Lösung Blatt 4

Aufgabe 1.) Angenommen es gibt $r : M \to \partial M$, so dass $r \circ i = \mathrm{id}_{\partial M}$. Da ∂M orientierbar und kompakt ist, gibt es $\omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$, so dass $\int_{\partial M} \omega \neq 0$. Damit nach Satz von Stokes

$$0 \neq \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} i^* r^* \omega = \int_M dr^* \omega = \int_M r^* d\omega = 0\,,$$

da $d\omega \in \Omega^n(\partial M) = 0$.

Aufgabe 2.)

(i) Sei U eine Umbegung von p homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und $V := M \setminus \{p\}$. Mit $U \cap V \sim S^{n-1}$ haben wir

$$\ldots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(M \setminus \{p\}) \oplus H^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^k(S^{n-1}) \longrightarrow H^{k+1}(M) \longrightarrow \ldots \tag{1}$$

Nach Blatt 3 Aufgabe 3 gilt $H^0(M) \cong H^0(M \setminus \{p\}) \cong \mathbb{R}$. Damit für $k = 0$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(M \setminus \{p\}) \longrightarrow 0\ .$$

Wegen Exaktheit $H^1(M) \cong H^1(M \setminus \{p\})$. Für $1 < k < n-1$ folgt $H^k(M) \cong H^k(M \setminus \{p\})$ aus (**??**). Für $k = n-1$ berechnen wir $\delta : H^{n-1}(S^{n-1}) \to H^n(M)$ durch $\delta[\omega] \mapsto [d\rho_U \omega]$ wobei $\{\rho_U, \rho_V\}$ eine Teilung der Eins untergeordnet zu $\{U, V\}$ ist. Um zu zeigen, dass $[d\rho_U\omega] \neq 0$ genügt es zu zeigen, dass $\int_M d\rho_U \omega \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $U \cong \mathbb{R}^n$ eine Koordinatenumgebung wobei p mit 0 identifiziert wird. Verwende sphärische Koordinaten $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ auf $\mathbb{R}^n$. Ohne Einschränkung ist $\rho_U(x) = \rho(r)$ wobei $\rho(r) = 1$ für $1 \geq \varepsilon$ und $\rho(r) = 0$ für $r < \varepsilon/2$. Außerdem sei ω eine Volumenform auf $\{r = \varepsilon\} \cong S^{n-1}$ unabhängig von r. Damit

$$\int_M d\rho_U \omega = \int_U d\rho_U \omega = \int_0^\varepsilon \partial_r \rho_U \, dr \int_{\{r=\varepsilon\}} \omega = \rho(\varepsilon) - \rho(0) = 1\,.$$

Wir wenden dies auf die Mayer-Vietoris Sequenz für $k = n-1$ an und schließen:

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(M) \longrightarrow H^{n-1}(M \setminus \{p\}) \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[\cong]{\delta} \mathbb{R} \longrightarrow H^n(M \setminus \{p\}) \longrightarrow 0$$

Wegen Exaktheit $H^{n-1}(M) \cong H^{n-1}(M \setminus \{p\})$ und $H^n(M \setminus \{p\}) = 0$.

(ii) Angenommen ϕ ist nicht surjektiv, etwa $\phi^{-1}(p) = \emptyset$ für ein $p \in M$. Sei $\bar\phi : N \to M \setminus \{p\}$, $x \mapsto \phi(x)$ und $j : M \setminus \{p\} \to M$ die Einbettung. Es gilt $\phi = j \circ \bar\phi$. Danach $0 \neq \phi^*[\omega] = \bar\phi^* j^*[\omega] = 0$, da $H^n(M \setminus \{p\}) = 0$.

(iii) Sei $\omega = \rho \, dx \wedge dy$ wobei $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine positive Funktion mit Integral $\int_{\mathbb{C}} \omega = 1$. Angenommen $\int_{\mathbb{C}} \phi^* \omega = 0$. Es gilt $\phi^*\omega = \rho \circ \phi \det D\phi \, dx \wedge dy = \rho \circ \phi \, (\partial_x u^2 + \partial_y u^2) \, dx \wedge dy$. Damit

$$0 = \int_{\mathbb{C}} \phi^* \omega = \int_{\mathbb{C}} \rho \circ \phi \, (\partial_x u^2 + \partial_y u^2) \, dx \wedge dy\,.$$

Da ρ eine positive Funktion ist muss $\partial_x u^2 + \partial_y u^2 \equiv 0$. Daraus folgt, dass u konstant ist. Da ϕ die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt folgt auch, dass v konstant und demnach ϕ konstant ist. Wir schliessen: Wenn ϕ nicht konstant ist, dann ist $\int_S^2 \phi^* \omega \neq 0$ und somit ϕ surjektiv.

Aufgabe 3.) *Teil i)* Mit gleichen Bezeichnungen wie Aufgabe 2. Wir haben die Mayer-Vietoris Sequenz für die DeRham Kohomologie mit kompaktem Träger. Diesmal können wir nur $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $U \cong \mathbb{R}^n$ einsetzen. Es gilt $H_c^k(M) = H^k(M)$ da M kompakt ist.

$$\dots \longrightarrow H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow H_c^k(M \setminus \{p\}) \oplus H_c^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \dots$$

Nach Poincaré-Dualität folgt

$$H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^* \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{n-k}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{wenn } k = 1, n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $H_c^0(M \setminus \{p\}) = 0$ und $H^0(M) \cong \mathbb{R}$. Wir setzen dies in die Sequenz ein (unter der Vorrausetzung $n > 2$)

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_c^1(M \setminus \{p\}) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0$$

Das heisst $H_c^1(M \setminus \{p\}) \cong H^1(M)$ via j_*. Wenn $1 < k < n-1$ folgt genauso $H_c^k(M \setminus \{p\}) \cong H^k(M)$ via j_*. Der Rest

$$0 \longrightarrow H_c^{n-1}(M \setminus \{p\}) \longrightarrow H^{n-1}(M) \longrightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\underline{j}_* \oplus \underline{i}_*}$$

$$\longrightarrow H_c^n(M \setminus \{p\}) \oplus H_c^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^n(M) \longrightarrow 0$$

Die Abbildung $\underline{j}_* \oplus \underline{i}_*$ ist surjektiv, da $\underline{i}_* : H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_c^n(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist, denn beide Kohomologiegruppen sind via Integration über $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ isomorph zu $\mathbb{R}$ und die Fortsetzung durch Null ändert nicht den Wert des Integrals. Demnach zerfällt die Sequenz zu zwei kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow H_c^{n-1}(M \setminus \{p\}) \longrightarrow H^{n-1}(M) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_c^n(M \setminus \{p\}) \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^n(M) \longrightarrow 0$$

Das zeigt, $H_c^{n-1}(M \setminus \{p\}) \cong H^{n-1}(M)$ und $H_c^{n-1}(M \setminus \{p\}) \cong H^n(M)$ via j_*. Damit $H_c^k(M \setminus \{p\}) \cong H^k(M)$ via j_* für $k = 1, \dots, n$.

Wenn $n = 2$ haben wir die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_c^1(M \setminus \{p\}) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H_c^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{\underline{j}_* \oplus \underline{i}_*}$$

$$\longrightarrow H_c^2(M \setminus \{p\}) \oplus H_c^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0$$

Wieder ist $\underline{j}_* \oplus \underline{i}_*$ surjektiv. Damit zerfällt die Sequenz in zwei exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_c^1(M \setminus \{p\}) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_c^2(M \setminus \{p\}) \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0$$

Wir schliessen wieder $H_c^k(M \setminus \{0\}) \cong H^k(M)$ via j_* für $k = 1, 2$.

Teil ii) Es gilt nach Teil i) gilt für $k = 1, 2$

$$H_c^k(\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}) \cong H^k(\mathbb{T}^2) \cong \bigoplus_{\ell+m=k} H^\ell(S^1) \otimes H^m(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } k = 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 2 \end{cases}$$

Nach Poincaré-Dualität mit Blatt 3 Aufgabe 2

$$H_c^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\})^* \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } k = 1 \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 2 \end{cases}$$

Da beide Räume nicht kompakt sind $H_c^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}) \cong H_c^0(\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}) \cong 0$. Also haben $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ und $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ die gleiche DeRham-Kohomologie mit kompaktem Träger. Sie sind aber *nicht!* diffeomorph, denn sei ohne Einschränkung $p = (-1, 0)$ und $q = (1, 0)$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\} \to \mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ ein Diffeomorphismus. Dann definiere die Folge $(a_n) := ((-1)^n(1 + 1/n), 0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$. Jede Folge $(b_n) \subset \mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ hat eine konvergente Teilfolge oder ist eine Cauchy-Folge. Diese Eigenschaft überträgt sich auf $(a_n) = \phi^{-1}(\phi(a_n))$. Jedoch hat (a_n) weder eine konvergente Teilfolge noch ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 4.) Wir wissen aus Aufgabe 3. dass $H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ erzeugt durch $\rho(r)\, dr$, wobei $\rho(r)$ eine Funktion mit kompaktem Träger und Integral $\int_0^\infty \rho(r)\, dr = 1$. Ausserdem $H_c^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ erzeugt durch $\frac{1}{2\pi} \rho\, dr \wedge d\theta$ und $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ erzeugt durch $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$.

(i) Per Definition ist das Poincaré-Duale die Klasse $a[\frac{d\theta}{2\pi}] \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für $a \in \mathbb{R}$ so dass

$$\int_S j^* \rho\, dr = a \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \rho\, dr \wedge \frac{1}{2\pi}\, d\theta\,.$$

Damit ist $a = 1$

(ii) Nach Definition ist das geschlossene Poincaré-Duale die Klasse $b[\frac{d\theta}{2\pi}] \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für ein $b \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_C i^* \rho\, dr = b \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \rho\, dr \wedge \frac{1}{2\pi}\, d\theta\,.$$

Da $i^* dr = 0$ verschwindet die linke Seite und damit $b = 0$. Andererseits ist das kompakte Poincaré-Duale die Klasse $c[\rho\, dr] \in H_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_C i^* \left(\frac{1}{2\pi} d\theta \right) = c \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \rho\, dr \wedge \frac{1}{2\pi}\, d\theta\,.$$

Dadurch, dass die linke Seite gleich Eins ist, gilt $c = 1$.