Lösung Blatt 2

Aufgabe 1.)

(a) $\phi^*\left(\frac{dy}{y}\right) = \frac{de^x}{e^x} = \frac{e^x dx}{e^x} = dx$

(b) $\phi^*(dx \wedge dy) = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = \big(\cos\theta\, dt - r\sin\theta\, d\theta\big) \wedge \big(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta\big) = r\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)\, dr \wedge d\theta = r\, dr \wedge d\theta$

(c)

$$\begin{aligned}\phi^*\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right) &= \frac{r\cos\theta\, d(r\sin\theta) - r\sin\theta\, d(r\cos\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\ &= \frac{1}{r^2}\big(r\sin\theta\cos\theta dr + r^2\cos^2\theta\, d\theta - r\sin\theta\cos\theta\, dr + r^2\sin^2\theta\, d\theta\big) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = d\theta\,.\end{aligned}$$

Nach Definition und k-Linearität gilt

$$\begin{aligned}\phi^* dy^I &= d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_k} \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^n \frac{\partial\phi^{i_1}}{\partial x_{j_1}}\, dx^{j_1}\right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^n \frac{\partial\phi^{i_2}}{\partial x_{j_2}}\, dx^{j_2}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^n \frac{\partial\phi^{i_k}}{\partial x_{j_k}}\, dx^{j_k}\right) \\ &= \sum_{1\le j_1, j_2, \dots, j_k \le n} \frac{\partial\phi^{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial\phi^{i_2}}{\partial x_{j_2}} \cdots \frac{\partial\phi^{i_k}}{\partial x_{j_k}}\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &= \sum_{1\le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n} \sum_{\pi\in\Sigma_k} (-1)^\pi \frac{\partial\phi^{i_1}}{\partial x_{j_{\pi(1)}}} \frac{\partial\phi^{i_2}}{\partial x_{j_{\pi(2)}}} \cdots \frac{\partial\phi^{i_k}}{\partial x_{j_{\pi(k)}}}\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &= \sum_J \det\left(\frac{\partial\phi^I}{\partial x_J}\right) dx^J\end{aligned}$$

Aufgabe 2.)

(i) Sei $\psi : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to S^2$, $(\varphi, \theta) \mapsto (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ Kugelkoordinatn auf S^2. Wir berrechnen den Pull-back

$$\begin{aligned}\psi^*\omega &= \cos\theta\cos\varphi\, d(\cos\theta\sin\varphi) \wedge d(\sin\theta) - \cos\theta\sin\varphi\, d(\cos\theta\cos\varphi) \wedge d(\sin\theta) \\ &\qquad + \sin\theta\, d(\cos\theta\cos\varphi) \wedge (\cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos\theta\cos\varphi\big(-\sin\theta\sin\varphi\, d\theta + \cos\theta\cos\varphi\, d\varphi\big) \wedge \cos\theta\, d\theta \\ &\qquad - \cos\theta\sin\varphi\big(-\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - \cos\theta\sin\varphi\, d\varphi\big) \wedge \cos\theta\, d\theta \\ &\qquad + \sin\theta\big(-\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - \cos\theta\sin\varphi\, d\varphi\big) \wedge \big(-\sin\theta\sin\varphi\, d\theta + \cos\theta\cos\varphi\, d\varphi\big) \\ &= \cos^3\theta\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big)\, d\varphi \wedge d\theta + \sin^2\theta\cos\theta\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big)\, d\varphi \wedge d\theta \\ &= \cos\theta\, d\varphi \wedge d\theta\,.\end{aligned}$$

Das Komplement des Bildes von ψ ist eine Nullmenge. Deshalb

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\mathrm{im}\psi} \omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, d\varphi d\theta = 2\pi \sin\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} = 4\pi\,.$$

Wir müssen noch zeigen, dass $(\operatorname{im}\psi, \psi^{-1})$ eine positive Karte ist. Da $\psi^*\omega$ ein positives Vielfaches von $d\varphi \wedge d\theta$ ist, genügt es zu zeigen, dass ω eine positive Volumenform ist. Das ist gegeben, denn mit $\nu := x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ einem äußeren Normalenvektorfeld gilt $i_\nu(dx \wedge dy \wedge dz) = \omega$.

(ii) betrachte $\psi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{T}^2$ gegeben durch $(\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta)$. Wir berrechnen

$$\begin{aligned}\psi^*\omega &= \sin\varphi \sin\theta\, d(\cos\varphi) \wedge d(\cos\theta) - \sin\varphi\cos\theta\, d(\cos\varphi) \wedge d(\sin\theta)\\ &\qquad - \cos\varphi\sin\theta\, d(\sin\varphi) \wedge d(\cos\theta) + \cos\varphi\cos\theta\, d(\sin\varphi)\wedge d(\sin\theta)\\ &= \big(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta\big)\, d\varphi\wedge d\theta\\ &= \big(\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\big)\, d\varphi \wedge d\theta = d\varphi\wedge d\theta\end{aligned}$$

Da wieder das Komplement vom Bild von ψ eine Nullmenge ist, berrechnen wir

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega = \int_{\operatorname{im}\psi} \omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi d\theta = 4\pi^2 \,.$$

Nach Definition der Produktorientierung ist $(\operatorname{im}\psi, \psi^{-1} = \psi_0^{-1} \times \psi_1^{-1})$ eine positive Karte.

Aufgabe 3.)

(i) Sei $U \subset M$ eine offene Menge und $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ Vektorfelder, welche punktweise eine positive orthonormale Basis bilden. Dann gilt $\operatorname{vol}_M(X_1, \dots, X_n) \equiv 1$ auf U und mit der Formel für die Lie-Ableitune

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_X \operatorname{vol}_M\big)(X_1, \dots, X_n) &= \mathcal{L}_X(1) - \sum_{j=1}^n \operatorname{vol}_M(X_1, \dots, X_{j-1}, \mathcal{L}_X X_j, X_{j-1}, \dots, X_n)\\ &= - \sum_{1\le i,j\le n} \varepsilon_i g(\mathcal{L}_X X_j, X_i)\operatorname{vol}_M(X_1,\dots,X_{j-1},X_i,X_{j+1},\dots,X_n)\\ &= -\sum_{j=1}^n \varepsilon_j g([X, X_j], X_j)\\ &= -\sum_{j=1}^n \varepsilon_j g(\nabla_X X_j - \nabla_{X_j} X, X_j)\\ &= -\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \big(g(\nabla_X X_j, X_j) - g(\nabla_{X_j} X, X_j)\big)\\ &= -\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left(\frac{1}{2}\cdot \underbrace{X\big(g(X_j, X_j)\big)}_{=0} - g(\nabla_{X_j}X, X_j)\right) = \operatorname{div}(X)\end{aligned}$$

Wir schliessen $\mathcal{L}_X \operatorname{vol}_M = \operatorname{div}(X)\operatorname{vol}_M$.

(ii) Mit Cartans Formel, Satz von Stokes und Schritt (i)

$$\int_M \operatorname{div}(X)\operatorname{vol}_M = \int_M \mathcal{L}_X\operatorname{vol}_M = \int_M (i_X \circ d + d \circ i_X)\operatorname{vol}_M = \int_M d i_X \operatorname{vol}_M = \int_{\partial M} i_X \operatorname{vol}_M \,.$$

Wir zerlegen $X = \varepsilon g(X,\nu)\nu + X^{\parallel}$ wobei $X^{\parallel}$ parallel zu ∂X ist. Außerdem da die Kontraktion i_X tensoriell in X ist und $i_\nu \mathrm{vol}_M = \mathrm{vol}_{\partial M}$

$$i_X \mathrm{vol}_M = \varepsilon g(X,\nu) i_\nu \mathrm{vol}_M + i_{X^{\parallel}} \mathrm{vol}_M = \varepsilon g(X,\nu)\mathrm{vol}_{\partial M} + i_{X^{\parallel}} \mathrm{vol}_M \,,$$

Der Pull-back von $i_{X^{\parallel}}\mathrm{vol}_M$ auf ∂M verschwindet, da n Vektoren im Tangentialraum von $T\partial M$ linear abhängig sind. Damit setzen wir die Rechnung fort und erhalten

$$\int_M \mathrm{div}(X)\mathrm{vol}_M = \varepsilon \int_{\partial M} g(X,\nu)\mathrm{vol}_{\partial M}$$

Aufgabe 4.) Die Menge M ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand da eine offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit mit Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sie ist außerdem mit der Volumenform $dx \wedge dy$ orientierbar. Wir berrechnen mit Polarkoordinaten $(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

$$\int_M d\omega = \int_M dx \wedge dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dr d\varphi = \pi \,.$$

Sowie

$$\int_{\partial M} \omega = \int_0^{\pi} \cos\varphi \, d(\sin\varphi) = \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2\varphi)) \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \,.$$