Zwischentest

Abgabe bis: 13.6.2019

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche orientierte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand und ∇ ihr Levi-Civita Zusammenhang. Für $u \in C^\infty(M)$ definieren wir den *Gradient* durch $\operatorname{grad} u = (du)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ und für $X \in \mathfrak{X}(M)$ die *Divergenz* durch $\operatorname{div}(X) = \operatorname{Tr}^g(\nabla X^\flat) \in C^\infty(M)$ (vgl. Blatt 2 Aufgabe 3 und Blatt 3 Aufgabe 1). Der lineare Operator $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definiert durch $\Delta u = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ heißt *Laplace Operator*. Eine Funktion $u \in C^\infty(M)$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta u = 0$.

(i) Weisen Sie die Formel für Δ in lokalen Koordinaten nach

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

mit Summation über i, j und $\sqrt{\det g} := \sqrt{|\det(g_{ij})|}$. *Tipp: Blatt 2 Aufgabe 3(i).*

(ii) Beweisen Sie die *Greenschen Formeln*

$$\int_M u \Delta v \, vol_M^g = \int_M g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) vol_M^g - \varepsilon \int_{\partial M} uXv \, vol_{\partial M}^g \,,$$
$$\int_M \big(u\Delta v - v\Delta u\big) vol_M^g = \varepsilon \int_{\partial M} \big(vXu - uXv\big) vol_{\partial M}^g \,.$$

für alle Funktionen $u, v \in C^\infty(M)$ sodass u oder v kompakten Träger hat; wobei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein nach Außen zeigendes Normalenvektorfeld an ∂M und $\varepsilon := g(X, X) = \pm 1$ bedeutet. *Tipp: Zeigen Sie zunächst* $\operatorname{div}(fY) = Y(f) + f \operatorname{div}(Y)$ *für alle Funktionen* f *und Vektorfelder* Y*. Dann weiter mit Blatt 2 Aufgabe 3(ii).*

(iii) Sei M kompakt, zusammenhängend und ohne Rand. Zeigen Sie, dass jede harmonische Funktion auf M konstant ist.

(iv) Für $\alpha \in \Omega^1(M)$ definiere $\nabla\alpha \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ durch $(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und für eine Funktion $u \in C^\infty(M)$ definiere die *Hessische* $\operatorname{Hess} u \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ durch $\operatorname{Hess} u(X, Y) := (\nabla_X du)(Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie:

- Das Tensorfeld $\nabla\alpha$ ist symmetrisch genau dann wenn α geschlossen ist.
- Ist γ eine Geodäte von (M, g), so gilt $\operatorname{Hess} u(\dot\gamma, \dot\gamma) = \frac{d^2}{dt^2}(u \circ \gamma)$.
- $\Delta u = -\operatorname{Tr}^g \operatorname{Hess} u$.

(v) Betrachte das *Dirichlet Funktional* $E : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$,

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_M |\operatorname{grad} u|^2 vol_M^g \,.$$

Zeigen Sie: Die Funktion u ist harmonisch genau dann wenn die Funktion $s \mapsto E(u + sv)$ für alle $v \in C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger welche am Rand verschwinden einen kritischen Punkt in $s = 0$ hat.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der Torus und $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ die Projektionsabbildung. In dieser Aufgabe werden Sie die DeRahm-Kohomlogie von $\mathbb{T}^n$ mit Hilfe von Fourierreihen berechnen. Hierzu eine kurze Erklärung: Für $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{Z}^n$ ist der k-te Fourierkoeffizient gegeben durch

$$\hat{f}_k := \int_{[0,1]^n} f(\pi(x)) e^{-2\pi i \langle k,x\rangle} dx^1 \dots dx^n \in \mathbb{C}\,,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$ den Raum der Abbildungen von $\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{C}$. Ein Resultat aus der Theorie der Fourierreihen besagt, dass die lineare Abbildung $C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$, $f \mapsto (k \mapsto \hat{f}_k)$ injektiv ist. Ein zweites Resultat ist, dass für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ der k-te Fourierkoeffizient des Produkts fg durch die absolut konvergente Reihe $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\ell \hat{g}_{k-\ell}$ gegeben ist. Sie können diese Aussagen für die Lösung der Aufgabe ohne Beweis verwenden.

(i) Finden Sie einen Isomorphismus von differentiellen graduierten Algebren zwischen der dgA der Differentialformen $\Omega^*(\mathbb{T}^n)$ und $C^\infty(\mathbb{T}^n) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^n$ mit dgA-Struktur gegeben durch

$$(f \otimes v) \wedge (g \otimes w) := fg \otimes (v \wedge w)\,, \qquad d(f \otimes v) := \sum_{j=1}^n X_j(f) \otimes (v_j \wedge v)\,. \tag{1}$$

Hierbei ist $(v_1, \dots, v_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $X_j := d\pi(\partial x_j) \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^n)$.

(ii) Zeigen Sie: Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^n \to \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^n, \Lambda^* \mathbb{C}^n)\,, \qquad f \otimes v \mapsto \left(k \mapsto \hat{f}_k v\right)\,,$$

ist ein injektiver Morphismus von differentiellen graduierten Algebren; die dgA-Struktur ist dabei auf $C^\infty(\mathbb{T}^n) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^n$ gegeben durch (1) und auf dem Bild von $\mathcal{F}$ durch

$$(a * b)(k) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} a(\ell) \wedge b(k - \ell)\,, \qquad (da)(k) := 2\pi i k \wedge a(k)\,,$$

wobei Sie die Frage nach der Konvergenz der Reihe nicht zu beachten brauchen.

(iii) Sei V ein reeler Vektorraum. Zeigen Sie: Gegeben $\alpha \in \Lambda^\ell V^*$ und $\kappa \in V^*$ mit $\kappa \neq 0$ und $\kappa \wedge \alpha = 0$, dann gibt es $\beta \in \Lambda^{\ell-1} V^*$ mit $\alpha = \kappa \wedge \beta$. *Tipp: Verwenden Sie die Kontraktion i_v für ein $v \in V$ mit $\kappa(v) = 1$.*

(iv) Schliessen Sie, dass

$$\frac{\ker(d : \mathrm{im}\,\mathcal{F} \to \mathrm{im}\,\mathcal{F})}{\mathrm{im}(d : \mathrm{im}\,\mathcal{F} \to \mathrm{im}\,\mathcal{F})} \to \Lambda^* \mathbb{R}^n, \qquad [a] \mapsto a(0)\,,$$

ein wohl-definierter Isomorphismus von graduierten Algebren ist und folgern Sie daraus, dass $H^*(\mathbb{T}^n)$ als graduierte Algebra isomorph zu $\Lambda^* \mathbb{R}^n$ ist. Können Sie den Isomorphismus auch direkt angeben?

Bem: Auch wenn es andere Methoden gibt, um die DeRham-Kohomologie des Torus zu bestimmen, etwa durch die Künneth-Formel, so lässt sich das obige Verfahren mit Hilfe des Peter-Weyl Theorems auf kompakte Liegruppen verallgemeinern.

Aufgabe 3. In Analogie zum reel projektiven Raum definieren wir den *komplex projektiven Raum* $\mathbb{CP}^n$ als den Quotientenraum $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation $z \sim w \iff \lambda z = w$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

(i) Der Raum $\mathbb{CP}^n$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit und die offene Überdeckung mit den Mengen $U_i := \{[z_0 : \ldots : z_n] \mid z_i \neq 0\}$ für $i = 0, \ldots, n$ liefert einen orientierten Atlas.

(ii) Für die DeRham-Kohomologie von $\mathbb{CP}^n$ gilt

$$H^*(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{wenn } * = 0, 2, 4 \ldots, 2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tipp: Verwenden Sie die Mayer-Vietoris Sequenz mit den offenen Mengen $U := U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$ und $V := U_n$. Zeigen Sie dazu noch, dass U homotop zu $\mathbb{CP}^{n-1}$ ist.

(iii) Sei $H := \{[z_0 : \ldots : z_n] \mid z_n = 0\}$ und $L := \mathbb{CP}^n \setminus \{[0 : \ldots : 0 : 1]\}$. Zeigen Sie, dass H eine Untermannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{CP}^{n-1}$ und L bezüglich der Abbildung $[z_0 : \ldots : z_n] \to [z_0 : \ldots : z_{n-1} : 0]$ ein orientierbares Vektorbündel über H ist. Zeigen sie außerdem, dass L eine Tubenumgebung von H definiert.

(iv) Mit Identifikation $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ gilt für das Poincaré-Duale und die Eulerklasse

$$\int_{\mathbb{CP}^n} \mathrm{PD}(H)^n = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}} e(L)^{n-1} = 1\,.$$

Schließen Sie daraus, dass somit $\mathrm{PD}(H)$ die DeRahm-Kohomologie von $\mathbb{CP}^n$ erzeugt, d.h. es gilt $\mathrm{PD}(H)^k \neq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$. *Tipp: Zeigen Sie $\mathrm{PD}(H') = e(L) \in H^2(\mathbb{CP}^{n-1})$ wobei $H' = \{[z_0 : \ldots : z_{n-1}] \mid z_{n-1} = 0\}$.*

(v) Sei $S \subset \mathbb{CP}^n$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit. Wir definieren $\deg(S) \in \mathbb{R}$ durch Null wenn die Dimension von S ungerade ist und durch $\mathrm{PD}(S) = \deg(S)\mathrm{PD}(H)^{n-k}$ wenn $\dim S = 2k$. Sei $T \subset \mathbb{CP}^n$ eine weitere orientierte Untermannigfaltigkeit mit $\dim T + \dim S = 2n$ welche S transversal schneidet. Für $p \in S \cap T$ sei $\sigma(p) \in \{+1, -1\}$ der Orientierungswechsel von $T_pS \oplus T_pT$ zu $T_p\mathbb{CP}^n$. Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{p \in S \cap T} \sigma(p) = \deg(S)\deg(T)\,.$$

Bem: Das ist eine nicht-degenerierte Version des Satzes von Bézout. Dieser ist eigentlich für komplexe Untermannigfaltigkeiten formuliert. Für diese kann man zeigen, dass $\sigma(p) = 1$ für alle $p \in S \cap T$, falls sich S und T transversal und allgemeiner $\sigma(p) \geq 1$ falls sich S und T in endlich vielen Punkten schneiden. Damit liefert der Satz eine konkrete Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte mit Multiplizitäten. Ausserdem kann man zeigen, dass für jedes S es ein T mit $\deg(T) = 1$ gibt, welches S transversal schneidet; somit ist $\deg(S)$ immer eine ganze Zahl.

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *geodätisch konvex*, wenn es für alle Punkte $p, q \in U$ eine eindeutige nach bogenlänge parametrisierte Geodäte von p nach q gibt, welche komplett in U verläuft. Hierbei ist nicht ausgeschlossen, dass es eine andere Geodäte von p nach q gibt, welche die Umgebung U verlässt. Diese andere Geodäte kann sogar kürzer sein.

(i) Finden Sie eine geodätisch konvexe Menge U in einer Mannigfaltigkeit M und Punkte $p, q \in U$, so dass die eindeutige Geodäte $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ länger ist, als der Abstand von p zu q, d.h. $L(\gamma) > d(p, q)$. *Tipp:* $M = S^1$.

(ii) Finden Sie eine Teilmenge U in einer Mannigfaltigkeit M, so dass je zwei Punkte in U durch eine minimale Geodäte verbunden werden können aber U nicht geodätisch konvex ist. *Tipp:* $M = S^2$ *und* U *abgeschlossen.*

(iii) Man kann zeigen, dass jeder Punkt in einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit eine geodätisch konvexe Umgebung besitzt. Es sei $B_r(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$ der offene Ball um $p \in M$. Wie groß kann $r > 0$ in den folgenden Fällen gewählt werden damit $B_r(p)$ geodätisch konvex ist?

$$M = S^2\,, \qquad M = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1\,, \qquad M = \mathbb{R}^2\,, \qquad M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,,$$

wobei jeweils die Standardmetrik betrachtet wird. Vergleiche r mit dem Injektivitätsradius. Angenommen $B_r(p)$ ist in diesen Beispielen geodätisch konvex, sind die eindeutigen Geodäten in $B_r(p)$ minimierend?

(iv) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Überdeckung $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ durch beschränkte, geodätisch konvexe offene Mengen U_α. Bezeichne mit δ_α den Durchmesser von U_α und mit g_α die Metrik auf U_α definiert durch $\delta_\alpha^{-2} g$, so dass der Durchmesser von U_α in der neuen Metrik gleich 1 ist. Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine zu $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Teilung der Eins. Definiere die Metrik

$$\tilde{g} = \sum_\alpha \rho_\alpha g_\alpha\,.$$

Beweisen Sie, dass $\tilde{g}$ eine geodätisch vollständige Metrik ist; also jede Mannigfaltigkeit eine geodätisch vollständige Metrik besitzt.