Lösung Blatt 3

Aufgabe 1.)

(i) Wir rechnen für $v \in T_xM$ ohne Angabe des Punktes x

$$\begin{aligned} g(\alpha^\sharp, v) &= \sum_{1\le i,j,\ell\le n} g(b_i g^{ij}\partial x_j, v^\ell \partial x_\ell) = \sum_{i,j,\ell} b_i g^{ij} v^\ell g_{j\ell} = \sum_{i,\ell} b_i v^\ell \delta^i_\ell = \sum_i b_i v^i = \alpha(v)\,. \\ g(X,v) &= \sum_{i,j} a^i v^j g(\partial x_i, \partial x_j) = \sum_{i,j} a^i v^j g_{ij} = X^\flat(v)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir zeigen, dass $\alpha^\sharp$ durch die Gleichung eindeutig bestimmt ist: Sei $\bar\alpha^\sharp$ die Definition bezüglich einer anderen Karte. Es gilt

$$g(\alpha^\sharp, v) = g(\bar\alpha^\sharp, v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(\alpha^\sharp - \bar\alpha^\sharp, v)\,.$$

Das gilt für alle $v \in T_xM$. Da g nicht-ausgeartet ist, folgt $\alpha^\sharp = \bar\alpha^\sharp$. Analog gilt für $\bar X^\flat$ bezüglich einer anderen Karte

$$X^\flat(v) = g(X,v) = \bar X^\flat(v) \qquad \Rightarrow \qquad (X^\flat - \bar X^\flat)(v) = 0\,.$$

Das gilt wieder für alle $v \in T_xM$, also $\bar X^\flat = X^\flat$. Wir zeigen, dass die Abbildungen invers zueinander sind: Nach (1) gilt für alle $v \in T_xM$

$$g\big((X^\flat)^\sharp, v\big) = X^\flat(v) = g(X,v)\,, \qquad ((\alpha^\sharp)^\flat)(v) = g(\alpha^\sharp, v) = \alpha(v)\,.$$

Wieder da g nicht-ausgeartet ist, schliessen wir $X = (X^\flat)^\sharp$ und $\alpha = (\alpha^\sharp)^\flat$.

(ii) Wegen (i) ist X ein Gradientenfeld, genau dann wenn $\alpha = X^\flat \in \Omega^1(M)$ exakt ist. Sei also $X = (df)^\sharp$ ein Gradientenfeld und $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(1) = x_1$ und $\gamma(0) = x_0$ ein Pfad. Nach Satz von Stokes hängt das Integral

$$\int_0^1 g_\gamma(X, \dot\gamma)\,dt = \int_0^1 \alpha(\dot\gamma)\,dt = \int_{[0,1]} \gamma^*\alpha = \int_{[0,1]} \gamma^* df = f(x_1) - f(x_0)\,,$$

nur von x_0 und x_1 aber nicht von γ ab. Somit ist X wegunabhängig.

Sei nun X wegunabhängig. Ohne Einschränkung ist M bogenzusammenhängend. Fixiere x_0 und definiere $f(x) := \int_\gamma \alpha$, wobei γ ein Pfad von x_0 nach x ist. Sei $v \in T_xM$ und $\gamma : [0, 1+\varepsilon] \to M$ ein Pfad mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$ und $\dot\gamma(1) = v$. Es gilt

$$d_xf(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \int_0^t \gamma^*\alpha = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \int_0^t \alpha_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s))\,ds = \alpha_x(v)\,.$$

Damit gilt $df = \alpha$ bzw. $(df)^\sharp = X$.

(iii) Sei $X \in \mathfrak{X}_{\mathrm{locgrad}}(M)$ und $\alpha := X^\flat$. Behauptung $d\alpha = 0$. Beweis: Sei $x \in M$ beliebig und U eine Umbegung, so dass $X|_U = (df)^\sharp \iff \alpha|_U = df$ für ein $f \in C^\infty(U)$. Damit $(d\alpha)|_U = (d\alpha|_U) = d^2 f = 0$. Andererseits sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ mit $d\alpha = 0$. Behauptung $\alpha^\sharp \in \mathfrak{X}_{\mathrm{locgrad}}(M)$. Beweis: Sei $x \in M$ beliebung und U Umbebung mit $U \cong \mathbb{R}^n$. Da $H^1_{dR}(U) = 0$ ist $[\alpha|_U] = 0$. Somit gibt es $f \in C^\infty(U)$, so dass $df = \alpha|_U \iff (df)^\sharp = X|_U$. Wir haben gezeigt, dass $\mathfrak{X}_{\mathrm{locgrad}}(M) \to Z^1_{dR}(M)$, $X \mapsto X^\flat$ ein Isomorphismus ist. Die Verkettung mit $Z^1_{dR}(M) \to H^1_{dR}(M)$ ist immernoch surjektiv und hat den Kern $\mathfrak{X}_{\mathrm{grad}}(M)$, da X ein Gradientenfeld ist, genau dann wenn es exakt ist. Also $H^1_{dR}(M) = Z^1_{dR}(M)/B^1_{dR}(M) \cong \mathfrak{X}_{\mathrm{locgrad}}(M)/\mathfrak{X}_{\mathrm{grad}}(M)$.

Aufgabe 2.) Setze $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\}$. Betrachte die Mayer-Vietoris Sequenz für $\mathbb{R}^2$ mit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$. Mit Verwendung dass $U \cong V \sim S^1$ gilt

$$\ldots \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^k(S^1) \oplus H^k(S^1) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \ldots$$

Für $k > 0$ schließen wir $H^k(M) \cong H^k(S^1) \oplus H^k(S^1)$; d.h. $H^1(M) = \mathbb{R}^2$ und $H^k(M) = 0$ für $k \geq 2$. Außerdem $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ da M zusammenhängend ist (oder mit Mayer-Vietoris Sequenz wenn $k = 0$). Basis von $H^0(M)$ ist Representiert durch $[f]$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in M$. Die Basis von $H^1(M)$ ist gegeben durch $[\alpha], [\beta]$ wobei mit $p = (0,0)$ und $q = (1,0)$

$$\alpha := \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \qquad \beta := \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Hier wurde berechnet: $\alpha = r^*\alpha_0$ und $\alpha_0 = ydx - ydx$ und $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $(x,y) \to (x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$ die Deformationsretraktion.

Aufgabe 3.)

(i) Sei $f \equiv c$. Behauptung $df = 0$. Beweis: Sei $x \in M$ beliebig und $v \in T_xM$ beliebig. Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ein Pfad mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma = v$. Damit

$$d_x f(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c = 0.$$

Also $df = 0$.

Sei nun $df = 0$. Fixiere $x_0 \in M$ und sei $x \in M$ beliebig. Sei γ ein Pfad von x_0 nach x. Mit Satz von Stokes gilt $f(x) - f(x_0) = \int_\gamma df = 0$. Damit $f(x) = f(x_0) =: c$ für alle $x \in M$.

(ii) Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Abbildung $I \to M$, $i \mapsto x_i$, so dass $x_i \in M_i$ für alle $i \in I$. Betrachte die Abbildung $Z^0_{dR}(M) = H^0_{dR}(M) \to \mathbb{R}^I$, $[f] \mapsto (f(x_i))_{i\in I}$. Diese Abbildung ist offensichtlich linear und hat die Inverse $c = (c_i)_{i \in I} \mapsto f_c$ wobei $f_c(x) = c_i$ wenn $x \in M_i$. Das ist nach Schritt (i) wohl-definiert.

Aufgabe 4) Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega^1(M)$ die punktweise duale Basis von $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$. Die Formen α_j sind glatt, denn wenn $X_j = \sum_{i=1}^n a^i_j \partial x_i$ und $\alpha_k = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell k} dx^\ell$ gilt $\delta_{jk} = \alpha_k(X_j) = \sum_{i,\ell} a^i_j b_{\ell k} \delta^\ell_i = \sum_\ell a^\ell_j b_{\ell k}$. In Matrizenschreibweise $E = A \cdot B$, wobei E die Einheitsmatrix, $A = (a^\ell_j)$ und $B = b_{\ell k}$; also sind Koeffizienten von $B = A^{-1}$ glatte Funktionen in a^i_k, insbesondere glatt. Damit definiere nun die Formen $(\alpha_I := \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k})_I \subset \Omega^k(M)$, wobei $I = (i_1, \ldots, i_k)$ über alle geordeten Tupel verläuft. Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ beliebig. Da $(\alpha_I)_I$ punktweise eine Basis von $\Lambda^k T^*M$ bildet, gibt es Funktionen $f_I : M \to \mathbb{R}$ so dass $\omega = \sum_I f_I \alpha_I$. Ähnlich zu eben, zeigt man, dass die Funktionen f_I glatt sind. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis auf $\mathbb{R}^n$ und $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ die assozierte Basis auf $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Damit ist die Abbildung

$$\psi : C^\infty(M) \otimes \Lambda^*\mathbb{R}^n \to \Omega^*(M), \qquad \sum_I f_I \otimes e_I \mapsto \sum f_I \alpha_I,$$

ein Isomorphismus. Außerdem $\psi(f \otimes e_I \wedge g \otimes e_J) = \psi(fg \otimes e_I \wedge e_J) = fg\alpha_I \wedge \alpha_J = \psi(f \otimes e_I) \wedge \psi(f \otimes e_J)$; also ist ψ sogar ein Isomorphismus von Algebren.