = (a+c)b.$$

Die Behauptung folgt dann nach Division dieser Gleichung mit  $b(b+d)$ .  $\square$

**Satz 4.52** (Menelaos). Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  sowie Punkte  $X, Y$  und  $Z$  auf den Seitengeraden  $(BC) \setminus \{B, C\}$ ,  $(AC) \setminus \{A, C\}$  bzw.  $(AB) \setminus \{A, B\}$ , dann ist äquivalent:

(i) Die Punkte  $X, Y, Z$  liegen auf einer Geraden.

(ii) Es gilt

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1.$$

*Beweis.* Wir erlauben im Beweis, dass einer der Punkte  $X, Y, Z = \infty$  und ersetze dann (i) durch  $YZ \parallel BC$ ,  $XZ \parallel AC$  bzw.  $XY \parallel AB$ .

Wir zeigen (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sei keiner der Punkte  $X, Y, Z = \infty$  und  $g = (XY) = (YZ)$ . Bezeichne mit  $h_a, h_b, h_c$  die Höhen von  $A, B, C$  auf  $g$ . Nach Strahlensatz von  $X, Y$  und  $Z$  folgt

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} \cdot \frac{h_a}{h_b} = 1.$$

Sei einer der Punkte  $X, Y, Z = \infty$ , etwa  $Z = \infty$  nach etwaigem Umbenennen der Punkte. Dann gilt

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{h_a} = 1, \quad (4.17)$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass  $AB \parallel g$  und damit  $h_a = h_b$  nach Parallelogrammregel 4.8.

Nach Satz von Pasch 3.22 ist entweder genau eins oder genau drei Vorzeichen der Teilungsverhältnisse negativ. Damit wurde (ii) gezeigt.

Wir zeigen (ii)  $\Rightarrow$  (i). Angenommen  $XY \parallel AB$ , dann setze  $Z' = \infty$ , sonst sei  $Z'$  der Schnittpunkt  $(XY) \cap (AB)$ . Nach der bereits bewiesenen Richtung (i)  $\Rightarrow$  (ii) und der Voraussetzung folgt (4.16) mit  $-1$  anstatt von  $1$ . Wir schließen  $Z = Z'$  und damit (i).  $\square$

## 4.7 Flächeninhalt

Unter dem Flächeninhalt verstehen wir eine Funktion  $\mu$ , welche möglichst vielen Teilmengen von  $\mathcal{E}$  eine nicht-negative Zahl zuordnet, die anschaulich gesprochen die „Größe“ dieser Menge misst, analog zum Begriff der Länge von Intervallen als Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Vor diesem Hintergrund macht es Sinn folgende offenbar natürliche Eigenschaften zu fordern: Für Teilmengen  $\Omega, \Omega' \subset \mathcal{E}$  gilt

- (*Additivität*)  $\mu(\Omega \cup \Omega') = \mu(\Omega) + \mu(\Omega')$  falls  $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$ ,
- (*Invarianz*)  $\mu(\Omega) = \mu(\Omega')$  falls  $\Omega \cong \Omega'$ , d.h.  $\Omega' = \Phi(\Omega)$  für eine Isometrie  $\Phi$ ,
- (*Monotonie*)  $\mu(\Omega') \leq \mu(\Omega)$  wenn  $\Omega' \subset \Omega$ .

Die rigorose Konstruktion und Theorie von solchen Funktionen ist Inhalt einer anderen Vorlesung. Wir wollen hier aber dennoch grob eine Konstruktion behandeln. Dazu identifizieren wir zunächst Teilmengen, welche wir gut messen können.

**Definition 4.53.** Sei  $\Delta ABC$  ein echtes Dreieck. Die *Dreiecksfläche*  $\mathcal{D}ABC$  ist gegeben durch

$$\mathcal{D}ABC := \text{Inn } \Delta ABC \cup BC \cup AC \cup AB,$$

wobei die *Randpunkte* die Punkte in den Seiten von  $\Delta ABC$  sind. Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathcal{E}$  heißt *triangulierbar* oder auch *zerlegbar*, wenn es Dreiecksflächen  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$  gibt, so dass für  $i \neq j$  die Schnittmenge  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$  nur aus gemeinsamen Randpunkten besteht und es gilt

$$\Omega = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k.$$

Dabei heißt die Menge  $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k\}$  *Triangulierung* oder auch *Zerlegung* von  $\Omega$ .

Wir erhalten solche Mengen durch Polygone oder auch  $n$ -Ecke. Das sind Verallgemeinerungen von Dreiecken und sie sind wie folgt definiert. Die *Randpunkte* einer Strecke  $AB$  ist definiert als  $\{A, B\}$ . Ein (*einfaches*) *Polygon*  $\mathcal{P} = \mathcal{P}A_1A_2 \dots A_n$  ist ein geordnetes Tupel von Punkten  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , so dass sich die Strecken  $A_iA_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n$  mit  $A_{n+1} := A_1$  paarweise nur in gemeinsamen Randpunkten schneiden. Das Polygon ist *nicht ausgeartet*, wenn  $A_{i-1}, A_i$  und  $A_{i+1}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  mit  $A_0 := A_n$  und  $A_{n+1} := A_1$  nicht kollinear sind. Ein Polygon mit  $n = 3$  ist also nichts weiter als ein Dreieck und ein Polygon mit  $n = 4$  ist ein Viereck. Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathcal{E}$  heißt *Komponente* oder auch *Wegkomponente*, wenn für je zwei Punkte  $A, B \in \Omega$  es eine stetige Abbildung gibt  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = A$  und  $\gamma(1) = B$ . Zum Beispiel sind konvexe Mengen Komponenten.

**Satz 4.54** (Jordan). Sei  $\mathcal{P}A_1A_2 \dots A_n$  ein Polygon, dann besteht das Komplement

$$\mathcal{E} \setminus (A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1)$$

aus zwei Komponenten  $\text{Inn } \mathcal{P}$  und  $\text{Out } \mathcal{P}$ , wobei  $\text{Inn } \mathcal{P}$  beschränkt ist, d.h. im Inneren eines Kreises enthalten ist. Definiere die Polygonfläche

$$\overline{\mathcal{P}} := \text{Inn } \mathcal{P} \cup A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1.$$

Jede solche Polygonfläche  $\overline{\mathcal{P}}$  ist triangulierbar.

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes ist eine Zusatzaufgabe. □

Bevor wir weiter auf den Flächeninhalts eingehen, wollen wir ein alternatives Konzept zum Flächeninhalt beschreiben.

**Definition 4.55.** Zwei Mengen  $\Omega, \Omega' \subset \mathcal{E}$  heißen

- *zerlegungsgleich*, wenn es Triangulierungen  $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k\}$  und  $\{\mathcal{D}'_1, \dots, \mathcal{D}'_k\}$  von  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$  gibt, so dass  $\mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}'_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$ .
- *ergänzungsgleich*, wenn es zerlegungsgleiche Menge  $\Gamma, \Gamma' \subset \mathcal{E}$  gibt und  $\Omega \cup \Gamma$  zerlegungsgleich zu  $\Omega' \cup \Gamma'$  ist.

Zwei Polygone  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  heißen *zerlegungsgleich* (bzw. *ergänzungsgleich*) wenn die zugehörigen Polygonflächen  $\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{P}'}$  zerlegungsgleich (bzw. ergänzungsgleich) sind.

Diese Konzepte wurde in der Antike verwendet und gehen dem Begriff des Flächeninhalts voraus. Viele Sätze aus der Geometrie, etwa der Satz des Pythagoras, waren ursprünglich Aussagen über die Zerlegungsgleichheit von geometrischen Figuren. Heute wirkt dies im Anbetracht der einfachen Formeln für Flächeninhalte unnötig kompliziert. Auf der anderen Seite ist es aber, wie wir bereits angedeutet haben, gar nicht so einfach einen klaren sauberen Flächeninhaltsbegriff zu definieren. In jedem Fall ist es nicht verkehrt die Begriffe der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit im Hinterkopf zu behalten, nicht zuletzt, weil sie sehr intuitiv sind und sich gut im Unterricht einsetzen lassen.

Nun kommen wir zum Flächeninhalt von triangulierbaren Mengen. Man kann leicht sehen, dass es für eine gegebene triangulierbare Menge  $\Omega$  mehrere verschiedene Triangulierungen gibt. Die Schwierigkeit des nächsten Satzes ist es zu zeigen, dass der Flächeninhalt nicht von der Wahl der Triangulierung abhängt.

**Satz 4.56** (Flächeninhalt von triangulierbaren Mengen). Sei  $\Omega$  eine triangulierbare Menge sowie  $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n\}$  und  $\{\mathcal{D}'_1, \dots, \mathcal{D}'_k\}$  Triangulierungen von  $\Omega$ , dann gilt

$$\mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2) + \dots + \mu(\mathcal{D}_n) = \mu(\mathcal{D}'_1) + \mu(\mathcal{D}'_2) + \dots + \mu(\mathcal{D}'_k),$$

wobei  $\mu(\mathcal{D}_j)$  und  $\mu(\mathcal{D}'_j)$  der Flächeninhalt der Dreiecksflächen  $\mathcal{D}_i$  bzw.  $\mathcal{D}'_j$  ist (siehe 4.48). Wir definieren den Flächeninhalt von  $\Omega$  durch

$$\mu(\Omega) := \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2) + \dots + \mu(\mathcal{D}_k).$$

*Beweis.* Die Idee des Beweises ist es eine gemeinsame Verfeinerung der beiden Triangulierungen zu finden und dann die Eigenschaft 4.49 (i) des Flächeninhalts für Dreiecksflächen anzuwenden. Für einen detaillierten Beweis siehe [1, Satz 7.4].  $\square$

Es ist nun leicht mit Satz 4.49 zu überprüfen, dass der so definierte Flächeninhalt die geforderten Eigenschaften von Anfang des Kapitels erfüllt. Für direkte Berechnungen des Flächeninhalts von Polygonflächen eignet sich der folgende Satz.

**Satz 4.57.** *Sei  $\mathcal{P} = \mathcal{P}P_1P_2 \dots P_n$  ein Polygon und  $O$  ein Punkt. Der Flächeninhalt der Polygonfläche  $\overline{\mathcal{P}}$  berechnet sich durch*

$$\mu(\overline{\mathcal{P}}) = \left| \overline{\mu}(OP_1P_2) + \overline{\mu}(OP_2P_3) + \dots + \overline{\mu}(OP_{n-1}P_n) + \overline{\mu}(OP_nP_1) \right|,$$

wobei mit  $\overline{\mu}(ABC) = \text{Vz}\angle ABC \cdot \mu(ABC)$  der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta ABC$  gemeint ist.

*Beweis.* Der Beweis dieses Satzes ist auch eine Zusatzaufgabe.  $\square$

Der nächste Satz zeigt auf, dass die gegebenen Begriffe letztendlich das selbe beschreiben.

**Satz 4.58** (Bolyai-Gerwin-Wallace). *Seien  $\Omega$  und  $\Omega'$  zwei triangulierbare Mengen, dann gilt*

$$\mu(\Omega) = \mu(\Omega') \iff \Omega \text{ und } \Omega' \text{ sind zerlegungsgleich.}$$

*Beweis.* Auch hier geben wir nur die grobe Idee des Beweises wieder. Eine etwas ausführlichere Version ist in [2, Kapitel 1.4] zu finden. Die Richtung  $\Leftarrow$  ist leicht. In der Tat folgt nach Satz 4.49 aus  $\mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}'_i$  auch  $\mu(\mathcal{D}_i) = \mu(\mathcal{D}'_i)$  und somit  $\mu(\Omega) = \mu(\Omega')$ . Wir zeigen die Richtung  $\Rightarrow$ . Nehmen wir also an, dass  $\mu(\Omega) = \mu(\Omega')$  gilt. Wir müssen zwei Triangulierungen von  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$  beschreiben, welche aus Dreiecken besteht, die paarweise kongruent sind. Dies erfolgt durch die Angabe eines Algorithmus in drei Schritten.

- *Schritt 1:* Zerlege jedes Dreieck der Triangulierungen jeweils in ein Rechteck.
- *Schritt 2:* Zerlege jedes Rechteck aus dem letzten Schritt in ein anderes Rechteck mit jeweils einer konstanten Seitenlänge gleich 1.
- *Schritt 3:* Stapele die Rechtecke welche zu  $\Omega$  und  $\Omega'$  gehören entlang der konstanten Seitenlänge zu einem Rechteck  $\mathcal{R}$  bzw.  $\mathcal{R}'$ . Da  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}'$  nach Konstruktion zerlegungsgleich zu  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$  ist, gilt  $\mu(\mathcal{R}) = \mu(\Omega)$  und  $\mu(\mathcal{R}') = \mu(\Omega')$ . Da jeweils eine Seitenlänge von  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}'$  gleich 1 und diese Rechtecke den gleichen Flächeninhalt haben, sind sie kongruent. Wir haben also die gewünschten Zerlegungen gefunden.

$\square$

Wie sich herausstellt ist dieses Resultat alles andere als natürlich. In der Tat hat Max Dehn in seiner Habilitation bewiesen, dass die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen falsch ist. Er zeigte, dass der reguläre Tetraeder nicht zerlegungsgleich zum Würfel gleichen Volumens ist.

Bisher können wir nur triangulierbare Teilmengen messen. Es gibt aber viele Teilmengen, die nicht triangulierbar sind, etwa die Kreisscheibe, die wir aber dennoch messen wollen. Wir erweitern die Flächeninhaltsfunktion auf solche Mengen durch Approximation. Dazu nennen wir eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathcal{E}$  *messbar*, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  triangulierbare Mengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  gibt so dass

$$\mathcal{P} \subset \Omega \subset \mathcal{Q}, \quad \text{und} \quad \mu(\mathcal{Q}) - \mu(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Für messbare Mengen können wir nun einen Flächeninhalt definieren.

**Satz 4.59** (Flächeninhalt von messbaren Mengen). *Sei  $\Omega$  eine messbare Menge, dann gibt es ein eindeutiges  $\mu \geq 0$ , so dass für alle triangulierbaren Mengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  mit  $\mathcal{P} \subset \Omega \subset \mathcal{Q}$  gilt*

$$\mu(\mathcal{P}) \leq \mu \leq \mu(\mathcal{Q}).$$

*Wir definieren den Flächeninhalt von  $\Omega$  durch  $\mu(\Omega) := \mu$ .*

*Beweis.* Siehe [1, Satz 7.6]. □

Es gibt das folgende Kriterium um herauszufinden, ob eine Teilmenge messbar ist, welches auch eine Berechnung des Flächeninhaltes liefert.

**Satz 4.60** (Kriterium für messbare Mengen). *Es Teilmenge  $\Omega \subset \mathcal{E}$  ist messbar, wenn es zwei Folgen von triangulierbare Mengen  $(\mathcal{P}_n)$  und  $(\mathcal{Q}_n)$  gibt, so dass  $\mathcal{P}_n \subset \Omega \subset \mathcal{Q}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{Q}_n) - \mu(\mathcal{P}_n) = 0, .$$

*Außerdem konvergiert in diesem Fall  $\mu(\mathcal{P}_n)$  und es gilt*

$$\mu(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{P}_n).$$

*Beweis.* Siehe [1, Satz 7.6]. □

Insbesondere ist die Kreisfläche  $D(M, r) = \{P \mid \overline{PM} \leq r\}$  messbar und hat einen Flächeninhalt von  $\pi r^2$ . Es gibt aber auch tatsächlich beschränkte Teilmengen, die nicht messbar sind. Eine solche genau anzugeben würde hier zu weit führen.

## 4.8 Inversion am Kreis

Die Inversion am Kreis ist ein sehr hilfreiches Werkzeug womit Aussagen über Kreise in Aussagen über Geraden und umgekehrt übersetzt werden können. Auch werden wir damit die Geradenspiegelung in der Hyperbolischen Geometrie erklären.

Sei  $K = K(O, r)$  ein Kreis mit Zentrum  $O$  und Radius  $r$ . Die *Inversion* eines Punktes  $P \neq O$  an  $K$  ist der Punkt  $P' \in \underline{OP}$ , so dass

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Inversion von  $P'$  an  $K$  wieder  $P$  ist. Auch gilt  $P' = P$  genau dann wenn  $P \in K$ . Außerdem ist  $P'$  im Inneren von  $K$  genau dann wenn  $P$  im Äußeren von  $K$  liegt. Wir beweisen nun einfache Eigenschaften der Inversion am Kreis.

**Lemma 4.61.** Seien  $A'$  und  $B'$  die Inversionen von  $A$  bzw.  $B$  am Kreis  $K = K(O, r)$ , dann gilt

$$\Delta OAB \sim \Delta OB'A',$$

sowie für die Innenwinkel

$$\begin{aligned}\overline{\angle AOB} &\equiv -\overline{\angle B'OA'} \\ \overline{\angle OBA} &\equiv -\overline{\angle OA'B'} \\ \overline{\angle BAO} &\equiv -\overline{\angle A'B'O}.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\overline{A'B'} = \frac{r^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

*Beweis.* Nach Definition gilt  $A' \in \underline{OA}$  und  $B' \in \underline{OB}$  sowie  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ , d.h.

$$\angle AOB = \angle A'OB' \quad \text{und} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Wir schließen daraus  $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$  mit dem Ähnlichkeitssatz (sws) 4.11 und  $\overline{\angle AOB} \equiv -\overline{\angle B'OA'}$  mit Satz 3.5. Die Gleichungen für die anderen Winkel folgen aus Ähnlichkeit und Lemma 3.17. Für die letzte Gleichung verwenden wir, dass nach Ähnlichkeit der Dreiecke  $\Delta OAB$  und  $\Delta OB'A'$  gilt

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

Damit wurde die letzte Gleichung bewiesen. □

**Lemma 4.62.** Seien  $A, B, C, D$  paarweise verschiedene Punkte, dann gilt

$$\overline{\angle DAB} + \overline{\angle ABC} + \overline{\angle BCD} + \overline{\angle CDA} \equiv 0.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung ist  $\mathcal{E} = \mathbb{C}$  nach Satz 4.24. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\arg \frac{D-A}{B-A} + \arg \frac{A-B}{C-B} + \arg \frac{B-C}{D-C} + \arg \frac{C-D}{A-D} &\equiv \\ \arg \frac{(D-A)(A-B)(B-C)(C-D)}{(B-A)(C-B)(D-C)(A-D)} &\equiv \arg((-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)) \equiv \arg 1 \equiv 0,\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung die Eigenschaft der Funktion  $\arg$  aus Lemma 4.26 verwendet haben. □

**Satz 4.63.** Seien  $A', B', C'$  und  $D'$  die Inversionen von  $A, B, C$  bzw.  $D$  am Kreis  $K = K(O, r)$ , dann gilt

(i) Das Doppelverhältniss bleibt erhalten, d.h.

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot D'A'}.$$

(ii) Die Summe von Winkelmaßen von  $\angle ABC$  und  $\angle CDA$  bleibt bis auf das Vorzeichen erhalten, d.h.

$$\overline{\angle ABC} + \overline{\angle CDA} \equiv -(\overline{\angle A'B'C'} + \overline{\angle C'D'A'}).$$

(iii) Falls  $\square ABCD$  ein Sehnenviereck ist, dann gilt entweder: die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$  sind kollinear oder  $\square A'B'C'D'$  ist auch ein Sehnenviereck.

*Beweis.* Zu (i). Wir berechnen mit Lemma 4.61

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{\frac{OA \cdot OB}{r^2} \cdot A'B' \cdot \frac{OC \cdot OD}{r^2} \cdot C'D'}{\frac{OB \cdot OC}{r^2} \cdot B'C' \cdot \frac{OD \cdot OA}{r^2} \cdot D'A'} = \frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot D'A'}.$$

Zu (ii). Wir berechnen mit Axiom (III)

$$\begin{aligned} \overline{\angle ABC} &\equiv \overline{\angle ABO} + \overline{\angle OBC} & \overline{\angle CDA} &\equiv \overline{\angle CDO} + \overline{\angle ODA} \\ \overline{\angle B'A'D'} &\equiv \overline{\angle B'A'O} + \overline{\angle OA'D'} & \overline{\angle D'C'B'} &\equiv \overline{\angle D'C'O} + \overline{\angle OC'B'} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.61 gilt

$$\begin{aligned} \overline{\angle ABO} &\equiv -\overline{\angle B'A'O} & \overline{\angle OBC} &\equiv -\overline{\angle OC'B'} \\ \overline{\angle CDO} &\equiv -\overline{\angle D'C'O} & \overline{\angle ODA} &\equiv -\overline{\angle OA'D'} \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen und Lemma 4.62 erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{\angle ABC} + \overline{\angle CDA} &\equiv -(\overline{\angle B'A'D'} + \overline{\angle D'C'B'}) \\ &\equiv \overline{\angle D'A'B'} + \overline{\angle B'C'D'} \equiv -(\overline{\angle A'B'C'} + \overline{\angle C'D'A'}). \end{aligned}$$

Zu (iii). Nach Peripheriewinkelsatz 4.33 folgt aus der Tatsache, dass  $\square ABCD$  ein Sehnenviereck ist

$$\overline{\angle A'B'C'} + \overline{\angle C'D'A'} \equiv \pi.$$

Nun sind entweder  $\angle A'B'C'$  und  $\angle C'D'A'$  Nullwinkel bzw. gestreckte Winkel oder  $\angle A'B'C'$  ist ein echter Winkel. In diesem Fall folgt aus der letzten Gleichung, dass auch  $\angle C'D'A'$  ein echter Winkel ist und mit Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt, dass  $\square A'B'C'D'$  ein Sehnenviereck ist.  $\square$

Wir wollen zeigen, dass die Inversion Kreise oder Geraden auf solche abbildet und Winkelmaße zwischen Kreisbögen (vgl. Definition 3.50) erhält. Dazu ist es hilfreich die Definition der Inversion zu erweitern. Sei wieder  $K = K(O, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$ . Definiere die Inversion von  $O$  an  $K$  mit  $\sigma_K(O) := \infty$  und zwangläufig ist dann die Inversion von  $\infty$  gleich  $O$ . Wir erhalten eine Abbildung

$$\sigma_K : \mathcal{E} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathcal{E} \cup \{\infty\}.$$

Außerdem legen wir fest, dass jede Gerade und jeder Strahl als Teilmenge von  $\mathcal{E} \cup \{\infty\}$  den Punkt  $\infty$  enthält. In diesem Sinne verstehen wir Geraden auch als Kreise durch  $\infty$ .

**Satz 4.64** (kreistreu). *Die Inversion am Kreis bildet Kreise auf Kreise ab. Genauer sei  $K = K(O, r)$  ein Kreis, dann gilt*

- (i)  $\sigma_K(g) = g$  falls  $g$  eine Gerade durch  $O$  ist,
- (ii)  $\sigma_K(g) = \Gamma$  falls  $g$  eine Gerade mit  $O \notin g$  ist, wobei  $\Gamma$  der Kreis mit Durchmesser  $OF'$ ,  $F$  der Fußpunkt von  $O$  auf  $g$  und  $F' = \sigma_K(F)$  ist,
- (iii)  $\sigma_K(\Gamma) = g$  falls  $\Gamma$  ein Kreis durch  $O$  ist, wobei  $g$  eine parallele Gerade zur Tangente an  $\Gamma$  in  $O$  ist sowie
- (iv)  $\sigma_K(\Gamma) = \Gamma'$  falls  $\Gamma$  ein Kreis mit  $O \notin \Gamma$ , wobei  $\Gamma'$  auch ein Kreis mit  $O \notin \Gamma'$  ist.

*Beweis.* Zu (i). Dies folgt direkt aus der Definition da  $P' \in \overline{OP} \subset g$  für jeden Punkt  $P \in g$ .

Zu (ii). Sei  $P \in g$  und  $P' = \sigma_K(P)$ . Nach Lemma 4.61 gilt  $\triangle OF'P' \sim \triangle OPF$ . Insbesondere ist  $\angle F'P'O$  ein rechter Winkel. Somit gilt nach Umkehrung des Satzes von Thales 4.32, dass  $P' \in \Gamma$  wobei  $\Gamma$  der Kreis mit Durchmesser  $OF'$  ist. Also folgt  $\sigma_K(g) \subset \Gamma$ .

Sei umgekehrt  $Q \in \Gamma$ . Dann gilt mit Satz des Thales, dass  $\angle F'QO$  ein rechter Winkel ist. Also  $\triangle OF'Q \sim \triangle OPF$  nach Ähnlichkeitssatz (Ssw) 4.11. Es gilt also auch

$$\frac{OF'}{OQ} = \frac{OP}{OF} \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OF'} \cdot \overline{OF} = r^2.$$

Daraus folgt dass  $\sigma_K(P) = Q$  und somit  $\sigma(g) \supset \Gamma$ .

Zu (iii). Unter Verwendung der Gleichung  $\sigma_K \circ \sigma_K = \text{id}$  und  $\sigma_K(g) = \Gamma$  vom letzten Schritt erhalten wir  $g = \sigma_K(\Gamma)$  wie gewünscht. Es gilt nach Konstruktion, dass die Tangente an  $\Gamma$  in  $O$  und  $g$  eine gemeinsame Senkrechte, gegeben durch den Durchmesser  $OF'$ , haben und somit parallel sind.

Zu (iv). Wähle die Punkte  $A, B, C \in \Gamma$  und setze  $A', B', C'$  die Inversionen von  $A, B$  bzw.  $C$ . Nach den obigen Schritten können  $A', B'$  und  $C'$  nicht kollinear sein. Sei  $\Gamma'$  der Umkreis von  $\triangle A'B'C'$ . Sei nun  $P \in \Gamma$ . Wir wollen zeigen, dass  $P' = \sigma_K(P) \in \Gamma'$ . Falls  $P \in \text{Inn} \angle ABC$  ist  $\square ABCP$  ein Sehnenviereck und mit Satz 4.63 ist es auch  $\square A'B'C'P'$ . Da nach Definition bereits  $A', B', C'$  auf  $\Gamma'$  liegen, folgt  $P' \in \Gamma'$ . Für die Fälle  $P \in \text{Inn} \angle CAB$  und  $P \in \text{Inn} \angle BCA$  betrachte die Sehnenvierecke  $\square ABPC$  bzw.  $\square APBC$ . □

**Satz 4.65** (winkeltreu). *Die Inversion am Kreis bildet Kreisbögen auf Kreisbögen ab. Sei außerdem  $K = K(O, r)$  ein Kreis sowie  $h$  und  $k$  zwei Kreisbögen mit gemeinsamen Endpunkt  $P$ , dann gilt für das Winkelmaß*

$$\angle(h, k) \cong \angle(h', k'),$$

wobei  $h'$  und  $k'$  die Inversion von  $h$  bzw.  $k$  an  $K$  ist.

*Beweis.* Sei  $\frown ABC$  ein Kreisbogen mit  $A, B, C \neq O, \infty$ . Nach Peripheriewinkelsatz 4.30 und Umkehrung gilt für den Punkt  $P$

$$P \in \frown ABC \iff \overline{\angle APC} \equiv \overline{\angle ABC} \iff \overline{\angle ABC} + \overline{\angle CPA} \equiv 0.$$

Mit Satz 4.63 (ii) erhalten wir für die Inversionen  $P', A', B', C'$  von  $P, A, B$  bzw.  $C$

$$\iff 0 \equiv \overline{\angle A'B'C'} + \overline{\angle C'P'A'} \iff P' \in \frown A'B'C'.$$

Daraus folgt, dass Kreisbögen welche nicht  $O$  oder  $\infty$  enthalten auf Kreisbögen abgebildet werden. Beachte, dass nach Satz von Nullwinkel und getrecktem Winkel 3.4 bzw. 3.6 das obige Argument auch für den Fall funktioniert, dass  $A, B$  und  $C$  kollinear sind, d.h. der Kreisbogen eine Strecke ist.

Für den Fall dass  $O$  oder  $\infty$  im Kreisbogen enthalten ist sei  $P \in \frown AB\infty = \overline{AB}$  und  $\Gamma$  die Inversion der Geraden  $(AB)$ . Nach Satz 4.64 ist  $\Gamma$  entweder die Gerade  $(AB)$  durch  $O$  oder ein Kreis durch  $O$ . Wir betrachten den zweiten Fall. Nach Definition liegt  $P' \in \overline{OP}$ , also nach Korollar 3.19 liegen  $P, B$  und  $P'$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(OA)$ , also  $P' \in \Gamma \setminus \mathcal{H}_-(OA, B) = \frown A'B'O$ . Also ist die Inversion von  $\frown AB\infty$  gleich  $\frown A'B'O$ . Analog folgen die verbleibenden Fälle.

Gegeben zwei Kreisbögen  $h$  und  $k$  mit einem gemeinsamen Endpunkt  $P$ . Ohne Einschränkung sind  $h$  und  $k$  Strahlen, etwa  $h = \overline{PA}$  und  $k = \overline{PB}$ , da das Winkelmaß von Kreisbögen über die Tangentialstrahlen definiert ist. Seien  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  die Inversionen der Geraden  $(PA)$  bzw.  $(PB)$ . Nach Satz 4.64 sind  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  Kreise durch  $O$  mit Tangenten in  $O$  parallel zu  $(PA)$  bzw.  $(PB)$ . Nach Wechselwinkelsatz 4.6 schneiden sich die Kreise  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  in  $O$  in einem Winkel kongruent zu  $\angle APB = \angle(h, k)$ . Die Kreise  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  schneiden sich in den Punkten  $O$  und  $P'$ , der Inversion von  $P$ . Die Geradenspiegelung  $\sigma_g$  entlang der Geraden  $g$  durch die Mittelpunkte von  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  erhält beide Kreise, bildet  $O$  auf  $P'$  ab und da  $\sigma_g$  winkeltreu ist stimmt der Schnittwinkel der Kreise in beiden Schnittpunkten  $O$  und  $P'$  überein. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### Orthogonale Kreise

Zwei Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  heißen *orthogonal*, geschrieben  $\Gamma_1 \perp \Gamma_2$ , wenn sie sich in zwei Punkten schneiden und die Tangenten an die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  in diesen beiden Punkten jeweils orthogonal sind.

**Korollar 4.66.** Sei  $K = K(O, r)$  ein Kreis.

- (i) Die Inversion am Kreis bildet orthogonale Kreise auf orthogonale Kreise ab.
- (ii) Sei  $P \notin K$  ein Punkt sowie  $P' = \sigma_K(P)$ . Jeder Kreis  $\Gamma$  durch  $P$  und  $P'$  schneidet  $K$  orthogonal und es gilt  $\sigma_K(\Gamma) = \Gamma$ .
- (iii) Sei  $\Gamma$  ein Kreis mit  $\sigma_K(\Gamma) = \Gamma$ , dann gilt entweder  $K = \Gamma$  oder  $K \perp \Gamma$ .

*Beweis.* Zu (i). Dies folgt direkt aus Satz 4.65 welcher besagt, dass Schnittwinkel zwischen Kreisbögen und damit auch zwischen Kreisen bis auf Vorzeichen erhalten bleiben. Insbesondere bleiben rechte Winkel erhalten.

Zu (ii). Nach Definition der Inversion ist  $O$  nicht zwischen  $P$  und  $P'$  und mit der Eigenschaft des Lots 3.34 folgt, dass  $O$  außerhalb von  $\Gamma$  liegt. Also gibt es eine Tangente  $(OT)$  an  $\Gamma$  mit Berührungspunkt  $T \in \Gamma$ . Nach Tangentensatz 4.36 folgt

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Wir schließen, dass  $T \in K$ , insbesondere ist  $OT$  ein Radiussegment für  $K$ . Mit Korollar 3.44 folgern wir, dass  $(OT)$  senkrecht auf der Tangenten an  $K$  durch  $T$  ist, also  $\Gamma \perp K$ . Sei nun  $Q \in \Gamma$  und  $R$  der weitere Schnittpunkt von  $(OQ)$  mit  $\Gamma$ . Es folgt mit dem Sekantensatz 4.37

$$\overline{OR} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Es folgt, dass  $R$  das Bild von  $Q$  unter Inversion am Kreis  $K$  ist, d.h.  $\Gamma \subset \sigma_K(\Gamma)$ . Sei nun  $Q \in \Gamma$  und  $Q'$  die Inversion, d.h.

$$\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}.$$

Nach Umkehrung des Sekantensatzes folgt  $Q' \in \Gamma$ , also  $\sigma_K(\Gamma) \subset \Gamma$ . Wie gewünscht folgt  $\sigma_K(\Gamma) = \Gamma$ .

Zu (iii). Sei  $K \neq \Gamma$  und  $P \in \Gamma$ , so dass  $P \notin K$  sowie  $P'$  die Inversion von  $P$  an  $K$ . Nach Voraussetzung folgt  $P' \in \Gamma$  und nach Teil (ii) folgt  $\Gamma \perp K$ .  $\square$

## 4.9 Isometrien

Wir fassen die Informationen über die Isometrien in der euklidischen Ebene zusammen, die wir bis hier erarbeitet haben. Insbesondere, dass wir nach Existenz und Eindeutigkeit in Satz 4.24 ohne Einschränkung annehmen können, dass  $\mathcal{E}$  das kartesische Modell  $\mathbb{C}$  ist und dass nach Lemma 4.28 jede Isometrie von der Form

$$\Psi(z) = az + b \quad \text{oder} \quad \Psi(z) = a\bar{z} + b, \quad (4.18)$$

mit  $a, b \in \mathbb{C}$  wobei  $|a| = 1$  ist, je nachdem ob die Isometrie orientierungserhaltend oder umkehrend ist. Dies erlaubt folgende Klassifikation der Isometrien in der euklidischen Ebene. Ein Isometrie heißt *nicht-trivial*, wenn sie nicht die Identität ist.

**Satz 4.67** (Klassifikation der Isometrien). *Jede nicht-triviale Isometrie  $\Psi$  der euklidischen Ebene ist entweder*

- (i) *eine Translation, falls  $\Psi$  orientierungserhaltend ist und keine Fixpunkte hat,*
- (ii) *eine Drehung, falls  $\Psi$  orientierungserhalten ist und Fixpunkte hat,*
- (iii) *eine Geradenspiegelung, falls  $\Psi$  orientierungsumkehrend ist und Fixpunkte hat oder*
- (iv) *eine Gleitspiegelung, falls  $\Psi$  orientierungsumkehrend ist und keine Fixpunkte hat.*

*Beweis.* Sei  $\Psi$  orientierungserhaltend, d.h.  $\Psi(z) = az + b$  nach Gleichung (4.18). Im Fall  $a \neq 1$ , hat  $\Psi$  einen Fixpunkt, denn

$$z = \Psi(z) = az + b \quad \iff \quad z = \frac{b}{1-a}.$$

Also ist nach Satz 3.63 die Abbildung  $\Psi$  eine Drehung. Im Fall  $a = 1$  ist  $\Psi$  entweder die Identität, was aber ausgeschlossen wurde, oder  $b \neq 0$  und  $\Psi$  hat keine Fixpunkte. Auch wird die Gerade  $s = \mathbb{R}b$  erhalten, da  $\Psi(\lambda b) = (\lambda+1)b \in s$  für jedes  $\lambda b \in s$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Da  $\Psi$  auch orientierungserhaltend ist bleiben auch beide Halbebenen von  $s$  erhalten, nach Korollar 3.19. Es folgt mit Satz 3.64, dass  $\Psi$  dann eine Translation ist.

Sei  $\Psi$  orientierungsumkehrend, d.h.  $\Psi(z) = a\bar{z} + b$  nach Gleichung (4.18). Sei  $\theta = \frac{1}{2} \arg a \in \mathbb{R}$ , d.h.  $a = e^{2i\theta}$ . Im Fall  $b = ie^{i\theta}\lambda \in ie^{i\theta}\mathbb{R}$  hat  $\Psi$  unendlich viele Fixpunkte, denn

$$z = \Psi(z) = a\bar{z} + b \quad \iff \quad z = e^{2i\theta}\bar{z} + ie^{i\theta}\lambda.$$

Nach Substitution  $w = e^{-i\theta}z$  bzw.  $z = e^{i\theta}w$  ist obige Gleichung äquivalent zu

$$e^{i\theta}w = e^{i\theta}\bar{w} + ie^{i\theta}\lambda \quad \iff \quad w - \bar{w} = i\lambda.$$

Wir schließen, dass  $\Re w$  nicht festgelegt und  $\Im w = \frac{\lambda}{2}$  ist, also  $w \in \mathbb{R} + i\frac{\lambda}{2}$ . Nach Resubstitution gilt  $z \in e^{i\theta}\mathbb{R} + \frac{b}{2}$ . Also ist  $\Psi$  nach Korollar 3.59 die Geradenspiegelung an der Geraden  $g = e^{i\theta}\mathbb{R} + \frac{b}{2}$ . Sei nun  $b \notin ie^{i\theta}\mathbb{R}$ . Wir spalten  $b = b_1 + b_2$  wobei  $b_1 \in ie^{i\theta}\mathbb{R}$  und  $b_2 \in e^{i\theta}\mathbb{R}$ , also

$$\Psi(z) = a\bar{z} + b_1 + b_2.$$

Nach dem obigen Aussagen folgt, dass  $z \mapsto a\bar{z} + b_1$  eine Geradenspiegelung an der Geraden  $g = e^{i\theta}\mathbb{R} + b_1$  und  $\Phi(z) := z + b_2$  eine Translation ist. Wir folgern, dass  $\Psi = \Phi \circ \sigma_g$  ist und da außerdem  $b_2\mathbb{R}$  parallel zu  $g$  folgt, dass  $\Psi$  eine Gleitspiegelung ist.  $\square$

## 5 Hyperbolische Geometrie

### 5.1 Hyperbolisches Parallelenaxiom

Wir haben bisher immer angenommen, dass das Parallelaxiom (V) gilt. Was passiert, falls wir das Gegenteil davon annehmen? Nehmen wir also an, dass gilt:

$\neg(V)$  Für eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $P$  gibt es zwei verschiedene Geraden  $h_1$  und  $h_2$  mit  $P \in h_i$  und  $h_i \parallel g$  für  $i = 1, 2$ .

**Definition 5.1.** Ein Modell  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  einer absoluten Ebene heißt *hyperbolische Ebene* oder *Lobatschewski Ebene*, falls  $\neg(V)$  gilt. Eine Aussage über eine absolute Ebene, welche äquivalent zu  $\neg(V)$  ist heißt *hyperbolische Bedingung*.

Jede logische Negation einer euklidische Bedingung ist eine hyperbolische Bedingung. Hier eine nicht vollständige Liste.

**Satz 5.2** (Hyperbolische Bedingungen). *Jede einzelne ist eine hyperbolische Bedingung.*

- (i) *Ein Dreieck hat Innenwinkelsumme kleiner als  $\pi$ .*
- (ii) *Jedes Dreieck hat Innenwinkelsumme kleiner als  $\pi$ .*
- (iii) *Es gibt kein Rechteck.*
- (iv) *Je zwei ähnliche Dreiecke sind kongruent, d.h. es gilt der Kongruenzsatz (WWW).*
- (v) *Es gibt ein echtes Dreieck ohne Umkreis.*
- (vi) *Es gibt Geraden  $g, h_1, h_2$ , so dass  $h_1 \parallel g$  und  $g \parallel h_2$  aber  $h_1$  ist transversal zu  $h_2$ .*
- (vii) *Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $P \notin g$  gibt es zwei verschiedene Geraden  $h_1$  und  $h_2$  mit  $P \in h_i$  und  $h_i \parallel g$  für  $i = 1, 2$ .*

*Beweis.* Punkt (i) ist Satz 4.4. Punkt (ii) und (iii) wurde in Hausaufgabe 7.1 gezeigt. Zu Punkt (iv): Wir zeigen, dass die Existenz zweier ähnlicher jedoch nicht kongruenter Dreiecke eine euklidische Bedingung ist. Angenommen es gelte Axiom (V). Sei  $\Delta ABC$  ein echtes Dreieck und  $\Delta A'B'C'$  das Mittendreieck. Dann folgt aus Stufenwinkelsatz und Strahlensatz, dass  $\Delta AC'B'$  ähnlich zum Dreieck  $\Delta ABC$  ist, aber offensichtlich ist es nicht kongruent dazu. Seien nun umgekehrt  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  zwei ähnliche, jedoch nicht kongruente Dreiecke. Ohne Einschränkung gilt  $A' = A$  sowie  $B' \in AB$  und  $C' \in AC$ . Da die Dreiecke  $\Delta ABC$  und  $\Delta A'B'C'$  ähnlich sind, haben sie den gleichen Defekt (vgl. Aufgabe 4.7). Da aber der Defekt nicht-negativ ist und additiv bezüglich Zerlegungen von Dreiecken (vgl. Aufgabe 4.7 (ii)) haben die Dreiecke  $\Delta B'BC$  und  $\Delta CC'B'$  verschwindenden Defekt, also sind Dreiecke mit Innenwinkelsumme gleich  $\pi$ . Nach Hausaufgabe 7.1 ist dies äquivalent zum Axiom (V). Der Punkt (v) überlassen wir als Übungsaufgabe. Punkt (vi) ist offensichtlich äquivalent zu  $\neg(V)$ . und Punkt (vii) ist eine Übungsaufgabe (Aufgabe 13.8).  $\square$

**Satz 5.3.** *Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell einer hyperbolischen Ebene und sei  $g$  eine Gerade und  $P \notin g$  ein Punkt gegeben. Dann gibt es unendlich viele verschieden Geraden  $h$  mit  $P \in h$  und  $h \parallel g$ .*

*Beweis.* Seien  $h_1 = (PA)$  und  $h_2 = (PB)$  verschiedene Geraden, so dass und  $g \parallel h_1$  und  $g \parallel h_2$  nach Satz 5.2. Da  $g$  parallel zu  $h_1$  und  $h_2$  ist, liegt  $g$  auf einer Seite bezüglich  $h_1$  und  $h_2$  nach Korollar 3.19. Nach möglichen verschieben der Punkte  $A$  und  $B$ , gilt ohne Einschränkung

$$g \subset \mathcal{H}_+(h_1, B) \cap \mathcal{H}_-(h_2, A).$$

Da es unendlich viele Punkte in  $AB$  gibt, so dass für jedes  $Q \in AB$  die Geraden  $(PQ)$  paarweise verschieden sind, genügt es zu zeigen, dass  $(PQ)$  parallel zu  $g$  ist. Sei  $Q' \in (PQ)$  so dass  $P$  zwischen  $Q$  und  $Q'$  liegt. Nach Korollar 3.19 gilt  $Q' \in \mathcal{H}_-(h_1, B) \cap \mathcal{H}_-(h_2, A)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} g \cap \underline{PQ} &\subset \mathcal{H}_-(h_2, A) \cap \mathcal{H}_+(h_2, A) = \emptyset \\ g \cap \underline{PQ'} &\subset \mathcal{H}_+(h_1, B) \cap \mathcal{H}_-(h_1, B) = \emptyset. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt

$$g \cap (PQ) = g \cap (\underline{PQ} \cup \underline{PQ'}) = (g \cap \underline{PQ}) \cup (g \cap \underline{PQ'}) = \emptyset.$$

Also ist  $(PQ)$  tatsächlich parallel zu  $g$ . □

## 5.2 Parallele Geraden

Wir wollen im folgenden die Menge der parallelen Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden genauer verstehen.

**Satz 5.4** (Grenzwinkel). *Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell einer absoluten Ebene,  $g$  eine Gerade und  $P \notin g$  ein Punkt und  $F$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $g$ . Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl*

$$\omega(P, g) \in (0, \pi/2],$$

der Grenzwinkel, so dass für alle Punkt  $C \neq P$  gilt

(i)  $\underline{PC} \cap g \neq \emptyset$  falls  $|\overline{\angle FPC}| < \omega(P, g)$ ,

(ii)  $(PC) \parallel g$  falls  $|\overline{\angle FPC}| = \omega(P, g)$  und

(iii)  $\underline{PC} \cap g = \emptyset$  falls  $|\overline{\angle FPC}| > \omega(P, g)$ .

*Beweis.* Sei  $C_1 \in g$  mit  $\overline{\angle FPC_1} > 0$  und  $\overline{FC_1} = 1$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $C_n \in \underline{FC_1}$ , so dass  $\overline{FC_n} = n$ . Da  $C_n$  und  $C_1$  nach Konstruktion auf der gleichen Seite liegen, ist  $\overline{\angle FPC_n} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach dem schwachen Innenwinkelsatz 3.24 im Dreieck  $\Delta FPC_n$  gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\overline{\angle FPC_n} < \pi/2$ . Auch gilt nach Satz 3.30, dass  $\overline{\angle FPC_{n-1}} < \overline{\angle FPC_n}$ . Damit ist die Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\alpha_n := \overline{\angle FPC_n}$  monoton wachsend und durch  $\pi/2$  beschränkt. Es gibt also einen Grenzwert und wir definieren

$$\omega(P, g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\angle FPC_n} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Bleibt zu zeigen, dass die Eigenschaften erfüllt sind. Zu (i). Sei  $C \neq P$  mit  $|\overline{\angle FPC}| < \omega(P, g)$ . Nach möglicher Spiegelung an der Geraden  $(PF)$  gehen wir davon aus, dass  $C$  und  $C_1$  auf der gleichen Seite bezüglich  $(FP)$  liegen, also auch  $\overline{\angle FPC} > 0$ . Nach Definition des Grenzwertes finden wir ein  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $\overline{\angle FPC} < \overline{\angle FPC_n}$ . Mit Satz 3.30 ist  $C \in \text{Inn} \angle FPC_n$  und nach dem Armbrustlemma 3.23 schneidet der Strahl  $\underline{PC}$  die Strecke  $FC_n$ . Somit schneidet  $\underline{PC}$  und auch die Spiegelung an  $(PF)$  die Gerade  $g$  wie gewünscht.

Sei nun  $C \neq P$  mit  $|\overline{\angle FPC}| \geq \omega(P, g)$ . Wir behaupten dass der Strahl  $\underline{PC}$  die Gerade  $g$  nicht schneidet. Angenommen durch Widerspruch  $\underline{PC} \cap g \neq \emptyset$ . Wieder nach potentieller Spiegelung an  $(FP)$  und möglichen Verschieben von  $C$  auf dem Strahl  $\underline{PC}$  gehen wir ohne Einschränkung davon aus, dass  $C \in g$  der Schnittpunkt ist und  $\overline{\angle FPC} > 0$ . Da die natürliche Zahlen unbeschränkt sind, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $n = \overline{FC_n} > \overline{FC}$ . Damit

liegt  $C$  zwischen  $F$  und  $C_n$  und mit Satz 3.30 folgern wir erneut  $\overline{\angle FPC} < \overline{\angle FPC_n}$ . Zusammengefasst erhalten wir den Widerspruch

$$\omega(P, g) \leq \overline{\angle FPC} < \overline{\angle FPC_n} < \omega(P, g).$$

Damit war die Annahme falsch, dass der Strahl  $\overrightarrow{PC}$  die Gerade schneidet und wir haben (iii) gezeigt. Für (ii) müssen wir noch zeigen, dass auch der Gegenstrahl  $\overleftarrow{PC'}$  die Gerade  $g$  nicht schneidet, wobei  $C'$  so gewählt ist dass  $P$  zwischen  $C$  und  $C'$  liegt. Nach Nebenwinkelsatz 3.11 gilt allerdings

$$\overline{\angle C'PF} + \overline{\angle FPC} = \pi \quad \Rightarrow \quad \overline{\angle C'PF} = \pi - \overline{\angle FPC} = \pi - \omega(P, g) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Angenommen per Widerspruch würde der Strahl  $\overrightarrow{PC'}$  die Geraden in einem Punkt, sagen wir  $Q$  schneiden. Dann hätte das Dreieck  $\triangle FPQ$  in den Eckpunkten  $F$  und  $P$  zwei Innenwinkel mit Summe der Winkelmaße größer als  $\pi$  im Widerspruch zum schwachen Innenwinkelsatz 3.24.  $\square$

**Definition 5.5** (Grenzgerade). Sei  $g$  eine Gerade und  $P \notin g$  ein Punkt. Die *rechte* (bzw. *linke*) *Grenzgerade* ist  $(PC_+)$  (bzw.  $(PC_-)$ ) wobei  $\overline{\angle FPC_{\pm}} = \pm\omega(P, g)$ . Wir schreiben  $h|^{+}g$  (bzw.  $h|^{-}g$ ) falls  $h$  rechte (bzw. linke) Grenzgerade zu  $g$  ist.

Der nächste Satz zeigt, dass sich mit dem Grenzwinkel eine euklidische Bedingung formulieren lässt.

**Satz 5.6.** *Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell einer absoluten Ebene. Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

- (i) *Es gilt das Parallelenaxiom (V).*
- (ii) *Es gibt eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $P \notin g$  so dass  $\omega(P, g) = \pi/2$ .*

*Beweis.* Angenommen es gilt (V), dann gilt offensichtlich  $\omega(P, g) = \pi/2$  für jede Gerade  $g$  und Punkt  $P$ , da es nur eine zu  $g$  parallele Gerade durch  $P$  gibt, welche durch die Doppellotkonstruktion entsteht. Angenommen es gilt  $\neg(V)$ . Wir haben in Satz 5.2 gezeigt, dass es dann für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $P \notin g$  mindestens zwei verschiedene parallele Geraden  $h_1$  und  $h_2$  gibt. Ohne Einschränkung ist  $h_1 = (PQ)$  das Doppellot und  $h_2 = (PA)$  so dass  $|\angle FPA| < \pi/2$ . Damit gilt nach Satz 5.4, dass  $\omega(P, g) \leq |\angle FPA| < \pi/2$ . Wir haben somit die logische Negation der zweiten Aussage gezeigt.  $\square$

Wenn nicht anders angegeben sei von nun an stets ein Modell  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  einer hyperbolischen Ebene vorausgesetzt.

**Satz 5.7.** *Sei  $g$  eine Gerade,  $P \notin g$  und  $h$  eine rechte (bzw. linke) Grenzgerade für  $g$  und  $P$ , dann ist  $h$  auch rechte (bzw. linke) Grenzgerade für  $g$  und  $Q$  für jeden Punkt  $Q \in h$ .*

*Beweis.* Wir beweisen den Fall, wenn  $h$  eine rechte Grenzgerade ist. Der andere Fall ist analog. Sei  $F'$  der Lotfußpunkt von  $Q$  auf  $g$ . Es gibt zwei Fälle. Im ersten Fall gilt  $\overline{\angle F'PQ} > 0$ . Wähle  $C \in h$  so dass  $Q$  zwischen  $P$  und  $C$  liegt. Wir müssen zeigen, dass  $|\overline{\angle F'QC}| = \omega(Q, g)$ . Da der Strahl  $\overrightarrow{QC}$  die Gerade  $g$  nicht schneidet gilt nach Satz 5.4 bereits

$$\overline{\angle F'QC} \geq \omega(Q, g).$$

Wir müssen zeigen, dass  $|\overline{F'QC}|$  nicht größer ist. Dazu genügt es für  $A \in \text{Inn } \angle F'QC$  beliebig zu zeigen

$$\overline{\angle F'QA} < \omega(Q, g). \quad (5.1)$$

Es gilt  $\mathcal{H}_+(F'Q, A) \subset \mathcal{H}_+(FP, A)$ . Also  $A \in \text{Inn } \angle FPC$ . Nach Satz 3.30 gilt also  $\overline{\angle FPA} < \overline{FPC}$  und daher schneidet der Strahl  $\overrightarrow{PA}$  die Gerade  $g$ , nach Satz 5.4, sagen wir im Punkt  $R$ . Nach Satz von Pasch 3.22 schneidet die Gerade  $(QA)$  eine weitere Seite des Dreiecks  $\triangle FPR$ . Dies kann nicht die Seite  $PF$  sein, da  $A$  und  $PF$  auf verschiedenen Halbebenen bezüglich  $(F'Q)$  liegen. Bleibt nur noch ein Schnittpunkt mit der Seite  $FR$  und sind gilt (5.1) nach Satz 5.4, da dies ein Schnittpunkt des Strahls  $\overrightarrow{QA}$  mit der Geraden  $g$  ist.

Sei nun im zweiten Fall  $\overline{\angle F'PQ} < 0$ . Sei wieder  $F'$  der Lotfußpunkt von  $Q$  auf  $g$  und wähle  $C$  auf  $h$ , so dass  $P$  zwischen  $Q$  und  $C$  liegt. Da der Strahl  $\overrightarrow{QC}$  die Gerade  $g$  nicht schneidet, gilt wieder nach Satz 5.4

$$\overline{\angle F'QC} \geq \omega(Q, g).$$

und es bleibt (5.1) für ein beliebiges  $A \in \text{Inn } \angle F'QC$  zu zeigen. Sei dazu  $B \in \text{Inn } \angle FPC$  mit  $\overline{\angle CQA} = \overline{\angle CPB}$ . Nach Stufen-/Wechselwinkelsatz 4.6 ist somit  $(QA)$  parallel zu  $(PB)$  und nach Korollar 3.19 liegen  $A$  und  $B$  auf der gleichen Seite bezüglich  $h$ . Es folgt  $B \in \text{Inn } \angle FPC$  und mit Satz 5.4 schneidet der Strahl  $\overrightarrow{PB}$  die Gerade  $g$ , sagen wir im Punkt  $B$  nach möglichen Verschieben des Punktes  $B$  auf dem Strahl. Nach dem Armbrustlemma 3.23 schneidet der Strahl  $\overrightarrow{QA}$  die Strecke  $F'P$ . Damit nach Satz von Pasch 3.22 eine weitere Seite des Dreiecks  $\triangle F'PF$ , falls diese weitere Seite gleich  $FF'$  ist, folgt (5.1). Falls diese weitere Seite gleich  $FP$  ist, wenden wir erneut den Satz von Pasch auf das Dreieck  $\triangle FPB$  an. Da  $QA \parallel PB$  muss nun die zweite Seite, welche von  $(QA)$  geschnitten wird  $FB$  sein. Dieser Schnittpunkt ist auch ein Schnittpunkt von  $\overrightarrow{QA}$  und  $g$  und es folgt erneut (5.1).  $\square$

**Satz 5.8.** Gegeben seien Geraden  $g, g'$  und Punkte  $P, P'$  so dass  $P \notin g$  und  $P' \notin g'$  so dass  $d(P, g) = d(P', g')$ , dann gilt  $\omega(P, g) = \omega(P', g')$ .

*Beweis.* Sei  $F, F'$  der Lotfußpunkt von  $P$  bzw.  $P'$  auf  $g$  bzw.  $g'$ . Angenommen per Widerspruch  $\omega(P, g) \neq \omega(P', g')$ , sagen wir  $\omega(P, g) > \omega(P', g')$ . Nach Axiom (III) sei  $A$  so dass

$$\overline{\angle FPA} = \omega(P', g').$$

Nach Satz 5.4 schneidet der Strahl  $\overrightarrow{PA}$  die Gerade  $g$ . Nach Verschieben von  $A$  auf dem Strahl sei  $A$  der Schnittpunkt. Wähle nun  $A' \in g'$  so dass  $FA \cong F'A'$ , möglich nach Lemma 3.3. Nach Kongruenzsatz (SWS) folgt  $\triangle FPA \cong \triangle F'P'A'$ . Insbesondere auch

$$\angle FPA \cong \angle F'P'A'$$

Wieder mit Satz 5.4 folgt  $|\overline{\angle F'P'A'}| < \omega(P', g')$ . Zusammengefasst erhalten wir den Widerspruch

$$\omega(P', g') = |\overline{\angle FPA}| = |\overline{\angle F'P'A'}| < \omega(P', g').$$

Damit wurde die Behauptung bewiesen.  $\square$

Der letzte Satz zeigt, dass die Funktion in der nächsten Definition unabhängig der Wahl der Geraden  $g$  und der Punkte  $P_x$  wohl-definiert ist.

**Definition 5.9** (kritische Funktion). Sei  $g$  eine Gerade und für jedes  $x > 0$  ein Punkt  $P_x$  mit  $d(P_x, g) = x$ . Wir definieren die *kritische Funktion* oder auch *Lobatschewski Funktion*,

$$\Pi : (0, \infty) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \omega(P_x, g).$$

Außerdem definieren wir die *kritische Länge*

$$s_d := \Pi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Mit anderen Worten, die kritische Länge ist gegeben durch  $s_d = d(P, g)$  falls  $\omega(P, g) = \frac{\pi}{4}$ . Der nächste Satz zeigt, dass die kritische Länge für jedes Modell der hyperbolischen Geometrie definiert ist.

**Satz 5.10** (Eigenschaften der kritischen Funktion). *Die kritische Funktion  $\Pi$  ist*

- (i) *streng monoton fallend,*
- (ii) *stetig und*
- (iii) *erfüllt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0$  sowie  $\lim_{x \rightarrow 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ .*

*Beweis.* [3, Corollary 24.17]  $\square$

Sei  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell einer hyperbolischen Ebene, oder auch absoluten Ebene, dann erfüllt auch für jedes  $k > 0$  das Modell  $(\mathcal{E}, k \cdot d, \angle)$  die Axiome der hyperbolischen Ebene, bzw. absoluten Ebene. Da das Winkelmaß nicht verändert wird, bleiben Grenzgeraden erhalten und man sieht direkt aus der Definition, dass gilt

**Lemma 5.11.** *Für die kritischen Längen der Modelle gilt  $s_{k \cdot d} = k \cdot s_d$ .*

Im Fall, wenn  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell einer euklidischen Ebene ist, dann ist das Modell  $(\mathcal{E}, k \cdot d, \angle)$  dazu isometrisch. Im anderen Fall, wenn  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  ein Modell der hyperbolischen Ebene ist, dann ist das Modell  $(\mathcal{E}, k \cdot d, \angle)$  ebenfalls ein Modell der hyperbolischen Ebene aber nicht isometrisch zu  $(\mathcal{E}, d, \angle)$ . Man kann zeigen, siehe etwa [3, Kapitel 33], dass bis auf diese Skalierung je zwei Modelle der hyperbolischen Geometrie isometrisch sind.

Wir behandeln nun eine weitere wichtige Eigenschaft der hyperbolischen Ebene, nämlich, dass es zwei Arten von parallelen Geraden gibt.

**Definition 5.12.** Zwei verschiedene Geraden  $g$  und  $h$  heißen

- (i) *horoparallel*, falls  $h$  eine rechte oder linke Grenzgerade zu  $g$  ist und
- (ii) *hyperparallel*, falls  $h$  und  $g$  parallel aber  $h$  keine Grenzgerade zu  $g$  ist.

Zur Erklärung der Namensgebung: Das Wort *horo* hat die Bedeutung *Grenze* auf griechisch und *hyper* bedeutet *über*.

**Satz 5.13.** Die Relationen  $|^+$  und  $|^-$  sind Äquivalenzrelationen.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die Relationen  $|^+$  und  $|^-$  symmetrisch sind, d.h. wenn  $h|^+g$ , dann auch  $g|^+h$  und analog für  $|^-$ . Per Widerspruch sei  $h$  rechte Grenzgerade zu  $g$  aber  $g$  nicht rechte Grenzgerade zu  $h$ . Dann gibt es  $P \in g$  mit  $F \in h$  Lotfußpunkt sowie einen Punkt  $A$  auf der gleichen Halbebene wie  $F$  bezüglich  $g$  mit  $\overline{\angle FPA} > 0$ , aber der Strahl  $\overrightarrow{PA}$  schneidet nicht die Gerade  $g$ . Wähle  $Q \in g$ , so dass  $A$  und  $Q$  auf der gleichen Halbebene bezüglich  $(FP)$  liegt. Nach möglichen Verschieben von  $A$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{PA}$  gehen wir davon aus, dass

$$|\overline{\angle FAP}| < |\overline{\angle APQ}|.$$

Da nun nach Voraussetzung  $h$  rechte Grenzgerade zu  $g$  ist schneidet der Strahl  $\overrightarrow{FA}$  die Gerade  $g$ , sagen wir im Punkt  $Q$  nach möglichen Verschieben von  $Q$  auf  $g$ . Das liefert aber einen Widerspruch zum Außenwinkelsatz 3.25 im Dreieck  $\triangle AQP$ , denn  $\angle FAP$  ist ein Außenwinkel zu  $\angle APQ$ .

Zeigen wir nun die Transitivität. Gegeben drei verschiedene Geraden  $g, h$  und  $k$ , so dass  $h|^+g$  und  $g|^+k$ . Wir müssen zeigen, dass dann auch  $h|^+k$  gilt. Im ersten Schritt zeigen wir, dass  $h$  und  $k$  parallel sind. In der Tat, angenommen  $h$  und  $k$  sind transversal und sei  $P$  der Schnittpunkt von  $h$  und  $k$ . Nach Satz 5.7 ist sowohl  $h$  als auch  $k$  rechte Grenzgerade zu  $g$  durch den Punkt  $P$ . Nach Satz 5.4 ist aber die Grenzgerade durch einen gegebenen Punkt eindeutig. Also folgt  $h = k$  im Widerspruch zur Annahme.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass die drei Geraden eine gemeinsame Transversale haben, d.h. es gibt eine Gerade  $s$  so dass  $s$  die Geraden  $g, h$  und  $k$  schneidet. Angenommen  $H \in h$  und  $K \in k$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $g$ , dann ist  $s = (HK)$  die gesuchte Gerade. Angenommen im anderen Fall liegen  $H$  und  $K$  auf der gleichen Seite bezüglich  $g$ . Sei nun  $G \in g$  und ohne Einschränkung  $H$  bzw.  $K$  die Lotfußpunkte von  $G$  auf  $h$  bzw.  $k$ . Nach möglichen Vertauschen von  $h$  und  $k$  gilt  $\overline{\angle HGK} > 0$ . Da  $H$  und  $K$  in gleicher Halbebene bezüglich  $g$  liegen folgt  $\overline{\angle HGK} < \omega(G, h)$ . Nach Satz 5.4

schneidet der Strahl  $\overrightarrow{GK}$  die Gerade  $h$ . Somit ist in diesem Fall  $s = (GK)$  die gesuchte Transversale.

Nach möglichen Umbenennen der Punkte seien  $G, H, K$  die Schnittpunkte von  $g, h$  bzw.  $k$  mit der gemeinsamen Transversalen  $s$ . Es gibt zwei Fälle. Im ersten Fall liegt  $G$  zwischen  $H$  und  $K$ . Sei nun  $A$  so dass  $\overline{\angle KHA} > 0$  und  $A$  liegt auf der gleichen Halbebene wie  $G$  und  $K$  bezüglich  $h$ . Da  $h$  rechte Grenzgerade zu  $g$  ist, schneidet der Strahl  $\overrightarrow{HA}$  die Gerade  $g$ , sagen wir im Punkt  $G'$ . Nach potentiell Verschieben des Punktes  $A$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{HA}$  liegt  $A$  in der gleichen Halbebene wie  $K$  bezüglich  $g$ . Außerdem gilt nach Lemma 3.16  $\overline{\angle KG'A} > 0$ . Da nun  $g$  auch rechte Grenzgerade zu  $k$  ist, schneidet der Strahl  $\overrightarrow{G'A}$  die Gerade  $k$ . Also schneidet auch  $\overrightarrow{HA}$  die Gerade  $k$ . Da  $A$  beliebig ist da wie bereits gezeigt haben, dass  $h$  und  $k$  parallel sind folgt, dass  $h$  rechte Grenzgerade zu  $k$  ist nach Satz 5.4.

Im zweiten Fall, nach möglichen Vertauschen von  $h$  und  $k$ , liegt  $K$  zwischen  $G$  und  $H$ . Wähle nun wieder  $A$  so dass  $\overline{\angle KHA} > 0$  und  $A$  auf der gleichen Halbebene wie  $G$  und  $K$  bezüglich  $h$ . Da auch  $\overline{\angle GHA} > 0$  folgt, da  $h$  eine rechte Grenzgerade zu  $g$  ist, dass der Strahl  $\overrightarrow{HA}$  die Gerade  $g$ , sagen wir im Punkt  $G'$ . Da diesmal  $G'$  und  $H$  auf verschiedenen Halbebenen bezüglich  $k$  liegen, schneidet  $\overrightarrow{HG'}$  die Gerade  $k$  und insbesondere der Strahl  $\overrightarrow{HA}$  die Gerade  $k$ . Wir schließen wie im letzten Paragraph, dass  $h$  die rechte Grenzgerade zu  $k$  ist.  $\square$

Der letzte Satz erlaubt eine weitere wichtige Unterscheidung von horoparallelen und hyperparallelen Geraden zu finden.

**Satz 5.14.** *Seien  $g$  und  $h$  zwei verschiedene parallele Geraden, dann gilt*

- (i)  *$g$  und  $h$  sind hyperparallel, genau dann wenn sie eine gemeinsame Senkrechte haben und*
- (ii)  *$g$  und  $h$  sind horoparallel, genau dann wenn sie keine gemeinsame Senkrechte haben.*

*Beweis.* Angenommen  $g$  und  $h$  sind horoparallel, etwa  $h$  rechte Grenzgerade zu  $g$ , und per Widerspruch sei  $s$  eine gemeinsame Senkrechte. Seien  $P$  und  $F$  die Schnittpunkte von  $s$  mit  $h$  bzw.  $g$  sowie  $A \in h$ , so dass  $\overline{\angle FPA} = \frac{\pi}{2}$ . Damit ist  $F$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $g$  und es folgt,  $\omega(P, g) = \overline{\angle FPA} = \frac{\pi}{2}$ . Nach Satz 5.6 ist  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  damit ein Modell einer euklidischen Ebene im Widerspruch zur Annahme.

Angenommen  $g$  und  $h$  sind hyperparallel. Wähle  $P \in h$  und  $F \in g$  der Lotfußpunkt. Wähle  $A_-, A_+$  so dass  $\overline{\angle FPA_{\pm}} = \pm\omega(P, g)$ . Falls  $PA_- \perp h$  setze  $Q_- := P$ ; sonst sei  $Q_- \in h$ , so dass  $|\overline{\angle A_- PQ_-}| = \Pi(\overline{PQ_-})$ , d.h. das Lot durch  $Q_-$  auf  $h$  ist linke Grenzgerade zu  $(PA_-)$ . Analog falls  $PA_+ \perp h$  setze  $Q_+ := P$ ; sonst sei  $Q_+ \in h$ , so dass  $|\overline{\angle A_+ PQ_+}| = \Pi(\overline{PQ_+})$ , d.h. das Lot durch  $Q_+$  auf  $h$  ist rechte Grenzgerade zu  $(PA_+)$ . Es gilt  $Q_- \neq Q_+$ , da  $(PA_-) \neq (PA_+)$ . Seien  $B_-$  und  $B_+$  auf der gleichen Halbebene wie  $F$  bezüglich  $h$  und so dass  $Q_-B_- \perp h$  und  $Q_+B_+ \perp h$ . Wie bereits erwähnt ist nach Konstruktion  $Q_-B_-|^-PA_-$  und  $Q_+B_+|^+PA_+$ . Da auch  $PA_-|^-g$  und  $PA_+|^+g$  nach Konstruktion folgt  $Q_-B_-|^-g$  und  $Q_+B_+|^+g$  mit Satz 5.13.

Sei nun  $M$  der Mittelpunkt von  $Q_-Q_+$  und  $N \in g$  der Lotfußpunkt von  $M$ . Wähle  $C_-, C_+$ , so dass  $\overline{\angle NMC_{\pm}} = \pm\omega(M, g)$ . Wieder mit Satz 5.13 gilt  $Q_-B_-|^-MC_-$  sowie  $Q_+B_+|^+MC_+$ . Da nach Konstruktion  $Q_-M \cong MQ_+$  folgt mit Satz 5.8  $\angle Q_-MC_- \cong \angle Q_+MC_+$ . Auch gilt  $\angle NMC_- \cong \angle MNC_+$ . Somit sind  $\angle Q_-MN$  und  $\angle NMQ_+$  kongruente Nebenwinkel. Nach dem Nebenwinkelsatz 3.11 sind dies rechte Winkel und wir schließen, dass die Gerade  $(MN)$  eine gemeinsame Senkrechte ist.  $\square$

### 5.3 Isometrien

Wir untersuchen die Isometrien der hyperbolischen Ebene. Wir wissen nach der allgemeinen Theorie über Isometrien der absoluten Ebene, dass wir dazu die Verknüpfungen von Geradenspiegelungen verstehen müssen. Im Fall von der Verknüpfung zweier Geradenspiegelungen erhalten wir einen neuen Typ von einer Isometrie, welcher nicht in der Klassifikation der euklidischen Geometrie auftritt und darauf beruht, dass es in der hyperbolischen Geometrie horoparallelen Geraden gibt, also Geraden, welche zwar parallel sind, aber keine gemeinsame Senkrechte haben.

**Definition 5.15.** Seien  $g$  und  $h$  horoparallel, dann heißt die Verknüpfung der Geradenspiegelungen  $\sigma_g \circ \sigma_h$  *Horolation*.

Für eine Klassifikation der Isometrien der hyperbolischen Ebene müssen wir nun noch Verknüpfungen von drei Geradenspiegelungen verstehen. Dies wurde zum Teil schon in Satz 3.62 getan. Wir brauchen noch eine Erweiterung für den Fall, dass alle drei Geraden rechte (bzw. linke) Grenzgeraden einer weiteren Geraden  $s$  sind.

**Satz 5.16.** Gegeben seien die Geraden  $g, h$  und  $k$ , so dass  $g, h, k|^+s$  (bzw.  $g, h, k|^-s$ ) bezüglich einer weiteren Geraden  $s$ , dann gibt es eine Gerade  $\ell$  mit  $\ell|^+s$  (bzw.  $\ell|^-s$ ) und es gilt

$$\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_{\ell}.$$

*Beweis.* Wir geben nur einen Beweis für den Fall, dass  $(\mathcal{E}, d, \angle)$  das Modell der Poincaré Halbebene ist. Außerdem auch nur für den Fall  $g, h, k|^+s$ . Der andere Fall ist analog. Die Voraussetzung  $g, h, k|^+s$  im Modell besagt, dass alle  $h$ -Geraden einen gemeinsamen idealen Punkt, sagen wir  $X$ , haben. Sei  $K$  ein euklidischer Kreis tangential zur  $x$ -Achse im Punkt  $X$ . Nach Definition sind die  $h$ -Geraden  $g, h, k$  Teilmengen von euklidischen Kreisen oder Geraden, welche wir mit den gleichen Buchstaben bezeichnen. Da  $g, h$  und  $k$  senkrecht auf  $x$ -Achse stehen, sind sie orthogonal zu  $K$ . Wie bereits festgestellt, sind nach Satz 4.63 und 4.65 die Geradenspiegelungen  $\sigma_g, \sigma_h, \sigma_k$  die Inversionen an den Kreisen  $g, h$  bzw.  $k$ . Nach Korollar 4.66 bilden diese  $K$  auf  $K$  ab. Sei  $P$  der Schnittpunkt von  $K$  und  $k$ . Definiere

$$\Phi := \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k,$$

sowie  $P' := \Phi(P)$ . Im Fall  $P = P'$  setze  $\ell := k$ . Im Fall  $P \neq P'$  sei  $\ell$  die  $h$ -Mittelsenkrechte der  $h$ -Strecke  $PP'_h$ , d.h. des euklidischen Kreisbogens. Nach Konstruktion und da  $K$  für  $\sigma_g, \sigma_h$  und  $\sigma_k$  eine invariante Menge ist, gilt  $\sigma_{\ell}(P) = P'$  sowie  $P, P' \in K$ . Nach Korollar 4.66 folgt, dass  $\ell \perp K$  und  $\sigma_{\ell}(K) = K$ . Da auch die  $x$ -Achse für die Inversion an  $\ell$

eine Invariante Menge ist folgt, dass  $X$  ein Fixpunkt und somit idealer Punkt von  $\ell$  ist. Es gilt also  $\ell|^{+}g$ . Außerdem ist nach Konstruktion  $\Psi := \sigma_{\ell} \circ \Phi$  orientierungserhaltend, hat einen Fixpunkt bei  $P$  und hat  $K$  als invariante Menge. Es folgt  $\Psi(X) = X$  und nach Satz 3.63 ist  $\Psi$  geschrieben als Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen entlang  $h$ -Geraden durch  $P$ , etwa  $\Psi = \sigma_n \circ \sigma_k$ . Falls  $n \neq k$  folgt allerdings  $\Psi(X) \neq X$  im Widerspruch zur obigen Feststellung. Es gilt also  $\Psi = \text{id}$  und die Behauptung folgt.  $\square$

Im Anbetracht von Satz 3.62 und 5.16 nennen wir die drei Geraden  $g$ ,  $h$  und  $k$  *äquivalent*, falls eine der folgenden Aussagen zutrifft

- (i) es gibt einen Punkt  $Z$  mit  $Z \in g, h, k$ ,
- (ii) es gibt eine Gerade  $s$  mit  $s \perp g, h, k$  oder
- (iii) es gibt eine Gerade  $s$  mit  $s|^{+}g, h, k$  (bzw.  $s|^{-}g, h, k$ ).

Wir können nun die Sätze 3.62 und 5.16 so zusammenfassen: Gegeben drei äquivalente Geraden  $g$ ,  $h$  und  $k$ , dann ist die Verknüpfung  $\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k$  eine Geradenspiegelung entlang einer Geraden  $\ell$  so dass  $g$ ,  $h$  und  $\ell$  äquivalent sind. Für die Klassifikation müssen wir nur noch verstehen, was die Verknüpfung von drei Geradenspiegelungen entlang Geraden die nicht äquivalent sind ist. Dazu ist der nächste Satz. Doch zuvor noch ein Lemma.

**Lemma 5.17.** *Sei  $g$  eine Gerade und  $P \notin g$  ein Punkt. Dann ist die Verknüpfung  $\sigma_g \circ \sigma_P$  eine Gleitspiegelung.*

*Beweis.* Sei  $\ell$  das Lot von  $P$  auf  $g$  und  $h$  das Lot von  $P$  auf  $\ell$ . Nach den Sätzen 3.63 und 3.64 ist  $\sigma_h \circ \sigma_{\ell} = \sigma_P$  die Punktspiegelung und  $\Phi_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_g \circ \sigma_h$  eine Translation mit  $A$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $g$  und  $B$ , so dass  $P$  der Mittelpunkt von  $A$  und  $B$  ist. Somit ist  $\sigma_g \circ \sigma_P = \Phi_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_{\ell}$  eine Gleitspiegelung.  $\square$

**Satz 5.18.** *Gegeben seien die Geraden  $g$ ,  $h$  und  $k$  welche nicht äquivalent sind, dann ist die Verknüpfung  $\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k$  eine Gleitspiegelung.*

*Beweis.* Sei  $P \in g$  und  $m$  eine Gerade, so dass  $P \in m$  und  $m, h, k$  äquivalent sind. Nach Voraussetzung ist  $m \neq g$ . Nach Sätzen 3.62 und 5.16 gibt es ein  $\ell$  so dass  $\ell, h$  und  $k$  äquivalent sind und

$$\sigma_m \circ \sigma_{\ell} = \sigma_h \circ \sigma_k.$$

Sei  $n$  das Lot von  $P$  auf  $\ell$ . Es gilt, dass  $P \in g, m, n$ . Nach Satz 3.62 gibt es eine Gerade  $t$  mit  $P \in t$  und es gilt

$$\sigma_g \circ \sigma_m = \sigma_t \circ \sigma_n.$$

Mit den beiden letzten Gleichungen erhalten wir

$$\sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_k = \sigma_g \circ \sigma_m \circ \sigma_{\ell} = \sigma_t \circ \sigma_n \circ \sigma_n = \sigma_t \circ \sigma_P,$$

welches nach dem letzten Lemma 5.17 eine Gleitspiegelung ist.  $\square$

Wir sind nun in der Lage die Isometrien der hyperbolischen Geometrie zu klassifizieren.

**Satz 5.19** (Klassifikation). *Jede nicht-triviale orientierungserhaltende Isometrie  $\Phi$  ist entweder*

- (i) *eine Drehung, falls  $\Phi$  Fixpunkte hat,*
- (ii) *eine Translation, falls  $\Phi$  keine Fixpunkte und eine Fixgerade hat,*
- (iii) *eine Horolation, falls  $\Phi$  keine Fixpunkte und keine Fixgerade hat,*

*Jede orientierungsumkehrende Isometrie  $\Phi$  ist entweder*

- (i) *eine Geradenspiegelung, falls  $\Phi$  Fixpunkte hat oder*
- (ii) *eine Gleitspiegelung, falls  $\Phi$  keine Fixpunkte hat.*

*Beweis.* Die folgt aus Korollar 3.58 sowie den Sätzen 3.63, 3.64, 3.62, 5.16 und 5.18.  $\square$

Diese Klassifikation ist ein sehr starkes Werkzeug für Aussagen über Isometrien der hyperbolischen Ebene. Als Beispiel zeigen wir das folgende Resultat. Versuchen Sie dies einmal ohne die Klassifikation zu beweisen.

**Satz 5.20** (Hjelmslev). *Gegeben sei eine Isometrie  $\Phi$  und kollineare Punkte  $A, B$  bzw.  $C$ . Bezeichne mit  $A' := \Phi(A)$ ,  $B' := \Phi(B)$  und  $C' := \Phi(C)$ . Dann sind die Mittelpunkte von  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  auch kollinear.*

*Beweis.* Wir wenden eine Fallunterscheidung nach 5.19 an. Falls  $\Phi = \sigma_g$  eine Geradenspiegelung ist, gilt nach Definition, dass die Mittelpunkte von  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  auf  $g$  liegen. Angenommen  $\Phi = \Phi_{\overrightarrow{PQ}} \circ \sigma_g$  mit  $g = (PQ)$  ist eine Gleitspiegelung. Sei  $S, T \in g$  der Lotfußpunkt von  $A$  bzw.  $A'$ . Da  $\Phi_{\overrightarrow{PQ}}(S) = T$  gilt  $AS \cong A'T$ . Sei  $M$  der Schnittpunkt von  $AA'$  mit  $g$ . Nach Scheitelwinkelsatz 3.10 ist  $\angle SMA \cong \angle TMA'$ . Nach Kongruenzsatz (WWS) 3.26 folgt  $\triangle ASM \cong \triangle A'TM$ . Insbesondere ist  $M$  der Mittelpunkt von  $AA'$  und es gilt  $M \in g$ . Analog zeigen wir, dass der Mittelpunkt von  $BB'$  und  $CC'$  auf  $g$  liegt. Angenommen  $\Phi$  ist orientierungserhaltend und sei  $\ell$  die Gerade durch die Punkte  $A, B$  und  $C$ . Dann ist  $\Psi = \Phi \circ \sigma_\ell$  orientierungsumkehrend und es gilt  $\Psi(A) = A'$ ,  $\Psi(B) = B'$  und  $\Psi(C) = C'$ . Nach dem eben Gezeigten liegen die Mittelpunkte von  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  auf einer Geraden.  $\square$

## Möbiustransformationen

Für das Modell der Poincaré Halbebene gibt es noch die Möglichkeit die Isometrien durch Formeln zu beschreiben, analog zur Formel (4.18). Wie schon bei der Inversion am Kreis definieren wir die *erweiterte komplexe Ebene*  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Definition 5.21** (Möbiustransformation). Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine Matrix von komplexen Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , so dass  $\det A = ad - cb \neq 0$ . Wir definieren die *Möbiustransformation*

$$\Phi = \Phi_A : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

wobei wir dies erweitern durch

$$\Phi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

sowie falls  $c \neq 0$  durch

$$\Phi(-d/c) = \lim_{z \rightarrow -d/c} \Phi(z) = \infty.$$

Wir sagen  $\Phi$  ist eine *reelle Möbiustransformation*, falls  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**Satz 5.22** (Eigenschaften der Möbiustransformation). (i) Es gilt  $\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{A \cdot B}$ , wobei  $A \cdot B$  die Matrixmultiplikation bedeutet.

(ii) Jede Möbiustransformation lässt sich als die Verknüpfung der folgenden elementaren Möbiustransformationen schreiben

- $z \mapsto z + w$  mit  $w \in \mathbb{C}$ , einer Translation,
- $z \mapsto w \cdot z$  mit  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , einer Drehstreckung und
- $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

Die gleiche Aussage gilt für reelle Möbiustransformationen wobei hier  $w \in \mathbb{R}$  bzw.  $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  für die erste bzw. zweite elementare Möbiustransformation angenommen wird.

(iii) für je drei paarweise verschiedene Punkte  $z_0, z_1, z_\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  gibt es eine eindeutige Möbiustransformation  $\Phi$  für die gilt

$$\Phi(0) = z_0, \quad \Phi(1) = z_1 \quad \text{und} \quad \Phi(\infty) = z_\infty. \quad (5.2)$$

Falls darüberhinaus  $z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  so ist diese Möbiustransformation sogar reell.

*Beweis.* Zu (i) dies ist eine direkte Rechnung, die hier nicht ausgeführt wird.

Zu (ii). Fall  $c = 0$ , d.h. gegeben eine Möbiustransformation  $\Phi(z) = \frac{az+b}{d} = a'z + b'$  mit  $a' = a/d$  und  $b' = b/d$ . Offensichtlich gilt

$$\Phi(z) = (\tau_{b'} \circ \mu_{a'})(z),$$

wobei  $\mu_{a'}(z) = a' \cdot z$  und  $\tau_{b'}(z) = z + b'$ . Fall  $c \neq 0$ , dann schreibe

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{cz+d}{cz+d} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} \\ &= (\tau_{a'} \circ \mu_e \circ \iota \circ \tau_{d'})(z), \end{aligned}$$

wobei  $a' = a/c$ ,  $e = -(ad-bc)/c^2$ ,  $d' = d/c$  sowie  $\iota(z) = z^{-1}$ .

Zu (iii). Die Gleichungen (5.2) liefern ein lineares Gleichungssystem an die Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$ . □

In der Aufgabe 12.5 haben wir gesehen, dass die Abbildung  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  die Inversion am Einheitskreis in  $\widehat{\mathbb{C}}$  ist. Somit ist nach Satz 5.22 eine Möbiustransformation das selbe wie die Verknüpfung von Inversion am Kreis, Geradenspiegelung und Ähnlichkeitsabbildungen. Daraus folgt, dass durch jede Möbiustransformation das Doppelverhältniss erhalten bleibt und Kreise auf Kreise abgebildet werden. Dies kann auch direkt nachgewiesen werden (siehe Aufgabe 14.10).

**Satz 5.23.** *Jede orientierungserhaltende bzw. orientierungsumkehrende Isometrie der Poincaré Halbebene  $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  ist gegeben durch*

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d},$$

wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $ad - cb = 1$ .

*Beweis.* Zeigen wir zunächst, dass  $\Phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  und eine Isometrie für  $d_h$  ist. Nach Satz 5.22 ist jede diese Abbildung erzeugt als die Verknüpfung von  $z \mapsto z + w$ ,  $z \mapsto w \cdot z$  mit  $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto -1/z$  und  $z \mapsto -\bar{z}$ . Nun bildet jede dieser Abbildung  $\mathcal{H}$  isometrisch auf  $\mathbb{H}$  ab. Zeigen wir nun, dass auch jede Isometrie  $\Phi$  von  $\mathbb{H}$  sich so schreiben lässt. Nach Satz 5.22(iii) können wir ohne Einschränkung nach Komposition mit einer geeigneten Möbiustransformation davon ausgehen, dass von  $\Phi$  drei ideale Punkte fixiert werden. Daraus folgt, dass  $\Phi$  eine Invariante Gerade hat und einen weiteren idealen Punkt fixiert. Nun ist damit aus dem ersten Fakt nach Satz 3.64  $\Phi$  eine Translation, da jedoch ein weiterer idealer Punkt fixiert wird, muss diese Translation trivial sein. Also ist  $\Phi$  die Identität.  $\square$

## 5.4 Poincaré Halbebene

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das oft beschriebene Modell der Poincaré Halbebene tatsächlich die Axiome der hyperbolischen Geometrie erfüllt. Insbesondere folgt daraus, dass es keinen Beweis gibt, der für eine beliebige absolute Ebene zeigt, dass das Parallelenaxiom gilt. Mit anderen Worten: Das jahrtausendealte Unterfangen verschiedenster Mathematiker dies zu zeigen war zum Scheitern verurteilt. Zuvor brauchen wir allerdings noch ein paar wichtige Lemmata. Für einen Punkt  $O \in \mathbb{H}$  und  $r > 0$  bezeichnen wir mit

$$K_h(O, r) = \{P \in \mathbb{H} \mid d_h(O, P) = r\},$$

den *hyperbolischen Kreis*, d.h. den Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  bezüglich des hyperbolischen Abstands  $d_h$ . Weiterhin bezeichnen wir mit  $K(O, r) = \{P \in \mathbb{C} \mid d(O, P) = r\}$  den Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  bezüglich des euklidischen Abstands. Das nächste Lemma besagt, dass die Menge eines hyperbolischen Kreises ein euklidischer Kreis ist, welcher komplett in  $\mathbb{H}$  enthalten ist, jedoch ist der Mittelpunkt und der Radius verschieden. Um dies genau zu beschreiben definieren wir dafür den *Sinus hyperbolicus* und den *Kosinus hyperbolicus* als reelle Funktionen  $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\sinh r = \frac{e^r - e^{-r}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \cosh r = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

für alle  $r \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 5.24.** Für jedes  $O \in \mathbb{H}$  und  $r > 0$  gilt  $K_h(O, r) = K(\hat{O}, \hat{r})$  wobei  $\hat{r} = y \cdot \sinh r$  und  $\hat{O} = x + iy \cdot \cosh r$  mit  $x$  und  $y$  Real- bzw. Imaginärteil von  $O$ .

*Beweis.* Zeigen wir zunächst, dass  $K_h(O, r)$  ein euklidischer Kreis ist und bestimmen im Anschluss den Mittelpunkt und Radius. Sei dazu  $\Gamma$  der euklidische Kreis mit Mittelpunkt  $\bar{O} = x - iy$  welcher tangential zur  $x$ -Achse ist. Sei  $O'$  die Inversion von  $O$  an  $\Gamma$ . Die obere Halbebene  $\mathcal{H}$  wird durch Inversion an  $\Gamma$  auf das Innere des euklidischen Kreises  $K = K(O', \rho)$  mit Mittelpunkt  $O'$  tangential zur  $x$ -Achse abgebildet. Wir behaupten, dass jede  $h$ -Gerade durch  $O$  durch Inversion an  $\Gamma$  auf einen Durchmesser von  $K$  abgebildet wird, sodass die idealen Punkte auf die Randpunkte des Durchmessers abgebildet werden. Tatsächlich, nach Definition sind  $h$ -Geraden durch  $O$  Teile von euklidischen Kreisen oder Geraden die senkrecht auf der  $x$ -Achse stehen und durch  $\bar{O}$  und  $O$  verlaufen, und diese werden durch Inversion an  $\Gamma$  auf Geraden abgebildet welche nun senkrecht auf  $K$  stehen und durch  $O'$  verlaufen, nach Satz 4.64 und 4.65. Dies sind genau die Durchmesser.

Sei nun  $P \in \mathbb{H}$  so dass  $d_h(O, P) = r$ . Seien außerdem  $X, Y$  die idealen Punkte der  $h$ -Geraden  $(OP)_h$ . Wir bezeichnen mit  $X', O', P'$  und  $Y'$  die Inversionen von  $X, O, P$  und  $Y$  unter  $\Gamma$ . Nach möglichen Vertauschen von  $X$  und  $Y$  gilt  $O'X' = O'Y' = \rho$  wobei  $\rho$  der Radius von  $K$  ist und

$$e^r = \frac{XP \cdot OY}{XO \cdot PY} = \frac{X'P' \cdot O'Y'}{X'O' \cdot P'Y'} = \frac{X'P'}{P'Y'} = \frac{\rho + O'P'}{\rho - O'P'}$$

wobei die zweiten Gleichung nach Satz 4.63, die dritte da  $O'$  der Mittelpunkt von  $X'Y'$  ist und die vierte da ohne Einschränkung  $O'$  zwischen  $X'$  und  $P'$  und damit  $P'$  zwischen  $O'$  und  $Y'$  liegt. Diese Gleichung nach  $O'P'$  umgestellt liefert

$$O'P' = \rho \cdot \frac{e^r - 1}{e^r + 1} =: r'$$

Damit folgt  $P' \in K(O', r')$ . Erneut mit Satz 4.64 folgt, dass  $P$  auf dem euklidischen Kreis  $L$  liegt, wobei  $L$  durch die Inversion von  $K(P', r')$  an  $\Gamma$  gegeben ist. Die obigen Rechnungen lassen sich umkehren und wir schließen dass auch jeder Punkt auf  $L$  auf dem hyperbolischen Kreis  $K_h(O, r)$  liegt.

Da sowohl  $d_h$  als auch der euklidische Abstand  $d$  invariant unter Spiegelung an der euklidischen Geraden  $\ell$  durch  $O$  und  $\bar{O}$  ist, sind sowohl  $K_h(O, r)$  als auch  $L$  symmetrisch bezüglich  $\ell$ . Insbesondere liegt der Mittelpunkt von  $L$  auf  $\ell$ . Bezeichne mit  $AB$  den Durchmesser von  $L$  auf  $\ell$ , wobei  $A = x + iy_A$  und  $B = x + iy_B$  mit  $y_A < y_B$ . Es gilt

$$\begin{aligned} r = d_h(O, A) = \ln y - \ln y_A &\iff y_A = ye^{-r} \\ r = d_h(O, B) = \ln y_B - \ln y &\iff y_B = ye^r. \end{aligned}$$

Damit  $\hat{r} = \frac{1}{2}|B - A| = \frac{1}{2}y(e^r - e^{-r}) = y \cdot \sinh r$  und  $\Im \hat{O} = \frac{1}{2}(\Im B + \Im A) = \frac{1}{2}y(e^r + e^{-r}) = y \cdot \cosh r$ .  $\square$

**Lemma 5.25.** Je zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \mathbb{H}$  liegen auf einer eindeutigen  $h$ -Geraden.

*Beweis.* Zeigen wir die Existenz. Falls  $\Re A = \Re B =: c$ , dann gilt offenbar  $A, B \in h_c$ . Falls  $\Re A \neq \Re B$ , dann schneidet die euklidische Mittelsenkrechte die  $x$ -Achse in einem Punkt, etwa  $M = (a, 0)$  und  $A, B \in h_{a,r}$  mit  $r := d(A, M) = d(B, M)$  nach Eigenschaft der Mittelsenkrechten 3.31. Zeigen wir die Eindeutigkeit. Je zwei  $h$ -Geraden  $g$  und  $h$  sind Teilmengen von euklidischen Kreisen oder Geraden, bezeichnet mit  $\hat{g}$  bzw.  $\hat{h}$ , welche senkrecht auf der  $x$ -Achse stehen. Jeder Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  entspricht genau zwei Schnittpunkten von  $\hat{g}$  und  $\hat{h}$ . Da es für verschiedene  $\hat{g}$  und  $\hat{k}$  nach Satz 3.42 und 3.47 maximal zwei Schnittpunkte in  $\hat{g} \cap \hat{k}$  gibt, gibt es in  $g \cap h$  maximal einen Schnittpunkt. Das zeigt die Eindeutigkeit.  $\square$

**Lemma 5.26.** *Seien  $A, B$  und  $C$  Punkte in  $\mathbb{H}$ , dann gilt*

$$d_h(A, B) + d_h(B, C) \leq d_h(A, C), \quad (5.3)$$

wobei „ $=$ “ genau dann, wenn  $A, B, C$  auf einer  $h$ -Geraden liegen und  $B$  auf der  $h$ -Strecke  $AC_h$  liegt.

*Beweis.* Nach Lemma 5.25 gibt es eine  $h$ -Gerade  $g$  durch  $A$  und  $B$ . Nach Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt einer der idealen Punkte von  $g$  und Satz 4.63 gehen wir davon aus, dass  $g = h_c$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Nach möglichen Umbenennen von  $A$  und  $B$  sei außerdem  $\Im A < \Im B$ . Nach Lemma 5.24 und Satz 3.42 ist

$$K := K_h(B, r), \quad \text{mit } r := d_h(B, C),$$

ein euklidischer Kreis und hat mit  $h_c$  genau zwei Schnittpunkte. Benennen diese mit  $P$  und  $Q$  wobei  $\Re Q < \Re P$ . Ferner definiere die hyperbolischen Kreise

$$\begin{aligned} L_1 &= K_h(A, s), & \text{mit } s &:= d_h(A, P) \\ L_2 &= K_h(A, t), & \text{mit } t &:= d_h(A, C). \end{aligned}$$

Da  $L_1$  und  $L_2$  konzentrische Kreise sind gilt entweder  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  oder  $L_1 = L_2$ . Im zweiten Fall gilt  $P = C$ , es liegen  $A, B, C$  auf einer  $h$ -Geraden und  $B$  auf der  $h$ -Strecke  $AC_h$ . Außerdem gilt mit  $y_A := \Im A$ ,  $y_B := \Im B$ ,  $y_C := \Im C$

$$d_h(A, B) + d_h(B, C) = \ln y_B - \ln y_A + \ln y_C - \ln y_B = |\ln y_A - \ln y_C| = d_h(A, C). \quad (5.4)$$

Also gilt  $=$  in (5.3).

Betrachten wir nun den ersten Fall. Wir betrachten nun die Kreise  $K, L_1$  und  $L_2$  als euklidische Kreise nach Lemma 5.24. Alle Kreise sind symmetrisch bezüglich Spiegelung an der euklidischen Geraden durch  $h_c$ . Demnach gilt  $K \cap L_1 = \{P\}$  nach Übung 3.46, d.  $K$  und  $L_1$  haben eine gemeinsame Tangente in  $P$  haben. Da für  $Q \in K$  gilt  $Q \in \text{Inn } L_1$  folgt daraus  $K \setminus \{P\} \subset \text{Inn } L_1$ . Insbesondere folgt für  $C \in K$ , dass  $C \in \text{Inn } L_1$ . Da aber auch  $C \in L_2$  und  $L_2 \cap L_1 = \emptyset$  folgt  $L_2 \subset \text{Inn } L_1$ , d.h.  $t < s$  und somit

$$d_h(A, C) < d_h(A, P) = d_h(A, B) + r = d_h(A, B) + d_h(B, C),$$

nach Definition von  $s$ ,  $t$  und  $r$  sowie der gleichen Rechnung wie (5.4) da nach Konstruktion  $A, B, P$  auf einer  $h$ -Geraden liegen und  $B$  auf der  $h$ -Strecke  $AP_h$ . Das zeigt (5.3) mit  $<$  für diesen Fall.

Seien nun schließlich umgekehrt Punkte  $A, B$  und  $C$  auf einer  $h$ -Geraden gegeben, so dass  $B$  auf der  $h$ -Strecke  $AC_h$  liegt. Nach gleicher Argumentation wie oben liegen ohne Einschränkung die Punkte  $A, B$  und  $C$  auf  $h_c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  und mit der analogen Rechnung wie in (5.4) folgt (5.3) mit  $=$ .  $\square$

Wir kommen nun zum ersten und zweiten Axiom für das Modell  $\mathbb{H}$ .

**Lemma 5.27.** *Das Paar  $(\mathbb{H}, d_h)$  ist ein metrischer Raum. Außerdem sind die  $h$ -Geraden genau die Geraden im Sinne von Definition 2.9.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass  $d_h$  symmetrisch und nicht-ausgeartet ist. Gegeben zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \mathcal{H}$ . Wie am Anfang von Beweis von Lemma 5.26 gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit, dass  $A, B \in h_c$  mit einem  $c \in \mathbb{R}$ . Setze  $y_A := \Im A$  und  $y_B := \Im B$  und berechne

$$d_h(A, B) = |\ln y_A - \ln y_B| = |\ln y_B - \ln y_A| = d_h(A, B).$$

Außerdem gilt  $d_h(A, B) > 0$  da  $\ln$  eine injektive Funktion ist. Das zeigt (i) – (iii) von Definition 2.4. Punkt (iv) folgt aus Lemma 5.26. Somit ist  $(\mathbb{H}, d_h)$  ein metrischer Raum. Zeigen wir, dass  $h$ -Geraden auch Geraden im Sinn von Definition 2.9 sind. Angenommen  $g = h_c$ , dann definiere

$$\Phi : h_c \rightarrow \mathbb{R}, \quad (c, y) \mapsto \ln y,$$

Diese Funktion ist eine Bijektion und abstandserhaltend, denn mit  $y_A := \Im A$  und  $y_B := \Im B$  folgt

$$d_h(A, B) = |\ln y_A - \ln y_B| = |\Phi(A) - \Phi(B)|.$$

Angenommen  $g = h_{a,r}$ , dann definiere

$$\Phi : h_{a,r} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P = a + re^{i\varphi} \mapsto \ln \tan \frac{\varphi}{2}.$$

Da die Funktion  $\ln \tan : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bijektion ist, ist auch  $\Phi$  eine Bijektion und mit Aufgabe 13.7 auch abstandserhaltend, denn mit  $A = a + re^{i\varphi_A}$  und  $B = a + re^{i\varphi_B}$  gilt

$$d_h(A, B) = \left| \ln \tan \frac{\varphi_A}{2} - \ln \tan \frac{\varphi_B}{2} \right| = |\Phi(A) - \Phi(B)|.$$

Wir müssen noch zeigen, dass auch umgekehrt, jede Gerade für  $d_h$  bezüglich Definition 2.9 auch eine  $h$ -Gerade ist. Sei dazu  $(AB)$  eine Gerade für  $d_h$  bezüglich Definition 2.9. Nach Lemma 5.25 gibt es eine eindeutige  $h$ -Gerade  $g$ , so dass  $A, B \in g$ . Wir müssen zeigen, dass  $(AB) = g$ . Sei dazu  $P \in (AB)$ . Falls  $P$  auf der Strecke  $AB$  liegt, folgt

$$d_h(A, P) + d_h(P, B) = d_h(A, B),$$

und somit nach Lemma 5.26  $P \in h$ . Analog folgen die anderen Fälle,  $A$  auf der Strecke  $PB$  und  $B$  auf der Strecke  $AP$ . Damit  $(AB) \subset g$ . Wort für Wort mit dem Unterschied, dass wir Strecken durch  $h$ -Strecken ersetzen folgt auch  $g \subset (AB)$ .  $\square$

**Satz 5.28.** *Das Modell  $(\mathbb{H}, d_h, \angle_h)$  ist ein Modell der hyperbolischen Geometrie.*

*Beweis.* Axiome (I) und (II) wurde schon in den Lemmata 5.27 und 5.25 nachgewiesen. Zeigen wir nun Axiom (III). Wie in Beweis von Lemma 5.24 zeigen wir, dass nach geeigneter Inversion am Kreis die  $h$ -Strahlen in  $O$  den euklidischen Strahlen in  $O'$  entsprechen. Damit folgt Axiom (IIIa) und (IIIb) aus dem entsprechenden Axiom für das kartesische Modell. Für (IIIc) betrachten wir die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad (A, O, B) \mapsto (y^{-1} \cdot (A - x), y^{-1} \cdot (B - x)),$$

wobei  $O = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Eine einfache Übung zeigt, dass  $\Psi$  stetig ist. Für  $(A', B') = \Psi(A, O, B)$  gilt, da Möbiustransformationen winkeltreu sind,  $\overline{\angle_h AOB} = \overline{\angle_h A'O'B'}$  wobei  $O' = i$ . Erneut nach geeigneter Inversion am Kreis, wie in Beweis von Lemma 5.24 werden die  $h$ -Strahlen durch  $O'$  auf euklidischen Strahlen abgebildet. Insgesamt ist die  $h$ -Winkelmaßfunktion eine Komposition stetiger Funktionen, nämlich von  $\Psi$ , einer Inversion am Kreis und der euklidischen Winkelmaßfunktion für welche (IIIc) gilt. Somit wurde (IIIc) nachgewiesen. Zeigen wir Axiom (IV). Dazu seien  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  zwei Dreiecke in  $\mathbb{H}$  mit

$$d_h(A, B) = d_h(A', B'), \quad d_h(A, C) = d_h(A', C') \quad \text{und} \quad \overline{\angle_h CAB} = \pm \overline{\angle_h C'A'B'}.$$

Wir wollen zeigen, dass es eine Isometrie  $\Phi$  für  $d_h$  gibt, mit  $\Phi(A) = A'$ ,  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$ . Zunächst ist leicht zu sehen, dass es eine Isometrie gibt, welche  $A$  auf  $A'$  abbildet, etwa gegeben durch Spiegelung an der  $h$ -Mittelsenkrechten der  $h$ -Strecke  $AA'_h$ . Nach Anwenden dieser Isometrie auf  $A$ ,  $B$  und  $C$  nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass  $A = A'$ . Nun gibt es wiederum eine Isometrie, nämlich Spiegelung an der  $h$ -Geraden  $g$  durch die  $h$ -Winkelhalbierenden von  $\angle_h BAB'$ , mit Fixpunkt  $A$  welche  $B$  auf  $B'$  abbildet. Nach Anwenden dieser Isometrie auf  $A$ ,  $B$  und  $C$  nehmen wir nun an, dass  $A = A'$  und  $B = B'$ . Falls  $\overline{\angle_h CAB} = \overline{\angle_h C'A'B'}$  dann folgt da bereits Axiom (IIIa) nachgewiesen wurde, dass dann  $C = C'$  gelten muss. Im anderen Fall, wenn  $\overline{\angle_h CAB} = -\overline{\angle_h C'A'B'}$ , dann liefert die Spiegelung an der  $h$ -Geraden  $(AB)_h$  eine Isometrie mit Fixpunkten  $A$  und  $B$  welche  $C$  auf  $C'$  abbildet wie gewünscht. Zeigen wir schließlich Axiom  $\neg(V)$ . Dazu genügt es drei geeignete  $h$ -Geraden und einen Punkt  $P$  anzugeben, etwa  $g = h_0$ ,  $h = h_1$  und  $k = h_{1,1}$  sowie  $P = (1, 1)$ . Offenbar gilt  $k, h \parallel g$  und  $P \in h \cap k$ .  $\square$

## Literatur

- [1] H. Koch, *Einführung in die Mathematik*, Springer Berlin, 2004.
- [2] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser Berlin, 2000.
- [3] G. E. Martin, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidian Plane*, Springer Berlin, 1991.