Differentialgeometrie

Felix Schmäschke

11. Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialformen

Wir wollen den Begriff der Integration auf Mannigfaltigkeiten herleiten. Dem zugrunde liegt der Transformationssatz der (Lebesgue-)Integetration

$$\int_{\phi(U)} f\,d\mu = \int_U (f\circ\phi)|\det D\phi|\,d\mu\,, \tag{1}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \phi(U) \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist. Um eine Definition eines Integrals für Mannigfaltigkeiten zu erhalten, die unabhängig der Wahl von Karten ist, suchen wir nach einem Objekt, das sich unter Kartenwechsel wie der Integrant im Transformationssatz transformiert. Dies führt zu den Differentialformen. Die Grundlage dafür bilden die alternierenden Abbildungen.

1.1 Alternierende Abbildungen

Sei $\Bbbk$ ein Körper und V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\Bbbk$. Eine *alternierende k-lineare Abbildung* ist eine k-lineare Abbildung

$$\alpha : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk\,,$$

mit der Eigenschaft, dass $\alpha(v_1,\ldots,v_k) = 0$ für alle $v_1,\ldots,v_k \in V$ mit $v_i = v_j$ für ein $i \neq j$. Ein Beispiel für eine solche Abbildung ist die Determinante. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Alt}_k(V)$ den Vektorraum der alternierenden k-linearen Abbildungen. Im Folgenden wollen wir eine kanonische Basis und eine Produktstruktur für den Raum der alternierenden Abbildungen konstruieren. Dafür benötigen wir die *äußere Algebra*.

Äußere Algebra Die *äußere Algebra* ist definiert für $k \geq 0$ durch

$$\Lambda^0 V := \Bbbk\,, \qquad \Lambda^k V := V^{\otimes k}/I_k(V)\,, \qquad V^{\otimes k} = \underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{k \text{ Faktoren}}\,,$$

wobei $I_k(V) \subset V^{\otimes k}$ der Untervektorraum ist, erzeugt von allen Tensoren der Form $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k$ mit $v_i = v_j$ für mindestens ein $i \neq j$. Die Elemente von $\Lambda^k V$ heißen *k-Vektoren* und wir schreiben für die Äquivalenzklasse

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k := [v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k] \in \Lambda^k V\,.$$

Mit Ausnutzung der Multilinearität rechnet man leicht nach, dass für alle $i \neq j$ gilt

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_i\wedge\cdots\wedge v_j\wedge\cdots\wedge v_k = -v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_j\wedge\cdots\wedge v_i\wedge\cdots\wedge v_k\,. \tag{2}$$

Wir definieren das *Dachprodukt*, *Wedge-produkt* oder *äußeres Produkt* durch

$$\begin{gathered}\wedge : \Lambda^k V\otimes\Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell}V\\ v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k\otimes w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_\ell \mapsto v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k\wedge w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_\ell\,.\end{gathered}$$

Man beachte, dass nicht jeder k-Vektor der Form $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ ist; jedoch jeder k-Vektor als Linearkombination von solchen geschrieben werden kann. Damit ist durch lineare Fortsetzung das Dachprodukt wohldefiniert. Man überzeugt sich leicht mit (2), dass die folgenden Rechenregeln gelten

$$u \wedge v = (-1)^{k\ell} v \wedge u\,, \qquad (u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)\,, \tag{3}$$

für alle $u \in \Lambda^k V$, $v \in \Lambda^\ell V$ und $w \in \Lambda^m V$.

Satz 1.1. *Sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V, dann ist eine Basis von $\Lambda^k V$ gegeben durch*

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}. \tag{4}$$

Beweis. Wir wissen, dass $V^{\otimes k}$ von den Tensoren $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ mit $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset \{1, \ldots, n\}$ erzeugt wird. Mit (2) ist jeder dieser Tensoren im Quotient $\Lambda^k V$ entweder Null oder bis auf Vorzeichen gleich einem k-Vektor aus (4). Damit ist (4) ein Erzeugendensystem von $\Lambda^k V$. Sei nun

$$0 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, i_2, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\,, \qquad \lambda_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \in \Bbbk\,.$$

Gegeben $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ sei $\{j_{k+1}, \ldots, j_n\} := \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$. Es gilt für alle $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} = \begin{cases} \pm e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n & \text{wenn } (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also

$$0 = \sum \lambda_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} = \pm \lambda_{j_1, \ldots, j_k} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n\,,$$

und somit ist (4) linear unabhängig. □

Korollar 1.2. *Es gilt* $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ *für $k \leq n$ und $\Lambda^k V = 0$ wenn $k > n$.*

Wir bezeichnen mit $V^* := \mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$ den Dualraum. Die Elemente von $\Lambda^k V^*$ nennen wir *k-Formen*. Sie haben eine gesonderte Bedeutung, da sie mit den alternierenden k-linearen Abbildungen in Verbindung stehen.

Satz 1.3. *Die Abbildung $\phi : \Lambda^k V^* \to \mathrm{Alt}_k(V)$ definiert durch lineare Fortsetzung von*

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_k \mapsto \Big((v_1, \ldots, v_k) \mapsto \det \big(\sigma_i(v_j)\big)_{1 \leq i,j \leq k} \Big)\,,$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ die duale Basis. Bezeichne mit $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ die Basisvektoren aus Satz 1.1. Sei $\sigma = \sum_I \lambda_I e_I^*$ im Kern von ϕ. Für ein geordnetes Tupel $J = (j_1, \ldots, j_k)$ gilt

$$0 = \phi(\sigma)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_I \lambda_I \det(e_{i_\ell}^*(e_{j_m}))_{1 \leq \ell, m \leq k} = \sum_I \lambda_I \delta_{IJ} = \lambda_J\,.$$

Damit ist $\sigma = 0$ und ϕ injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Alt}_k(V)$ und $\Lambda^k V^*$ die gleiche Dimension haben. Betrachte dazu die Abbildung $\psi : \mathrm{Alt}_k(V) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^k V, \Bbbk)$, $\alpha \mapsto \psi_\alpha$ wobei ψ_α definiert ist durch lineare Fortsetzung von $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \alpha(v_1, \ldots, v_k)$. Man sieht leicht, das ψ injektiv ist. Also $\dim \mathrm{Alt}_k(V) \leq \dim \mathrm{Hom}(\Lambda^k V, \Bbbk) = \binom{n}{k}$ mit Korollar 1.2. Andererseits wissen wir bereits, dass $\Lambda^k V^*$ injektiv in $\mathrm{Alt}_k(V)$ liegt. Damit $\dim \mathrm{Alt}_k(V) \geq \dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$. □

Über den Isomorphismus identifizieren wir die alternierenden k-linearen Abbildungen mit den k-Formen und definieren somit eine Basis und ein Dachprodukt durch $\alpha \wedge \beta := \phi(\phi^{-1}(\alpha) \wedge \phi^{-1}(\beta))$.

Satz 1.4. *Wenn die Charakteristik von* $\Bbbk$ *gleich Null ist, erhalten wir die Formel*

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in \Sigma_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\pi)\alpha(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k)})\beta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+\ell)}), \tag{5}$$

für alle $\alpha \in \operatorname{Alt}_k(V)$, $\beta \in \operatorname{Alt}_\ell(V)$ *und* $v_1, \ldots, v_{k+\ell} \in V$ *wobei* $\Sigma_{k+\ell}$ *die symmetrische Gruppe von* $k+\ell$ *Elementen und* $\operatorname{sign}(\pi)$ *das Vorzeichen der Permutation* π *bedeutet.*

Beweis. Sei $\Sigma_{k,\ell} \subset \Sigma_m$ mit $m := k+\ell$ die Teilmenge aller Permutationen $\pi \in \Sigma_m$ mit der Eigenschaft $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(k)$ und $\pi(k+1) < \pi(k+2) < \cdots < \pi(m)$. Da α und β alternierend sind, reicht es zu zeigen

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \sum_{\pi \in \Sigma_{k,\ell}} \operatorname{sign}(\pi)\alpha(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k)})\beta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(m)}). \tag{6}$$

Außerdem, wegen Linearität, reicht es die Formel für $\alpha = \phi(e^*_{I_0})$, $\beta = \phi(e^*_{I_1})$ und $(v_1, \ldots, v_m) = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})$ nachzuweisen, wobei $I_0 = (i_1, \ldots, i_k)$ und $I_1 = (i_{k+1}, \ldots, i_m)$ geordnete Tupel sind. Beide Seiten verschwinden, falls $\{i_1, \ldots, i_m\} \neq \{j_1, \ldots, j_m\}$. Wir nehmen dadurch ohne Einschränkung an, dass $(v_1, \ldots, v_m) = (e_1, \ldots, e_m)$, $I_0 = (\mu(1), \ldots, \mu(k))$ und $I_1 = (\mu(k+1), \ldots, \mu(m))$ für ein $\mu \in \Sigma_{k,\ell}$. Auf der linken Seite von (6) steht dann

$$\phi(e^*_{I_0} \wedge e^*_{I_1})(e_1, \ldots, e_m) = \det(e^*_{\mu(i)}(e_j))_{1 \le i,j \le m} = \operatorname{sign}(\mu).$$

Für $\pi \in \Sigma_{k,\ell}$ schreibe geordnete Tupel $J_0^\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(k))$ und $J_1^\pi = (\pi(k+1), \ldots, \pi(m))$. Die rechte Seite von (6) vereinfacht sich dann zu

$$\sum_{\pi \in \Sigma_{k,\ell}} \operatorname{sign}(\pi)\delta_{I_0 J_0^\pi}\delta_{I_1 J_1^\pi} = \operatorname{sign}(\mu).$$

Damit ist die Formel (6) bewiesen. □

1.2 Differentialformen

Bevor wir Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten definieren, betrachten wir diese zunächst auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und weisen einige Eigenschaften nach. Wir definieren die *Differential-k-Formen auf U* durch

$$\Omega^k(U) := C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*).$$

Wir bezeichnen mit $dx^1, \ldots, dx^n$ die kanonische Basis auf dem dualen Raum von $\mathbb{R}^n$. Mit Satz 1.1 lässt sich jedes Element $\omega \in \Omega^k(U)$ eindeutig als die Summe schreiben

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

wobei $f_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$. Wir schreiben auch kurz $\omega = \sum_I f_I dx^I$. Das Dachprodukt setzt sich punktweise, d.h. $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$, zu einem assoziativen Produkt fort

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \to \Omega^{k+\ell}(U),$$

welche bilinear bezüglich der Multiplikation mit Funktionen $f \in C^\infty(U)$ ist und die gleichen Eigenschaften hat wie (3). Zusätzlich definieren wir die *äußere Ableitung*

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)\,, \qquad \omega = \sum_I f_I dx^I \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I\,.$$

Im Fall $k = 0$ ist $w = f \in C^\infty(U)$ eine Funktion und die obige Formel ist als $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$ zu verstehen.

Satz 1.5. *Es gilt $d^2 = 0$.*

Beweis. Es reicht $\omega = f dx^I$ zu betrachten. Wir rechnen mit Ausnutzung von (2)

$$\begin{aligned} d^2(f dx^I) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I\right) &= \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz verschwindet die rechte Seite. □

Satz 1.6. *Es gilt $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ für alle $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^\ell(U)$.*

Beweis. Es reicht wieder $\alpha = f dx^I$ und $\beta = g dx^J$ zu betrachten. Wir rechnen durch Ausnutzung der Kommutationsregeln (3) und der Produktregel für die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} d(f dx^I \wedge f dx^J) = d(fg dx^I \wedge dx^J) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J + f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I \wedge g dx^J + (-1)^k f dx^I \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta\,. \end{aligned}$$

□

Sei nun $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Auf Funktionen ist der *Pull-back* definiert durch $\phi^* : \Omega^0(\phi(U)) \to \Omega^0(U)$

$$\phi^* g = g \circ \phi\,.$$

Wir setzen diese Definition auf Differentialformen fort $\phi^* : \Omega^k(\phi(U)) \to \Omega^k(U)$ mit

$$\phi^*\left(\sum_I g_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I (g_I \circ \phi)\, d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_k}\,, \tag{7}$$

wobei $y_1, \dots, y_m$ die Koordinaten auf $\mathbb{R}^m$ und $\phi^i := \mathrm{pr}_i \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ die i-te Komponente der Abbildung ϕ ist.

Satz 1.7. *Es gilt $d\phi^*\alpha = \phi^* d\alpha$ für alle $\alpha \in \Omega^k(\phi(U))$ und glatten Abbildungen $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Beweis. Obda gilt $\alpha = gdy^I$. Dann gilt mit Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}
d\phi^*(gdy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) &= d\big((g \circ \phi)d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_k}\big) = d(g \circ \phi) \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_k} \\
\phi^* d(gdy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) &= \phi^* \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ \phi \right) d\phi^j \right) \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_k} \\
&= d(g \circ \phi) \wedge d\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{i_k} .
\end{aligned}$$

□

Kommen wir nun zu Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Sei M eine glatte Manngifaltigkeit mit einem Atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Wir beschreiben Differentialformen zunächst auf drei verschiedene Arten und zeigen im Anschluss, dass die Beschreibungen isomorph sind.

- Ein *alternierendes* $(k, 0)$*-Tensorfeld* ist eine Abbildung

  $$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) ,$$

  die folgende Bedingungen erfüllt.

  (i) Die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, $X \mapsto T(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_k)$ ist linear über dem Ring $C^\infty(M)$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

  (ii) Es gilt $T(X_1, \ldots, X_k) = 0$ für alle $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_i = X_j$ für mindestens ein $i \neq j$.

  Die Bedinung (ii) ist äquivalent zu

  $$T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k) ,$$

  für alle $i \neq j$ und alle Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}^{(k,0)}_{\text{alt}}(M)$ die Menge der alternierenden $(k, 0)$-Tensoren.

- Ein *glatter Schnitt im Bündel* $\Lambda^k T^*M$ ist eine Abbildung

  $$\omega : M \to \Lambda^k T^*M := \coprod_{x \in M} \Lambda^k T^*_x M , \qquad x \mapsto \omega_x \in \Lambda^k T^*_x M ,$$

  so dass die lokalen Darstellungen glatt sind, d.h. für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,n})) \in \mathcal{U}$ und geordnete Tupel $I = (i_1, \ldots, i_k)$ definieren wir Funktionen $f_{\alpha,I} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ durch

  $$\omega_x = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} f_{\alpha,(j_1,\ldots,j_k)}(x) d_x x^{j_1}_\alpha \wedge d_x x^{j_2}_\alpha \wedge \cdots \wedge d_x x^{j_k}_\alpha , \tag{8}$$

  und fordern, dass $f_{\alpha,I} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ glatt ist. Wir schreiben $\Gamma(\Lambda^k T^*M)$ für die Menge der glatten Schnitte in $\Lambda^k T^*M$.

- Ein *Čech-deRham* 0-*Kozykel* auch kurz 0-*Kozykel* ist ein Tupel

$$(\omega_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha \in A} \Omega^k(\varphi_\alpha(U_\alpha))\,,$$

so dass für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) die *Kozykeleigenschaft* gilt

$$\phi^*_{\alpha\beta}\omega_\beta = \omega_\alpha\,, \tag{9}$$

wobei $\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ die Kartenwechselabbildung ist. Schreibe $\check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^k)$ für die Menge aller Kozykel.

Satz 1.8. *Es gibt Isomorphismen* $\mathfrak{X}^{(k,0)}_{\mathrm{alt}}(M) \cong \Gamma(\Lambda^k T^*M) \cong \check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^k)$.

Beweis. Der erste Isomorphismus ist gegeben durch $\mathfrak{X}^{(k,0)} \ni T \mapsto \omega_T \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ wobei um ω_T in einem Punkt $x \in M$ auf Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in T_xM$ zu definieren wählen wir Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ mit $(X_i)_x = v_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Dann setze

$$(\omega_T)_x(v_1, \ldots, v_k) := T(X_1, \ldots, X_k)\,.$$

Da T tensoriell ist, hängt das Ergebnis nicht von der Wahl der Vektorfelder ab. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\Gamma(\Lambda^k T^*M) \ni \omega \mapsto T_\omega \in \mathfrak{X}^{(k,0)}_{\mathrm{alt}}(M)$ wobei $T_\omega(X_1, \ldots, X_k)(x) := \omega_x(v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_i := (X_i)_x$.
Für den zweiten Isomorphismus $\Gamma(\Lambda^k T^*M) \to \check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^k)$, setze $\omega \mapsto (\omega_\alpha)$ wobei ω_α definiert ist durch $\omega_\alpha = \sum_I f_{\alpha,I} \circ \varphi_\alpha^{-1}\, dx^I$ und die Funktion $f_{\alpha,I}$ gegeben ist durch (8). Mit anderen Worten, es gilt $\varphi_\alpha^*\omega_\alpha = \omega$. Die Kozykeleigenschaft (9) ist erfüllt, da auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt $\varphi_\alpha^*\omega_\alpha = \omega = \varphi_\beta^*\omega_\beta$. Umgekehrt sei $(\omega_\alpha) \in \check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^k)$ gegeben, dann definiere ω auf U_α durch $\omega = \varphi_\alpha^*\omega_\alpha$. Da (ω_α) die Kozykeleigenschaft erfüllt ist das wohldefiniert. □

Definition 1.9. *Wir definieren die* Differential k-Formen auf M *durch* $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$.

Wir schreiben $\omega \mapsto (\omega|_{U_\alpha})$ für den Isomorphismus zwischen Differentialformen und 0-Kozykel. Da d mit dem Pull-back kommutiert, bleibt die Kozykeleigenschaft (9) erhalten. Damit ist $d : \check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^k) \to \check{Z}^0(\mathcal{U}, \Omega^{k+1})$, $(\omega_\alpha) \mapsto (d\omega_\alpha)$ wohldefiniert und durch die Identifikationen von Satz 1.8 übertragen sich die lokalen Definition von d und $\wedge$ und wir erhalten die Abbildungen

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\,, \qquad \wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)\,, \tag{10}$$

definiert durch $(d\alpha)|_{U_\alpha} = d(\alpha|_{U_\alpha})$ und $(\alpha \wedge \beta)|_{U_\alpha} = \alpha|_{U_\alpha} \wedge \beta|_{U_\alpha}$ für alle Karten U_α. Es übertragen sich die Eigenschaften, d.h.

Satz 1.10. *Das Produkt* $\wedge$ *ist assoziativ und für alle* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *und* $\beta \in \Omega^\ell(M)$ *gilt*

(i) $d(d\alpha) = 0$

(ii) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$

(iii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha\,.$

Außerdem gelten die Formeln

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in \Sigma_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\pi)\alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)})\beta(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+\ell)}) ,$$

für alle $X_1, \dots, X_{k+\ell} \in \mathfrak{X}(M)$ *sowie*

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} X_j \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{1 \le \ell < m \le k+1} (-1)^{\ell+m} \alpha([X_\ell, X_m], X_1, \dots, \hat{X}_\ell, \dots, \hat{X}_m, \dots, X_{k+1}) , \end{aligned} \tag{11}$$

für alle $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$*, wobei* $\hat{X}_j$ *bedeutet, dass dieser Eintrag ausgelassen wird.*

Beweis. Die Eigenschaften übertragen sich direkt aus den lokalen Berechnungen von Satz 1.5, Satz 1.6 und (3). Die erste Formel folgt aus Satz 1.4. Zum Nachweis von (11) rechnen wir zuerst, dass die rechte Seite tensoriell, d.h. $C^\infty(M)$-linear, in jedem Eintrag ist. Bezeichne mit T den Ausdruck auf der rechten Seite von (11). Für jedes $i = 1, \dots, k+1$ und $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_{k+1}) - fT(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{\{j | i \neq j\}} (-1)^{j+1} X_j(f) \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ + \sum_{\{\ell | \ell < i\}} &(-1)^{\ell+i} X_\ell(f) \alpha(X_i, X_1, \dots, \hat{X}_\ell, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ - \sum_{\{m | i < m\}} &(-1)^{i+m} X_m(f) \alpha(X_i, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_m, \dots, X_{k+1}) = 0 , \end{aligned}$$

unter Verwendung der Vertauschungsregeln für k-Formen. Nach Definition reicht es die Formel in jeder Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, \dots, x_n))$ nachzuweisen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $(X_1, \dots, X_{k+1}) = (\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_{k+1}})$ und $\alpha = f dx^J$ für eine Funktion $f \in C^\infty(U_\alpha)$ mit geordneten Tupeln $I = (i_1, \dots, i_{k+1})$ und $J = (j_1, \dots, j_k)$. Da nun $[X_i, X_j] = 0$ vereinfacht sich die rechte Seite von (11) zu zwei Fällen. Im ersten Fall gibt es ein ℓ, sodass $(i_1, \dots, \widehat{i_\ell}, \dots, i_{k+1}) = (j_1, \dots, j_k)$ und

$$T(\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_{k+1}}) = (-1)^{\ell+1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_\ell}} = (d\alpha)(\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_{k+1}}) .$$

Im zweiten Fall ist $(i_1, \dots, \widehat{i_\ell}, \dots, i_{k+1}) \neq (j_1, \dots, j_k)$ für alle ℓ. Dann verschwinden sowohl T als auch $d\alpha$ auf $(\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_{k+1}})$. □

Bemerkung 1.11. Man kann zeigen, dass die äußere Ableitung d eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaften (i), (ii) von Satz 1.10 und der Forderung $(df)(X) = X(f)$ für alle $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Pull-back, Lie-Ableitung, Kontraktion Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sowie $\phi : N \to M$ eine glatte Abbildung. Wir definieren den *Pull-back* $\phi^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$, $\alpha \mapsto \phi^*\alpha$ durch die Formel

$$(\phi^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) := \alpha_{\phi(x)}\big(d_x\phi(v_1), \dots, d_x\phi(v_k)\big) , \tag{12}$$

für alle $x \in N$ und $v_1, \dots, v_k \in T_xN$. Es gelten folgende Eigenschaften

Satz 1.12. *Für alle $\phi : N \to M$, $\psi : P \to N$ und alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt*

(i) $\phi^* d\alpha = d\phi^*\alpha$

(ii) $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$

(iii) $\psi^*\phi^*(\alpha) = (\phi \circ \psi)^*\alpha$.

Beweis. Für (i) reicht es zu zeigen, dass der Pull-back unter der Identifikation $\omega \mapsto \omega|_{U_\alpha}$ mit (7) übereinstimmt. Die Behauptung folgt dann aus Satz 1.7. Für (ii) verwende die Formel (5) und für (iii) die Kettenregel. □

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit Fluss $\phi_t : M \to M$. Die *Richtungsableitung* $X(f)$ einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ in Richtung X ist definiert durch Ableitung von $t \mapsto \phi_t^*(f) = f \circ \phi_t$. Die Verallgemeinerung auf Differentialformen ist die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$, $\alpha \mapsto \mathcal{L}_X(\alpha)$ durch

$$\mathcal{L}_X(\alpha) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^*\alpha\,. \tag{13}$$

Wir definieren die *Kontraktion* $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ durch $\alpha \mapsto \alpha(X, \cdot)$.

Satz 1.13. *Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt*

(i) $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta$

(ii) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$

(iii) $\mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X\alpha$

(iv) $\mathcal{L}_X\alpha = di_X\alpha + i_X d\alpha$

Außerdem gilt die Formel

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(X_1, \ldots, X_k) = X\big(\alpha(X_1, \ldots, X_k)\big) - \sum_{j=1}^{k} \alpha(X_1, \ldots, \mathcal{L}_X(X_j), \ldots, X_k)\,. \tag{14}$$

für alle $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Zu Teil (i) Betrachte zunächst $\alpha = f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Dann gilt $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(f\beta) = fi_X\beta$ wegen $C^\infty(M)$-linearität von i_X. Damit haben wir die Gleichung gezeigt für $k = 0$. Sei nun $\alpha \in \Omega^1(M)$. Setze $X = X_1$. Dann gilt für $X_2, \ldots X_m \in \mathfrak{X}(M)$ mit $m = 1 + \ell$

$$\begin{aligned} i_X(\alpha \wedge \beta)(X_2, \ldots, X_m) &= (\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, \ldots, X_m) \\ &= \frac{1}{\ell!} \sum_\pi \operatorname{sign} \pi \alpha(X_{\pi(1)}) \beta(X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(m)}) \\ &= \alpha(X_1)\beta(X_2, \ldots, X_m) - \sum_{j=2}^{m} (-1)^j \alpha(X_j) \beta(X_1, X_2, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_m) \\ &= (i_{X_1}\alpha \wedge \beta)(X_2, \ldots, X_m) - (\alpha \wedge (i_{X_1}\beta))(X_2, \ldots, X_m). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Gleichung gezeigt für $k = 1$. Per Induktion nach k, nehmen wir an die Gleichung gelte für alle $\alpha' \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^\ell(M)$. Sei $\alpha'' \in \Omega^1(M)$. Wegen Assoziativität von $\wedge$ und der Induktionsvorrausetzung gilt für $\alpha = \alpha' \wedge \alpha'' \in \Omega^{k+1}(M)$

$$\begin{aligned} i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X(\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) + (-1)^k \alpha' \wedge i_X(\alpha'' \wedge \beta) \\ &= i_X(\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) + (-1)^k \alpha' \wedge i_X(\alpha'') \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha' \wedge \alpha'' \wedge i_X(\beta) \\ &= i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha \wedge i_X(\beta) \,. \end{aligned}$$

Damit gilt die Gleichung auch für alle $\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ da sich (punktweise) jedes beliebige α als Linearkombination von $k+1$-Formen vom Typ $\alpha' \wedge \alpha''$ schreiben lässt.
zu Teil (ii) Sei $\phi_t : M \to M$ der Fluss von X. Schreibe $\alpha_t = \phi_t^* \alpha$ und $\beta_t = \phi_t^* \beta$. Es gilt für $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ mit $m = \ell + k$

$$\phi_t^*(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_m) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_\pi \operatorname{sign} \pi \alpha_t^*(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) \beta_t^*(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(m)})$$

Wir leiten nach t ab und setzen $t = 0$, unter Verwendung der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta))(X_1, \ldots, X_m) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_\pi \operatorname{sign} \pi \Big((\mathcal{L}_X \alpha)(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) \beta^*(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(m)}) + \\ &\qquad + \alpha(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) (\mathcal{L}_X \beta)^*(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(m)}) \Big) \\ &= \big((\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta) \big)(X_1, \ldots, X_m). \end{aligned}$$

zu Teil (iii) Es gilt $d\phi_t^* \alpha = \phi_t^* d\alpha$ für alle t. Wir rechnen

$$\mathcal{L}_X d\alpha = \partial_t \phi_t^* d\alpha \big|_{t=0} = \partial_t d \phi_t^* \alpha \big|_{t=0} \overset{*}{=} d \partial_t \phi_t^* \alpha \big|_{t=0} = d \mathcal{L}_X \alpha \,.$$

Um Gleichung $*$ zu sehen, rechne in lokalen Koordinaten $\phi_t^* \alpha|_U = \sum_I f_t dx^I$, wobei hier $d_x x^I = d_x x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d_x x^{i_k}$ die kanonische Basis von $\Lambda^k T_x^* M$ darstellt, für alle $x \in U$. Insbesondere hängt diese *nicht* von t ab! Wir rechnen mit Satz von Schwarz

$$\partial_t d \sum_I f_t dx^I = \sum_I \sum_{j=1}^n \partial_t \partial_{x_j} f_t dx^j \wedge dx^I = \sum_I \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \partial_t f_t dx^j \wedge dx^I = d \partial_t \sum_I f_t dx^I \,.$$

zu Teil (iv) Wir behaupten, dass sowohl $\mathcal{L}_X$ als auch $i_X d + d i_X$ *Derivationen* sind, d.h. die Gleichung $\psi(\alpha \wedge \beta) = \psi(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \psi(\beta)$ erfüllen für $\psi = \mathcal{L}_X$ bzw. $\psi = (i_X d + d i_X)$. Das gilt wegen *Teil (ii)* für $\mathcal{L}_X$ und für $i_X d + d i_X$ da mit Verwendung von *Teil (i)*

$$\begin{aligned} (i_X d + d i_X)(\alpha \wedge \beta) &= i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) + d(i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta) \\ &= i_X d\alpha \wedge \beta + (-1)^{k+1} d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^k i_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge i_X d\beta + \\ &\qquad + d i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{k-1} i_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge d i_X \beta \\ &= (i_X d + d i_X) \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (i_X d + d i_X) \beta \,. \end{aligned}$$

Wegen Linearität ist die Differenz $D := \mathcal{L}_X - (i_X d + d i_X)$ auch eine Derivation. Ähnlich zur Induktion von *Teil (i)* reicht es zu zeigen, dass D auf Funktionen f und 1-Formen α verschwindet. Es gilt

$$Df = \mathcal{L}_X f - i_X df = X(f) - X(f) = 0 \,.$$

Sei zunächst $\alpha = dg$ mit $g \in \Omega^0(M)$. Mit *Teil (iii)*

$$Ddg = \mathcal{L}_X dg - di_X dg = d\mathcal{L}_X g - dX(g) = dX(g) - dX(g) = 0\,.$$

In einer Karte gilt $\alpha|_U = \sum_i f_i dx^i$ mit Funktionen $f_i \in C^\infty(U)$. Damit

$$\big(D\alpha\big)|_U = D(\alpha|_U) = \sum_i D(f_i dx^i) = \sum_i D(f_i)dx^i + f_i D(dx^i) = 0\,.$$

Die Formel (14) wurde im letzten Semester für allgemeine Tensoren bewiesen. □

1.3 Orientierbarkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(\phi(U))$ eine Differential-n-Form. Mit Verwendung von (7) und der Leibnitzformel für die Determinante berechnen wir

$$\phi^*(f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = f \circ \phi \;\det D\phi\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,. \tag{15}$$

Das entspricht bis auf Vorzeichen dem gewünschten Transformationsverhalten von (1). Wir nennen ϕ *orientierungserhaltend*, wenn $\det D\phi > 0$ auf U. In diesem Fall unterscheidet sich das Transformationsverhalten nicht. Um einen wohl-definierten Integralbegriff zu bekommen, müssen wir also sicherstellen, dass alle Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend sind. Wir werden sehen, dass das für allgemeine Manngifaltigkeiten nicht möglich ist und zu folgender Unterscheidung führt.

Definition 1.14. *Der Atlas $\mathcal{U}$ einer Mannigfaltigkeit M heißt* orientert *oder* positiv*, wenn alle Kartenwechselabbildungen von $\mathcal{U}$ orientierungserhaltend sind, die Mannigfaltigkeit ist* orientierbar *wenn M einen orientierten Atlas hat, sonst heißt M* nicht orientierbar*.*

Die Sphäre und der Torus sind Beispiele für orientierbare Mannigfaltigkeiten. Ein prominentes Beispiel für eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband

$$\mathbb{M} := \mathbb{R} \times (-1,1)/(x,y) \sim (x+1,-y)\,.$$

Um zu entscheiden ob eine gegebene Mannigfaltigkeit orientierbar ist oder nicht, brauchen wir Kriterien. Ein solches Kriterium erhält man mit Hilfe der Differentialformen.

Satz 1.15. *Eine Mannigfaltigkeit M von Dimension n ist orientierbar, genau dann wenn es eine nirgends verschwindende n-Form gibt.*

Beweis. Angenommen M hat eine nirgends verschwindende n-Form ω und sei $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas von M. Definiere $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ durch $f_\alpha \varphi_\alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \omega|_{U_\alpha}$. Ohne Einschränkung ist U_α zusammenhängend und $f_\alpha > 0$ auf U_α, denn falls $f_\alpha < 0$ ersetze φ_α durch $T \circ \varphi_\alpha$ wobei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es gilt auf $U_\alpha \cap U_\beta$

$$f_\alpha \varphi_\alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \omega|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta \varphi_\beta^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\,.$$

Wende $(\varphi_\alpha^{-1})^*$ auf beide Seiten der Gleichung an und erhalte mit (15) auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$

$$f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = f_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \cdot \det D\phi_{\alpha\beta}\,.$$

Demnach ist $\det D\phi_{\alpha\beta} > 0$ und $\phi_{\alpha\beta}$ ist orientierungserhaltend.
Sei nun M orientierbar mit orientiertem Atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Wähle eine Teilung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ welche der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnet ist. Definiere die n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ durch

$$\omega := \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha\,, \qquad \omega_\alpha = \varphi_\alpha^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\,.$$

Für α, β setze $\lambda_{\alpha\beta} := \det D\phi_{\alpha\beta} > 0$ auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\rho_{\alpha\beta} := (\varphi_\alpha^{-1})^* \rho_\beta = \rho_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \geq 0$. Es gilt

$$(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega = \sum_\beta \rho_{\alpha\beta} \cdot \phi_{\alpha\beta}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \big(\rho_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \rho_{\alpha\beta} \cdot \lambda_{\alpha\beta}\big) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,.$$

Der Faktor ist nicht-negativ und positiv für alle x mit $\rho_{\alpha\alpha}(x) > 0$. Da es für jedes $x \in M$ ein α gibt, sodass $\rho_\alpha(x) = \rho_{\alpha\alpha}(\varphi_\alpha(x)) > 0$ schließen wir, dass ω nirgends verschwindet. □

Mit Satz 1.15 bekommen wir weitere Kriterien. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von Dimension n. Ein *Normalenfeld* ist eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\nu(x) \perp T_xM$ und $|\nu(x)| = 1$ für alle $x \in M$ bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes.

Korollar 1.16. *Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von Dimension n ist orientierbar genau dann wenn es ein Normalenfeld gibt.*

Beweis. Angenommen ν existiert. Dann ist $\omega = i_\nu dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ eine Volumenform auf M. Umgekehrt sei M orientierbar und ω eine Volumenform. Definiere ν durch die Forderung $f\omega = i_\nu dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ mit $f > 0$. □

Orientierungsüberlagerung Es gibt noch ein weiteres Kriterium mittels der *Orientierungüberlagerung* $\widetilde{M}$. Um diese zu definieren, führen wir die Orientierung von Vektorräumen ein. Sei V ein n-dimensionaler reeler Vektorraum V. Die *Orientierungen* von V sind die Elemente des Quotienten

$$\mathrm{or}(V) := (\Lambda^n V \setminus 0)/\sim\,, \qquad v \sim w \iff \exists\, \lambda > 0 : \; v = \lambda w\,.$$

Da $\Lambda^n V$ eindimensional ist, besteht $\mathrm{or}(V)$ aus genau zwei Elementen. Der Vektorraum V heißt *orientiert*, wenn ein Element $[v] \in \mathrm{or}(V)$ festgelegt ist. Eine Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V heißt *positiv*, wenn $[e_1 \wedge \cdots \wedge e_n] = [v]$, d.h. es gibt ein $\lambda > 0$ so dass $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \lambda v$. Die Orientierungsüberlagerung ist die disjukte Vereinigung

$$\widetilde{M} = \bigcup_{x \in M} \mathrm{or}(T_x^* M)\,.$$

Man kann nun zeigen, dass $\widetilde{M}$ auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeit ist und dass M genau dann orientierbar ist, wenn $\pi : \widetilde{M} \to M$, $[\omega_x] \mapsto x$ einen glatten Schnitt hat, d.h. es eine glatte Abbildung gibt $s : M \to \widetilde{M}$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.

1.4 Integration

Sei im Folgenden M eine Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$.

Definition 1.17. *Eine Teilmenge $A \subset M$ ist* messbar *(bzw. eine* Nullmenge*), wenn für alle $\alpha \in \Lambda$ die Menge $\varphi_\alpha(A) \subset \mathbb{R}^n$ messbar (bzw. eine Nullmenge) bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ ist.*

Da beide Begriffe unter C^1-Abbildungen erhalten bleiben, ist das wohl-definiert. Ausserdem definieren wir noch für $\omega \in \Omega^k(M)$ den *Träger* durch $\operatorname{supp}\omega = \operatorname{cl}\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$ sowie

$$\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \operatorname{supp}\omega \text{ kompakt}\}\,,$$

die *Differential-k-formen mit kompaktem Träger.*

Satz 1.18. *Für alle messbaren $A \subset M$ existiert ein lineares Funktional $\int_A : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ eindeutig dadurch bestimmt, dass für alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ und $\omega \in \Omega_c^n(U)$ gilt*

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(A)} (\varphi^{-1})^*\omega := \int_{\varphi(A)} f\, d\mu\,, \tag{16}$$

wobei $f \in C^\infty(\varphi(U))$ durch $(\varphi^{-1})^*\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ gegeben und μ das Lesbegue-Maß ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass (16) unabhängig der Wahl der Karte ist. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger in $U_\alpha \cap U_\beta$. Definiere $\omega_\alpha := (\varphi_\alpha^{-1})^*\omega$ und $\omega_\beta := (\varphi_\beta^{-1})^*\omega$. Wir haben bereits festgestellt, dass die Kozykeleigenschaft $\phi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta = \omega_\alpha$ mit Kartenwechsel $\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ erfüllt ist. Demnach mit (15) und (1)

$$\int_{\varphi_\alpha(A)} \omega_\alpha = \int_{\varphi_\alpha(A)} \phi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta = \int_{\phi_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha(A))} \omega_\beta = \int_{\varphi_\beta(A)} \omega_\beta\,.$$

Das ist die viel besprochene Invarianz unter Kartenwechsel.
Nun zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit. Sei $\{(\rho_\alpha)\}$ eine der Überdeckung $\{(U_\alpha)\}$ untergeordnete Teilung der Eins. Gegeben $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Die Differentialform $\rho_\alpha\omega$ hat kompakten Träger in U_α und damit ist das Integral eindeutig festgelegt durch Linearität und (16)

$$\int_A \omega := \sum_\alpha \int_A \rho_\alpha\omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(A)} (\varphi_\alpha^{-1})^*\rho_\alpha\omega\,, \tag{17}$$

Wir müssen zeigen, dass (17) auch (16) erfüllt. Sei $\omega \in \Omega_c^n(U_\alpha)$. Mit Verwendung der Invariant gilt

$$\int_A \omega = \sum_\beta \int_{\varphi_\beta(A)} (\varphi_\beta^{-1})^*(\rho_\beta\omega) = \sum_\beta \int_{\varphi_\alpha(A)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\beta\omega) = \int_{\varphi_\alpha(A)} (\varphi_\alpha^{-1})^*\omega\,.$$

□

Für explizite Rechnungen eignet sich (17) nicht, da eine konkrete Teilung der Eins schwer zu bestimmen und unhandlich ist. Daher das folgendes Lemma.

Satz 1.19 (Rechenmethode)**.** *Sei $A = \bigcup_{i\geq 0} A_i$ eine disjunkte Zerlegung einer messbaren Menge, wobei A_0 eine Nullmenge ist. Dann gilt für alle $\omega \in \Omega_c^n(M)$*

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} \omega\,.$$

Beweis. Wir rechnen mit (17)

$$\int_A \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\bigcup_{i\geq 0} A)} f_\alpha\, d\mu = \sum_\alpha \sum_{i=0}^\infty \int_{\varphi_\alpha(A_i)} f_\alpha\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(A_i)} f_\alpha\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} \omega\,,$$

wobei wir hier den Term $i = 0$ weggelassen haben, da über eine Nullmenge integriert wird. Die Summation vertauscht, da sie absolut konvergiert. □

Bemerkung 1.20. Um ein Integral $\int_A \omega$ zu berechnen, zerlegt man nun $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots$ disjunkt in Teilmengen, sodass A_0 eine Nullmenge ist und A_i für jedes $i \geq 1$ komplett in einer Karte enthalten ist. Mit Satz 1.19 reicht es $\int_{A_i} \omega$ auszurechnen. Dabei verwendet man (16).

Durch Überprüfen auf Differentialformen mit kompaktem Träger in Karten lassen sich leicht folgende Rechenregeln beweisen.

Satz 1.21. *Sei $A \subset N$ messbar, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ und $\phi : N \to M$ ein Diffeomorphismus, dann gilt*

$$\int_A \phi^*\omega = \int_{\phi(A)} \omega \,,$$

wobei N durch den Atlas $\phi^*\mathcal{U} := \{(\phi^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \phi)\}$ orientert ist. Außerdem sei $-M$ die Mannigfaltigkeit M mit Atlas $\{(U_\alpha, T \circ \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ wobei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dann gilt für alle $\omega \in \Omega_c^n(M)$

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega \,,$$

1.5 Satz von Stokes

Aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung wissen wir, dass für stetig differentierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) \,.$$

Wir interpretieren den Integranten als Differentialform $\alpha = df = f'dx$ und fragen uns, ob sich dieser Satz auch auf die Integralrechnung auf Mannigfaltigkeit überträgt. Die Antwort auf diese Frage ist der Satz von Stokes. Um diesen zu formulieren, müssen wir zunächst den Rand einer Mannigfaltigkeit systematischer erklären. Dabei ist

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \,,$$

der Prototyp einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein topologischer Raum, welcher lokal genauso aussieht.

Definition 1.22. *Eine* Mannigfaltigkeit mit Rand *ist ein topologischer Raum M mit den Eigenschaften:*

(i) Die Topologie von M ist Hausdorff und hat eine abzählbare Basis.

(ii) Es existiert ein Atlas, d.h. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ so dass $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von M ist und für alle $\alpha \in \Lambda$ ist $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ ein stetige, offene und injektive Abbildung (d.h. ein Homöomorphismus auf das Bild) und

(iii) die Kartenwechsel sind glatt, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ist

$$\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

eine glatte Abbildung.

Sei M eine solche Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir definieren die Teilmengen

$$\partial M = \{x \in M \mid \exists\ (U, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)) \in \mathcal{U} \text{ s.d. } \varphi_n(x) = 0\}$$
$$\mathring{M} = \{x \in M \mid \exists\ (U, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)) \in \mathcal{U} \text{ s.d. } \varphi_n(x) > 0\}$$

Satz 1.23. *Es gilt $\partial M \cap \mathring{M} = \emptyset$.*

Beweis. Sei $x \in \partial M \cap \mathring{M}$. Dann gibt es Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) mit $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ so dass $\varphi_{\alpha,n}(x) = 0$ und $\varphi_{\beta,n}(x) > 0$. Ohne Einschränkung ist $\varphi_{\beta,n}(y) > 0$ für alle $y \in U_\alpha \cap U_\beta$. Somit ist $V_\beta := \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Jedoch ist $V_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$ da $\varphi_{\alpha,n}(x) = 0$, muss aber offen sein, da der Kartenwechsel $\phi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : V_\beta \to V_\alpha$ offen ist, also offene Menge auf offene Menge abbildet. Das ist ein Widerspruch. □

Die Teilmenge ∂M heißt *Rand von M* und die Teilmenge $\mathring{M}$ heißt *Inneres von M*. Beachte, dass diese Namen nicht notwendigerweise dieselbe Bedeutung in der Topologie haben, d.h. es gibt Beispiele in denen der topologische Rand des topologischen Raumes M etwas anderes ist als ∂M.

Korollar 1.24. *Der Rand ∂M ist eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das Innere $\mathring{M}$ ist eine n-dimensionale Manngifaltigkeit.*

Satz 1.25. *Sei $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein positiver Atlas von M, dann bildet $\{(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ einen positiven Atlas von ∂M, wobei $\overline{U}_\alpha := U_\alpha \cap \partial M$ und $\overline{\varphi}_\alpha := \varphi_\alpha|_{\overline{U}_\alpha}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der Kartenwechsel $\overline{\phi}_{\alpha\beta} := \overline{\varphi}_\beta \circ \overline{\varphi}_\alpha^{-1}$ orientierungserhaltend ist, d.h. sein Differential überall positive Determinante hat. Bezeichne mit $\phi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ den Kartenwechsel für M. Wir schreiben für seine Komponenten $\phi_{\alpha\beta} = (\phi^1_{\alpha\beta}, \dots, \phi^n_{\alpha\beta})$. Für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ gilt

$$\phi^n_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{x_j} \phi^n_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \quad \forall\ j = 1, \dots, n-1\,.$$

Da $\phi_{\alpha\beta}$ nur Werte in $\mathbb{R}^n_+$ annimmt gilt für alle $\varepsilon > 0$ klein genug

$$\phi^n_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon) > 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{x_n} \phi^n_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \geq 0\,.$$

Wir erhalten für die Differential von $\phi_{\alpha\beta}$ am Punkt $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ in Blockschreibweise

$$D\phi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} D\overline{\phi}_{\alpha\beta} & 0 \\ * & \partial_{x_n} \phi^n_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln die Determinante in der letzten Spalte und erhalten

$$0 < \det D\phi_{\alpha\beta} = \det D\overline{\phi}_{\alpha\beta} \cdot \partial_{x_n} \phi^n_{\alpha\beta}\,.$$

Insbesondere kann $\partial_{x_n} \phi^n_{\alpha\beta}$ nicht Null sein und $\det D\overline{\phi}_{\alpha\beta}$ muss positiv sein. □

Definition 1.26. *Die* induzierte Orientierung *auf ∂M ist die mit $(-1)^n$ multiplizierte Orientierung aus Satz 1.25.*

Bemerkung 1.27. Das Vorzeichen $(-1)^n$ ist aus zwei Gründen gewählt. Zum einen, damit kein Vorzeichen im Satz von Stokes auftritt und zum anderem damit sie mit einer anderen Konvention übereinstimmt. Und zwar, sei $\sigma \in \Omega^n(M)$ eine positive Volumenform und $\nu \in \mathfrak{X}(M)$ ein *äußeres Normalenfeld auf* ∂M, d.h. $\nu_x = a_1\partial_{x_1} + \cdots + a_n\partial_{x_n}$ mit $a_n < 0$ für alle $x \in \partial M$ und alle Karten um x, dann ist $i_\nu\sigma$ genau dann eine positive Volumenform auf ∂M, wenn ∂M die induzierte Orientierung trägt.

Theorem 1.28 (Satz von Stokes)**.** *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit induziert orientiertem Rand ∂M. Für alle $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega\,.$$

Beweis. Sei zunächst $M = \mathbb{R}^n_+$. Wir schreiben

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n\,,$$

für Funktionen $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ mit kompaktem Träger. Es gilt

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,.$$

Wir berechnen mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_M d\omega = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1\, dx_2 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_n + \\ + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{f}_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\,,\end{aligned}$$

wobei $\bar{f}_n := f_n|_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}$. Andererseits gilt, da dx_n auf ∂M verschwindet und unter Berücksichtigung der induzierten Orientierung auf ∂M

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \omega &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \int_{\partial M} f_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{n+1} \int_{\partial M} f_n\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n+1}(-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{f}_n\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\,.\end{aligned}$$

Das beweist den Spezialfall. Im allgemeinen Fall wählen wir eine Teilung der Eins $\{(\rho_\alpha)\}$, welche dem gewählten positiven Atlas untergeordnet ist. Wir stellen fest, dass

$$\operatorname{supp} \rho_\alpha\omega \subset \operatorname{supp} \omega \cap \operatorname{supp} \rho_\alpha\,.$$

Damit ist der Träger von $\rho_\alpha\omega$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auch kompakt. Wir führen den allgemeinen Fall nun auf den Spezialfall zurück

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} d\rho_\alpha\omega = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n_+} d(\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) =$$

$$= \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) = \sum_\alpha \int_{\overline{U}_\alpha} \rho_\alpha\omega = \int_{\partial M} \omega\,,$$

wobei wir ohne Einschränkung die Differentialformen auf ganz $\mathbb{R}^n_+$ bzw. $\mathbb{R}^{n-1}$ durch Null fortgesetzt haben. □

Korollar 1.29 (Green-Riemann). *Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Gebiet mit glattem Rand und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $D \subset U$. Für alle $\alpha = P\,dx + Q\,dy \in \Omega^1(U)$ gilt*

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

1.6 Volumenform auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein orientierter Vektorraum mit nicht ausgearteter Bilinearform. Gegeben eine positive Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit dualer Basis $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ von V^*, d.h. $\sigma_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Satz 1.30. *Die n-Form*

$$\sqrt{|\det(\langle v_i, v_j\rangle)|}\ \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_n\,,$$

hängt nicht von der Wahl der positiven Basis ab.

Beweis. Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V und $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ die zugehörige duale Basis von V^*. Bezeichne mit $A = (a_{ik})$ die Basistransformationsmatrix, d.h. $v_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}w_k$. Es gilt

$$\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{k,\ell} \langle a_{ik}w_k, a_{j\ell}w_\ell\rangle = \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell}\langle w_k, w_\ell\rangle\,.$$

In Matrix-Schreibweise $(\langle v_i, v_j\rangle) = A(\langle w_k, w_\ell\rangle)A^T$ und somit

$$\det(\langle v_i, v_j\rangle) = \det A \det(\langle w_k, w_\ell\rangle) \det A^T = (\det A)^2 \det(\langle w_k, w_\ell\rangle)\,.$$

Ferner gilt $\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n = \det A\, \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ und

$$\begin{aligned}\sqrt{|\det(\langle v_i, v_j\rangle)|}\ \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n &= \sqrt{(\det A)^2 |\det(\langle w_k, w_\ell\rangle)|}\ (\det A)^{-1}\ \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n \\ &= \sqrt{|\det(\langle w_k, w_\ell\rangle)|}\ \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n\,.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\det A > 0$. Das gilt da beide Basen positiv sind. □

Definition 1.31. *Sei (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die* Volumenform *$vol^g_M \in \Omega^n(M)$ ist definiert für alle $x \in M$ durch*

$$(vol^g_M)_x := \sqrt{|\det(g_{ij}(x))|}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,,$$

wobei $g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)$ *bezüglich den kanonischen Koordinaten in einer Karte von* x*. Sei* $A \subset M$ *eine messbare Menge, dann ist*

$$vol^g(A) := \int_A vol^g_M\,,$$

das Volumen von A*.*

Korollar 1.32. *Es gilt*

(i) Die Volumenform ist wohldefiniert unabhängig der Wahl der Karte.

(ii) Sei $U \subset M$ *offen und* $(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathfrak{X}(U)$ *Vektorfelder welche punktweise eine positive Orthonormalbasis bilden, dann gilt auf* U

$$vol^g_M(e_1, \ldots, e_n) \equiv 1\,.$$

(iii) Wenn M *zusätzlich eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist und* $\nu \in \mathfrak{X}(M)$ *ein äußeres Normalenfeld mit* $|\nu| = \pm 1$*, dann gilt mit Kontraktion* $i_\nu : \Omega^n(M) \to \Omega^{n-1}(M)$ $\alpha \mapsto \alpha(\nu, \cdot)$

$$i_\nu vol^g_M = vol^g_{\partial M}\,.$$

Beweis. Die Form vol^g_M ist unabhängig der Wahl der Karte nach Satz 1.30. Sie ist ein glatter Schnitt, da die Funktion $x \mapsto g_{ij}(x)$ glatt ist. Für (ii) sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positive Orthonormalbasis von T_xM ist, d.h. $\langle e_i, e_j\rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$ mit $\varepsilon_i = \pm 1$ und $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ die zugehörige duale Basis, dann ist nach Satz 1.30

$$(vol^g_M)_x(e_1, \ldots, e_n) = \sqrt{|\det(\varepsilon_i \delta_{ij})|}\;\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n(e_1, \ldots, e_n) = 1\,.$$

Der Punkt (iii) geht analog. ☐

2 DeRham-Kohomologie

Nachdem wir das Kalkül der Differentialformen eingeführt und die Integration damit erklärt haben, beschreiben wir noch die DeRham-Kohomologie. Das ist eine wichtige Invariante, die mit Differentialformen berechnet wird.
In Abschnitt 1.2 haben wir zu jeder Mannigfaltigkeit M ein Tripel $(\Omega^*(M), d, \wedge)$ konstruiert, bestehend aus dem Vektorraum der Differentialformen

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)\,, \tag{18}$$

und den linearen Abbildungen $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ und $\wedge : \Omega^*(M) \otimes \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, die folgende Eigenschaften erfüllen

- $\wedge$ ist assoziativ und anti-kommutativ (Satz 1.10 Gleichung (iii))
- d ist von Grad 1 und $\wedge$ von Grad 0 (Gleichung (10))

- $d \circ d = 0$ (Satz 1.10 Gleichung (i))
- d und $\wedge$ erfüllen die graduierte Leibnitzformel (Satz 1.10 Gleichung (ii))

Wir nennen so ein Tripel *differentielle graduierte Algebra*. Außerdem haben wir gesehen, dass es für jede glatten Abbildung $\phi : N \to M$ zwischen Mannigfaltigkeiten den Pull-back ϕ^* gibt; eine lineare Abbilung $\Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ von Grad 0 welche diese Strukturen erhält, d.h. Satz 1.12 Gleichung (i) und (ii) erfüllt. Wir sagen ϕ^* ist ein *Morphismus von differentiellen graduierten Algebren*. Da zusätzlich noch Satz 1.12 Gleichung (iii) für Verknüfungen von glatten Abbildungne gilt, bildet die Zuordnung $M \mapsto \Omega^*(M)$ und $\phi \mapsto \phi^*$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der differentiellen graduierten Algebren.
Zu der differentiellen graduierten Algebra $(\Omega^*(M), d, \wedge)$ ordnen wir auf kanonische Weise einen Quotienten zu. Das ist die besagte Invariante.

Definition 2.1. *Wir definieren* $B^*(M) := \operatorname{im} d$ *die* exakten Differentialformen *und* $Z^*(M) := \ker d$ *die* geschlossenen Differentialformen. *Da* $d \circ d = 0$ *ist* $B^*(M) \subset Z^*(M)$ *und wir definieren die* DeRham Kohomologie

$$H^*(M) := \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M)\,, \qquad H^k(M) := \frac{Z^*(M) \cap \Omega^k(M)}{B^*(M) \cap \Omega^k(M)}\,. \tag{19}$$

Der Raum $H^k(M)$ *heißt* k-te DeRham Kohomologiegruppe.

Da $\wedge$ und d die graduierte Leibnitzformel erfüllen ist das *Cup-Produkt* wohldefiniert

$$\wedge : H^*(M) \otimes H^*(M) \to H^*(M)\,, \qquad [\alpha] \otimes [\beta] \mapsto [\alpha \wedge \beta]\,. \tag{20}$$

Das Cup-Produkt ist wieder assoziativ, anti-kommutativ und von Grad 0; damit hat das Paar $(H^*(M), \wedge)$ die Struktur einer *graduierten Algebra*. Da der Pull-back ϕ^* ein Morphismus von differentiellen graduierten Algebren ist und insbesondere mit d kommutiert, ist der Pull-back auf DeRhami-Kohomologie wohldefiniert

$$\phi^* : H^*(M) \to H^*(N)\,, \qquad [\alpha] \mapsto [\phi^* \alpha]\,.$$

Da gleichermaßen vom Pull-back die Strukturen erhalten bleiben ist $M \mapsto (H^*(M), \wedge)$ und $\phi \mapsto \phi^*$ ein kontravarianter Funktor in die Kategorie der graduierten Algebren. Soweit die allgemeine Definition der DeRham-Kohomologie. Wir werden diese jetzt genauer untersuchen. Zunächst ein paar leichte Beobachtungen.

Satz 2.2. *Es gilt*

(i) $H^0(M) \cong \mathbb{R}^{\pi_0(M)}$ *wobei* $\pi_0(M)$ *die Menge der Bogenzusammenhangskomponenten ist.*

(ii) $H^k(M) = 0$ *für* $k > \dim M$.

Beweis. Übung. □

2.1 Homotopieinvarianz

Wir zeigen, dass die DeRham-Kohomologie, obwohl nur für glatte Mannigfaltigkeiten definiert, tatsächlich nur eine Homotopieinvariante ist.

Definition 2.3. *Zwei glatte Abbildungen $\phi_0, \phi_1 : N \to M$ heißen C^∞-*homotop*, wenn es eine glatte Abbildung $H : [0,1] \times N \to M$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $H(t,\cdot) = \phi_0$ für alle $t < \varepsilon$ und $H(t,\cdot) = \phi_1$ für alle $t > 1-\varepsilon$. Die Abbildung H heißt* Homotopie. *Wir schreiben $\phi_0 \sim_H \phi_1$ oder auch nur $\phi_0 \sim_{C^\infty} \phi_1$.*

Man überzeugt sich leicht, dass die Relation C^∞-homotop eine Äquivalenzrelation für glatte Abbildungen ist. Diese Definition hat eine offensichtliche Verallgemeinerung zum Begriff C^0*-homotop*. In diesem Fall ist die Homotopie H nur stetig. Der Begriff C^0*-homotop* stimmt mit dem Begriff *homotop*, wie er aus der Topologie bekannt ist überein. Wir werden bald sehen, dass der Unterschied zwischen C^∞-homotop und C^0-homotop nur von technischer Bedeutung ist.

Satz 2.4 (Homotopieinvarianz)**.** *Für je zwei C^∞-homotope Abbildungen $\phi_0, \phi_1 : N \to M$ gilt $\phi_0^* = \phi_1^* : H^*(M) \to H^*(N)$.*

Der Beweis folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 2.5 (Poincaré Lemma)**.** *Es gibt eine lineare Abbildung $K : \Omega^*(\mathbb{R} \times M) \to \Omega^{*-1}(M)$ von Grad -1, d.h. sie bildet k-Formen auf $k-1$-Formen ab, so dass*

$$d \circ K + K \circ d = s_1^* - s_0^* , \tag{21}$$

wobei $s_j : M \to \mathbb{R} \times M$, $x \mapsto (j,x)$ für $j = 0,1$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Sei zunächst $M = U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Mit Koordinaten $(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf $\mathbb{R} \times U$ definieren wir

(i) $K\omega = 0$ für $\omega = f dx^I = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$

(ii) $K\omega = \big(\int_0^1 g\, dt\big) dx^I$ für $\omega = g dt \wedge dx^I$,

und da sich jede Differentialform eindeutig als Linearkombination von solchen schreiben lässt setzen wir K auf $\Omega^*(\mathbb{R} \times U)$ linear fort. Wir überprüfen (21). Für $\omega = f dx^I$ gilt $dK\omega = 0$ und

$$K d\omega = \sum_{j=1}^n K(\partial_{x_j} f\, dx^j \wedge dx^I + \partial_t f\, dt \wedge dx^I) = \left(\int_0^1 \partial_t f\, dt\right) dx^I = s_1^*\omega - s_0^*\omega .$$

Für $\omega = g\, dt \wedge dx^I$ gilt, da $\int_0^1 g\, dt$ nicht mehr von t abhängt,

$$dK\omega = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \partial_{x_j} g\, dt\right) dx^j \wedge dx^I , \qquad K d\omega = -\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \partial_{x_j} g\, dt\right) dx^j \wedge dx^I .$$

Da $s_j^* dt = 0$ gilt $s_j^*\omega = 0$ für $j = 0,1$ in diesem Fall. Wir haben in beiden Fällen (21) gezeigt. Wir zeigen jetzt die Invarianz der Konstruktion unter Kartenwechsel. Sei dazu $\phi : U \to U'$ ein Diffeomorphismus und setze $\bar{\phi} := \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \phi : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R} \times U'$. Bezeichne mit K und K' die konstruierte Abbildung für U bzw. U'. Wir behaupten

$$\phi^* \circ K = K' \circ \bar{\phi}^* . \tag{22}$$

Das ist leicht einzusehen. Für $\omega = f dx^I$ gilt $\phi^* K\omega = 0$ und $K\bar{\phi}^*\omega = K(\bar{\phi}^* f)\phi^* dx^I = 0$, da $\phi^* dx^I$ wieder von Typ (i) ist. Für $\omega = g dt \wedge dx^I$ gilt

$$K'\bar{\phi}^*\omega = K'(\bar{\phi}^* g)\, dt \wedge \phi^* dx^I = \left(\int_0^1 \bar{\phi}^* g\, dt\right) \phi^* dx^I = \phi^* \left(\int_0^1 g\, dt\right) \phi^* dx^I = \phi^* K\omega \,.$$

Im zweiten Schritt ist M beliebig. Wir wählen einen Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ von M und Teilung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ welche der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnet ist. Wir setzen mit $\pi : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, x) \mapsto x$

$$\bar{\rho}_\alpha := \rho_\alpha \circ \pi, \qquad \bar{U}_\alpha := \mathbb{R} \times U_\alpha, \qquad \bar{\varphi}_\alpha := \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \varphi_\alpha \,.$$

Damit ist $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ ein Atlas von $\mathbb{R} \times M$ und $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ eine Teilung der Eins welche der Überdeckung $\{\bar{U}_\alpha\}$ untergeordnet ist. Wir definieren $K : \Omega^*(\mathbb{R} \times M) \to \Omega^{*-1}(M)$ durch Verwendung der Abbildung K_α für $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ vom ersten Schritt

$$K(\omega) = \sum_\alpha \left(\varphi_\alpha^* \circ K_\alpha \circ \left(\bar{\varphi}_\alpha^{-1}\right)^*\right)(\bar{\rho}_\alpha \omega) \,.$$

Bevor wir (21) überprüfen, zeigen wir für ω mit $\operatorname{supp} \omega \subset \bar{U}_\alpha$ die Formel

$$K(\omega) = \left(\varphi_\alpha^* \circ K_\alpha \circ \left(\bar{\varphi}_\alpha^{-1}\right)^*\right)(\omega) \,. \tag{23}$$

Diese gilt, da mit Kartenwechsel $\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\bar{\phi}_{\alpha\beta} = \bar{\varphi}_\beta \circ \bar{\varphi}_\alpha^{-1}$ unter Verwendung von (22)

$$\begin{aligned}
\sum_\beta \left(\varphi_\beta^* \circ K_\beta \circ (\bar{\varphi}_\beta^{-1})^*\right)(\bar{\rho}_\beta \omega) &= \sum_\beta \left(\varphi_\alpha^* \circ \phi_{\alpha\beta}^* \circ K_\alpha \circ (\bar{\phi}_{\alpha\beta}^{-1})^* \circ (\bar{\varphi}_\alpha^{-1})^*\right)(\bar{\rho}_\beta \omega) \\
&= \sum_\beta \left(\varphi_\alpha^* \circ K_\alpha \circ (\bar{\varphi}_\alpha^{-1})^*\right)(\bar{\rho}_\beta \omega) = \left(\varphi_\alpha^* \circ K_\alpha \circ (\bar{\varphi}_\alpha^{-1})^*\right)(\omega) \,.
\end{aligned}$$

Da mit $\operatorname{supp} \bar{\rho}_\alpha \omega \subset U_\alpha$ auch $\operatorname{supp} d(\bar{\rho}_\alpha \omega) \subset U_\alpha$ verwenden wir nun (23) und den ersten Schritt

$$\begin{aligned}
(dK + Kd)\omega = \sum_\alpha (dK + Kd)(\bar{\rho}_\alpha \omega) &= \sum_\alpha \varphi_\alpha^* (dK_\alpha + K_\alpha d)(\bar{\varphi}_\alpha^{-1})^* (\bar{\rho}_\alpha \omega) \\
&= \sum_\alpha \varphi_\alpha (s_1^* - s_0^*)(\bar{\varphi}_\alpha^{-1})^* (\bar{\rho}_\alpha \omega) = \sum_\alpha (s_1^* - s_0^*)(\bar{\rho}_\alpha \omega) = (s_1^* - s_0^*)\omega \,.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Beweis von Satz 2.4. Sei $\phi_0 \sim_H \phi_1$. Wir setzen H zu der Abbildung $H : \mathbb{R} \times N \to M$ fort, durch $H(t, \cdot) = \phi_0$ für $t < \varepsilon$ und $H(t, \cdot) = \phi_1$ für $t > 1 - \varepsilon$. Nach Konstruktion gilt $\phi_0 = H \circ s_0$ und $\phi_1 = H \circ s_1$. Gegeben $[\alpha] \in H^*(M)$. Es gilt $d\alpha = 0$ und wir rechnen mit Lemma 2.5

$$\phi_1^* \alpha - \phi_0^* \alpha = s_1^* H^* \alpha - s_0^* H^* \alpha = (s_1^* - s_0^*) H^* \alpha = (dK - Kd) H^* \alpha = dK H^* \alpha \,.$$

Damit $[\phi_1^* \alpha - \phi_0^* \alpha] = 0$ bzw. $[\phi_1^* \alpha] = [\phi_0^* \alpha]$ in $H^*(N)$. $\square$

Zwei Mannigfaltigkeiten M und N heißen C^∞-*homotop*, wenn es Abbildungen gibt $\phi : N \to M$ und $\psi : M \to N$ sodass $\phi \circ \psi \sim_{C^\infty} \mathrm{id}_N$ und $\psi \circ \phi \sim_{C^\infty} \mathrm{id}_M$. Wir schreiben $M \sim_{C^\infty} N$. Vollig analog definiert man die Relation C^0-*homotop* für Mannigfaltigkeiten.

Korollar 2.6. *C^∞-Homotope Mannigfaltigkeiten haben isomorphe DeRham-Kohomologie.*

Beweis. Seien $\phi : N \to M$ und $\psi : N \to M$ mit $\phi \circ \psi \sim_{C^\infty} \mathrm{id}_N$. Nach Satz 2.4 gilt $\mathrm{id}_{H^*(N)} = \mathrm{id}_N^* = (\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$. Genauso zeigt man $\phi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{H^*(M)}$. □

Sei A eine Untermannigfaltigkeit von M und $i : A \to M$ die Einbettung. Eine Abbildung $r : M \to A$ heißt *Retraktion*, wenn $r \circ i = \mathrm{id}_A$; und heißt *Deformationsretraktion*, wenn zusätzlich gilt $i \circ r \sim \mathrm{id}_M$. Der Raum A heißt in diesem Fall auch *Retrakt* bzw. *Deformationsretrakt.* Eine Deformationretraktion ist automatisch eine Homotopieäquivalenz. Ähnlich zum Korollar 2.6 beweisen wir.

Korollar 2.7. *Sei $r : M \to A$ eine Retraktion, dann ist $r^* : H^*(A) \to H^*(M)$ injektiv.*

Ein Beispiel für eine Deformationsretraktion ist $r : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ mit $i \circ r \sim_H \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ durch $H : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto \beta(t)x$ mit cut-off Funktion $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\beta(t) = 0$ für $t < 1/3$ und $\beta(t) = 1$ für $t > 2/3$. Wir haben damit bewiesen:

Korollar 2.8. $H^*(\mathbb{R}^n) \cong H^*(\mathrm{pt}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{wenn } * = 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

Bezeichne mit $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ die Standardsphäre. Durch finden von geeignete Deformationsretraktionen zeigen wir

(a) $H^*(\{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}) \cong H^*(S^1)$

(b) $H^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^*(S^{n-1})$

Die Frage bleibt, inwiefern die Regularität der Homotopie eine Rolle spielt. Dazu das folgende

Theorem 2.9 (Approximationssatz)**.** *Jede stetige Abbildung ist C^0-homotop zu einer glatten Abbildung. Je zwei glatte C^0-homotope Abbildungen sind auch C^∞-homotop.*

Beweis. Siehe [4, Proposition 17.8]. □

Bemerkung 2.10. (i) Der Approximationssatz erlaubt es die Definition des Pull-backs auf stetige Abbildungen $\phi_0 : N \to M$ zu erweitern. Wir definieren den Pull-back ϕ_0^* durch den Pull-back $\phi_1^* : H^*(M) \to H^*(N)$ wobei ϕ_1 eine glatte Abbildung ist mit $\phi_0 \sim_{C^0} \phi_1$. Das dies nicht von der Wahl von ϕ_1 abhängt folgt aus der Homotopieinvarianz.

(ii) Die Homotopieinvarianz ist zwar einerseits praktisch für die Berechnung, heißt aber auch, dass die DeRham-Kohomologie zu schwach ist um feinere Strukturen, etwa die 28 verschiedenen glatten Strukturen auf S^7, zu unterscheiden.

2.2 Mayer-Vietoris-Sequenz

Die Mayer-Vietoris Sequenz ist ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung der DeRham-Kohomologie. Eine Folge von linearen Abbildungen

$$\dots \longrightarrow V_k \xrightarrow{\phi_k} V_{k+1} \xrightarrow{\phi_{k+1}} V_{k+2} \longrightarrow \dots$$

heißt *exakte Sequenz*, wenn für alle k gilt $\operatorname{im} \phi_{k-1} = \ker \phi_k$ (für mehr Details siehe Anhang B).

Satz 2.11 (Mayer-Vietoris Sequenz). *Gegeben eine Mannigfaltigkeit M und offene Mengen $U, V \subset M$, so dass $U \cup V = M$. Wir bezeichnen mit i, j und $\underline{i}, \underline{j}$ die Einbettungen von U, V in M bzw. von $U \cap V$ in U, V. Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{i^* \oplus j^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0\,, \tag{24}$$

ist exakt und induziert die exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{i^* \oplus j^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \longrightarrow \ldots \tag{25}$$

Beweis. Die Exaktheit von (24) ist klar bis auf die Surjektivität von $\underline{i}^* - \underline{j}^*$. Sei dazu $\alpha \in \Omega^*(U \cap V)$ gegeben. Wir wählen eine Teilung der Eins $\{\rho_U, \rho_V\}$ welche der Überdeckung $\{U, V\}$ untergeordnet ist. Definiere $\alpha_U \in \Omega^*(U)$ und $\alpha_V \in \Omega^*(V)$ durch

$$(\alpha_U)_x := \begin{cases} \rho_V(x)\alpha_x & \text{wenn } x \in U \cap V \\ 0 & \text{wenn } x \in U \setminus V \end{cases}, \qquad (\alpha_V)_x := \begin{cases} -\rho_U(x)\alpha_x & \text{wenn } x \in V \cap U \\ 0 & \text{wenn } x \in V \setminus U \end{cases}. \tag{26}$$

Nach Konstruktion gilt $\underline{i}^*\alpha_U - \underline{j}^*\alpha_V = (\rho_U + \rho_V)\alpha = \alpha$.
Die Exaktheit von (25) folgt dann automatisch aufgrund eines zentralen Satzes aus der Homologischen Algebra (siehe Satz B.6). Wir geben hier lediglich die Kostruktion von δ an. Sei dazu $[\alpha] \in H^k(U \cap V)$ gegeben. Wähle (α_U, α_V) mit $\underline{i}^*\alpha_U - \underline{j}^*\alpha_V = \alpha$. Da $\underline{i}^* d\alpha_U - \underline{j}^* d\alpha_V = d\alpha = 0$ stimmen die Formen $d\alpha_U$ und $d\alpha_V$ auf $U \cap V$ überein. Wegen Exaktheit von (24) gibt es β so dass $i^*\beta = d\alpha_U$ und $j^*\beta = d\alpha_V$. Nach Konstruktion ist β geschlossen. Die Abbildung δ ist dann definiert als $[\alpha] \mapsto [\beta]$. □

Für eine Mannigfaltigkeit M mit endlich dimensionaler DeRham-Kohomologie definieren wir die *Eulercharakteristik* durch

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M)\,. \tag{27}$$

Eine Folgerung aus der Mayer-Vietoris Sequenz ist eine Berechnungsformel der Eulercharakteristik.

Korollar 2.12. *Wenn $H^*(U)$, $H^*(V)$ und $H^*(U \cap V)$ endlich dimensional sind, dann ist es auch $H^*(M)$ und es gilt*

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)\,. \tag{28}$$

Beweis. Betrachte den Ausschnitt aus der Mayer-Vietoris Sequenz (25)

$$H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(M) \xrightarrow{i^* \oplus j^*} H^k(U) \oplus H^k(V)$$

Wegen Exaktheit ist $H^k(M)$ isomorph zur direkten Summe von $\operatorname{im}\delta$ und $\operatorname{im} i^* \oplus j^*$ also endlich dimensional. Die Gleichung (28) folgt aus dem Lemma B.1 auf die exakte Sequenz (25) und Umordnen der Summanden. □

Mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz können wir die Kohomologiegruppen der Sphären bestimmen

Korollar 2.13. *Für $n \geq 1$ gilt* $H^*(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{wenn } * = 0, n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$.

Beweis. Wir überdecken S^n mit $U = S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ und $V = S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\}$. Durch stereographische Projektion erhalten wir $U \cong \mathbb{R}^n$, $V \cong \mathbb{R}^n$ und $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir haben gesehen, dass $\mathbb{R}^n$ homotop zu einem Punkt und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homotop zu S^{n-1} ist. Nach Homotopieinvarianz reduziert die Mayer-Vietoris Sequenz für $n = 1$ auf

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(\mathrm{pt}) \oplus H^0(\mathrm{pt}) \longrightarrow H^0(\{-1,1\}) \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0\,.$$

Wir wissen, dass H^0 die Zusammenhangskomponenten zählt und dass S^1 zusammenhängend ist. Wir setzen ein und erhalten die exakte Sequenz $0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to H^1(S^1) \to 0$. Damit ist $H^1(S^1)$ endlich dimensional und mit Lemma B.1 gilt $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$. Sei nun $n > 1$. Die Mayer-Vietoris Sequenz zerfällt in einzelne Abschnitte

$$0 \longrightarrow H^0(S^n) \longrightarrow H^0(\mathrm{pt}) \oplus H^0(\mathrm{pt}) \longrightarrow H^0(S^{n-1}) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

$$\forall\, k \geq 1 \ : \qquad 0 \longrightarrow H^k(S^{n-1}) \longrightarrow H^{k+1}(S^n) \longrightarrow 0\,.$$

Wir setzen die Induktionsvorraussetzung und das S^n bogenzusammenhängen ist ein und erhalten

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^n(S^n) \longrightarrow 0 \qquad \forall\, k \neq 0,1,n \ : \qquad 0 \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow 0.$$

Der Beweis ist fertig mit Lemma B.1. □

Mit den Kohomologiegruppen der Sphären sind wir in der Lage ein paar klassische Resultate aus der Topologie zu beweisen

Theorem 2.14 (Brouwerscher Gebietsinvarianzsatz)**.** *Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind genau dann homöomorph wenn $n = m$.*

Beweis. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Wir bezeichnen mit $\varphi_n : S^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. Die Verkettung $\varphi_m^{-1} \circ \phi \circ \varphi_n$ setzt sich zu einem Homöomorphismus $\hat{\phi} : S^n \to S^m$ fort. Der Pull-back von $\hat{\phi}$ induziert einen Isomorphismus von graduierten Vektorräumen $H^*(S^n) \cong H^*(S^m)$. Damit ist $n = m$ □

Theorem 2.15 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $B^{n+1} := \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq 1\}$ der $n+1$-Ball. Jede stetige Abbildung $\phi : B^{n+1} \to B^{n+1}$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in B^{n+1}$ so dass $\phi(x) = x$.*

Der Beweis verwendet ein Lemma.

Lemma 2.16. *Es gibt keine Retraktion von B^{n+1} auf S^n.*

Beweis. Angenommen $r : B^{n+1} \to S^n$ ist eine Retration. Dann gibt es nach Korollar 2.7 eine injektive Abbildung $H^*(S^n) \to H^*(B^{n+1})$. Jedoch ist B^{n+1} homotop zu einem Punkt und demnach verschwinden alle Kohomologiegruppen von positivem Grad. □

Beweis von Theorem 2.15. Angenommen $\phi : B^{n+1} \to B^{n+1}$ hat keinen Fixpunkt. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die Standardnorm in $\mathbb{R}^{n+1}$ und definieren im Widerspruch zum Lemma eine Retraktion $r : B^{n+1} \to S^n$ durch $x \mapsto \phi(x) + t_x(x - \phi(x))$, wobei $t_x \geq 1$ für jedes x die Lösung der quadratischen Gleichung $\|\phi(x) + t(x - \phi(x))\|^2 = 1$ ist. □

2.3 Poincaré-Dualität

Die Poincaré-Dualität beschreibt eine fundamentale Symmetrie der DeRham Kohomologiegruppen. Zur Erinnerung, $\Omega_c^*(M)$ bezeichnet den Raum der Differentialformen mit kompaktem Träger. Da $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp} \omega$ ist $d(\Omega_c^*(M)) \subset \Omega_c^*(M)$. Das erlaubt folgende Definition.

Definition 2.17. *Wir definieren die* DeRham-Kohomologie mit kompaktem Träger *durch*

$$H_c^*(M) := \bigoplus_{k\geq 0} H_c^k(M)\,, \qquad H_c^k := \frac{\ker d \cap \Omega_c^k(M)}{\operatorname{im} d \cap \Omega_c^k(M)}\,. \tag{29}$$

Der Raum $H_c^k(M)$ heißt k-te DeRham-Kohomologiegruppe mit kompaktem Träger.

Sei $\phi : N \to M$ eine glatte Abbildung. Es ist $\operatorname{supp} \phi^*\omega \subset \phi^{-1}(\operatorname{supp} \omega)$, jedoch ist das Urbild von kompakten Mengen unter glatten Abbildungen nicht notwendigerweise kompakt und somit $\phi^*(\Omega_c^*(M)) \not\subset \Omega_c^*(M)$. Aus diesem Grund schränken wir uns auf solche Abbildungen ein, die diese Eigenschaft haben. Wir nennen eine Abbildung $\phi : N \to M$ *eigentlich*, wenn für alle Kompakta $K \subset M$ das Urbild $\phi^{-1}(K) \subset N$ eine kompakte Menge ist. Wenn ϕ eigentlich ist, dann ist $\phi^*\big(\Omega_c^*(M)\big) \subset \Omega_c^*(N)$ und demnach gibt es auch eine induzierte Abbildung $\phi^* : H_c^*(M) \to H_c^*(N)$. Wir machen ein paar offensichtliche Beobachtungen

Satz 2.18. *(i) Wenn M kompakt ist, dann $H_c^*(M) = H^*(M)$.*

(ii) Wenn M und N diffeomorph sind, dann $H_c^*(M) \cong H_c^*(N)$.

(iii) Es gilt $H_c^0(M) \cong \mathbb{R}^{\pi_{0,c}(M)}$ wobei $\pi_{0,c}(M)$ die Menge der kompakten Bogenzusammenhangskomponenten ist.

(iv) Es gilt $H_c^k(M) \cong 0$ für $k > \dim M$.

Beweis. Übung. □

Zwei eigentliche Abbildungen $\phi_0, \phi_1 : N \to M$ heißen *eigentlich homotop*, wenn $\phi_0 \sim_H \phi_1$ für eine eigentliche Homotopie H. Wie im Beweis von Satz 2.4 kann man zeigen, dass zwei eigentlich homotope Abbildungen die selbe Abbildung auf der DeRham-Kohomologie mit kompakten Träger induzieren; und zwei eigentlich homotope Räume isomorphe DeRham-Kohomologie mit kompaktem Träger haben. Das hilft leider nicht bei der Berechnung für $\mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R}^n$ nicht eigentlich homotop zum Punkt ist. Dafür verwenden wir die *Faserintegration*. Das ist die lineare Abbildung

$$\pi^! : \Omega_c^*(\mathbb{R} \times M) \to \Omega_c^{*-1}(M)\,, \tag{30}$$

eindeutig bestimmt sodass für alle Karten $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ von M gilt

(i) $\pi^!\omega = 0$ für $\omega = f(t,x)dx^I \in \Omega_c^*(\mathbb{R} \times U)$

(ii) $\pi^!\omega = \big(\int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)\,dt\big)\,dx^I$ für $\omega = g(t,x)\,dx^I \wedge dt \in \Omega_c^*(\mathbb{R} \times U)$.

Das dies in der Tat wohl-definiert ist, folgt völlig analog zur Definition von K im Poicaré Lemma 2.5. Die Faserintegration hat eine Rechtsinverse gegeben durch

$$\tau : \Omega_c^*(M) \to \Omega_c^{*+1}(\mathbb{R} \times M)\,, \qquad \omega \mapsto \pi^*\omega \wedge \rho\,dt\,, \tag{31}$$

wobei $\pi : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t,x) \mapsto x$ und $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger und Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \rho\,dt = 1$ ist. Die Abbildung τ ist zwar keine Linksinverse zu $\pi^!$, aber es gilt

Satz 2.19. *Die Abbildungen*

$$\pi^! : H_c^*(\mathbb{R}\times M) \to H_c^{*-1}(M)\,, \qquad [\omega]\mapsto[\pi^!\omega]\,,$$
$$\tau : H_c^*(M) \to H_c^{*+1}(\mathbb{R}\times M)\,, \qquad [\omega]\mapsto[\tau\omega]\,,$$

sind wohl-definiert und invers zueinander.

Beweis. Nach der Leibnitzformel und da $\rho\,dt$ eine geschlossene Form auf $\mathbb{R}\times M$ ist, gilt $\tau\circ d = d\circ\tau$. Somit induziert τ eine Abbildung auf der Kohomologie. Wir behaupten $d\circ\pi^! = \pi^!\circ d$. Für $\omega = f dx^I$ gilt $\pi^! d\omega = \big(\int_{-\infty}^{\infty}\partial_t f\,dt\big)\,dx^I = 0 = d\pi^!\omega$. Für $\omega = g dx^I\wedge dt$ gilt

$$\pi^! d\omega = \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dt\right)\,dx^I = d\left(\int_{-\infty}^{\infty} g\,dt\right)\,dx^I = d\pi^!\omega\,.$$

Damit induziert auch $\pi^!$ eine Abbildung auf der Kohomologie. Um zu beweisen, dass die induzierten Abbildungen auf der Kohomologie invers zueinander sind, definieren wir eine lineare Abbildung $K:\Omega^*(\mathbb{R}\times M)\to\Omega^{*-1}(\mathbb{R}\times M)$ durch

(i) $K\omega = 0$ für $\omega = f\,dx^I\in\Omega_c^*(\mathbb{R}\times U)$

(ii) $K\omega = \big(\int_{-\infty}^t g\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} g\,dt\int_{-\infty}^t\rho\,dt\big)\,dx^I$ für $\omega = g(t,x)\,dt\wedge dx^I\in\Omega_c^*(\mathbb{R}\times U)$

und zeigen die Gleichung

$$\mathrm{id}-\tau\circ\pi^! = K\circ d + d\circ K\,. \tag{32}$$

In der Tat für $\omega = f\,dx^I$ gilt

$$K d\omega = K\partial_t f\,dt\wedge dx^I = \left(\int_{-\infty}^t \partial_t f\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\partial_t f\,dt\int_{-\infty}^t\rho\,dt\right)\,dx^I = f\,dx^I = \omega\,,$$

und damit $(K\circ d - d\circ K)\omega = \omega = (\mathrm{id}-\tau\circ\pi^!)\omega$. Für $\omega = g\,dt\wedge dx^I$ gilt

$$\begin{aligned}
Kd\omega &= \sum_{j=1}^n K\partial_{x_j} g\,dx^j\wedge dt\wedge dx^I\\
&= -\sum_{j=1}^n\left(\int_{-\infty}^t\partial_{x_j} g\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\partial_{x_j} g\,dt\int_{-\infty}^t\rho\,dt\right)\,dx^j\wedge dx^I\\
dK\omega &= d\left(\int_{-\infty}^t g\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} g\,dt\int_{-\infty}^t\rho\,dt\right)\,dx^I\\
&= \left(g-\rho\int_{-\infty}^{\infty} g\,dt\right)\,dt\wedge dx^I + \sum_{j=1}^n\left(\int_{-\infty}^t\partial_{x_j} g\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\partial_{x_j} g\,dt\int_{-\infty}^t\rho\,dt\right)\,dx^j\wedge dx^I\\
&= \big(\mathrm{id}-\tau\circ\pi^!\big)\omega - Kd\omega\,.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (32) folgt, dass für geschlossene ω gilt $\omega - (\tau\circ\pi^!)\omega = dK\omega$. Also ist $[\omega] = [(\tau\circ\pi^!)\omega]$ und somit ist τ eine Linksinverse von $\pi^!$ auf Kohomologie. ☐

Wir haben gezeigt, dass $H_c^*(\mathbb{R}\times M)\cong H_c^{*-1}(M)$ und durch Iteration schliessen wir

Korollar 2.20. *Integration* $\int_{\mathbb{R}^n} : \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *induziert einen Isomorphmismus* $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ *und*

$$H_c^*(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{wenn } * = n \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Sei $U \subset M$ eine offene Menge und $i : U \to M$ die Einbettung. Da jedes $\omega \in \Omega_c(U)$ auf dem Rand von U verschwindet ist die Fortsetzung durch Null

$$i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(M) \qquad (i_*\omega)_x = \begin{cases} \omega_x & \text{wenn } x \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases},$$

wohl-definiert. Es gilt offensichtlich $i_* \circ d = d \circ i_*$ und damit induziert i_* eine Abbildung auf Kohomologie, die wir mit demselben Symbol bezeichnen. Die Einbettung einer offenen Menge ist im Allgemeinen leider keine eigentliche Abbildung. Demnach gilt die Mayer-Vietoris Sequenz von Satz 2.11 nicht für DeRham-Kohomologie mit kompaktem Träger. Anstelle haben wir eine andere Sequenz. Man bemerke, dass hier die Pfeile in die andere Richtung gehen.

Satz 2.21 (Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger)**.** *Mit den selben Vorraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 2.11 gilt: Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{\underline{i}_* \oplus -\underline{j}_*} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{i_* + j_*} \Omega_c^*(M) \longrightarrow 0 \tag{33}$$

ist exakt und induziert die exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{\underline{i}_* \oplus -\underline{j}_*} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i_* + j_*} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \tag{34}$$

Beweis. Wie im Beweis vom Satz 2.11 genügt es die Exaktheit von (33) zu zeigen. Diese ist trivial, bis auf die Surjektivität von $i_* + j_*$. Sei dazu $\{\rho_U, \rho_V\}$ eine der Überdeckung $\{U, V\}$ untergeordnete Teilung der Eins. Gegeben $\omega \in \Omega_c^*(M)$, dann ist $(\rho_U\omega, \rho_V\omega) \in \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$ ein Urbild.
Wir erinnern an die Konstruktion von δ. Sei $[\omega] \in H_c^k(M)$ wähle $(\omega_U, \omega_V) \in \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V)$, so dass $i_*\omega_U + j_*\omega_V = \omega$. Nach Konstruktion stimmen $d\omega_U$ und $-d\omega_V$ auf $U \cap V$ überein und demnach gibt es $\eta \in \Omega_c^k(U \cap V)$, so dass $\underline{i}_*\eta = d\omega_U$ und $\underline{j}_*\eta = -d\omega_V$. Dann definiere $\delta[\omega] = [\eta]$. □

Korollar 2.22. *Mit* $H_c^*(U)$*,* $H_c^*(V)$ *und* $H_c^*(U \cap V)$ *ist auch* $H_c^*(M)$ *endlich dimensional.*

Beweis. Wort für Wort der Beweis von Korollar 2.12 unter Verwendung der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger. □

Definition 2.23. *Eine Überdeckung* $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ *heißt* gut *oder* zellulär*, wenn für alle* $k \geq 1$ *und* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \subset \Lambda$ *der Schnitt* $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ *homöomorph zu* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Satz 2.24. *Jede Mannigfaltigkeit* M *hat eine zelluläre Überdeckung.*

Beweis. Wir wählen eine Riemannsche Metrik g auf M. In jeder Riemannsche Mannigfaltigkeit hat jeder Punkt eine geodätisch konvexe Umgebung, gegeben durch Normalkoordinaten eingeschränkt auf eine hinreichend kleine Menge. Der Durchschnitt geodätisch konvexer Mengen ist wieder geodätisch konvex. Jede geodätisch konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zum $\mathbb{R}^n$. □

Eine Mannigfaltigkeit M hat *endlichen Typ* oder ist *von endlichen Typ*, wenn es eine endliche zelluläre Überdeckung von M gibt. Alle bisher beschriebenen Mannigfaltigkeiten sind von endlichen Typ. Hier ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit welche nicht von endlichen Typ ist

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(n,0) \mid n = 0,1,2,\dots\}\,.$$

Satz 2.25. *Für jede Mannigfaltigkeit M von endlichen Typ ist $H^*(M)$ und $H_c^*(M)$ endlich dimensional.*

Beweis. Sei k die Anzahl der Mengen einer zellulären Überdeckung von M. Der Satz ist wahr für $k = 1$ nach Korollar 2.8 und 2.20. Nach Induktion nehmen wir an, der Satz ist wahr für alle Mannigfaltigkeiten welche eine Überdeckung durch k Mengen besitzen. Sei $\{U_1, \dots, U_{k+1}\}$ eine zelluläre Überdeckung von M, dann setze $U := U_1 \cup \dots \cup U_k$ und $V := U_{k+1}$. Die Mengen U, V und $U \cap V = \big(U_1 \cap U_{k+1}\big) \cup \big(U_2 \cap U_{k+1}\big) \cup \dots \cup \big(U_k \cap U_{k+1}\big)$ haben eine zelluläre überdeckung von k Mengen. Der Satz folgt nach Induktion aus Korollar 2.12 und Korollar 2.22. $\square$

Theorem 2.26 (Poincaré-Dualität)**.** *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand von endlichen Typ und Dimension $n \geq 1$. Für alle $k = 0, \dots, n$ gibt es einen Isomorphismus*

$$\mathrm{PD} : H^k(M) \overset{\cong}{\to} H_c^{n-k}(M)^*\,, \qquad [\omega] \mapsto \left([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\right)\,. \tag{35}$$

Beweis. Wir überprüfen ob die Vorschrift (35) wohl-definiert ist. Seien ω und η geschlossen. Durch Ausmultiplizieren und mit Leibnitzregel gilt

$$\int_M (\omega + d\omega') \wedge (\eta + d\eta') = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\omega' \wedge \eta) \pm \int_M d(\omega \wedge \eta') \pm \int_M d(\omega' \wedge d\eta')\,.$$

Nach Satz von Stokes verschwinden die letzten drei Terme. Damit ist (35) wohl-definiert. Der Rest des Beweises erfolgt nach dem sogenannte Mayer-Vietoris-Prinzip.
Schritt 1) Seien $U, V \subset M$ offene Mengen. Wir behaupten, es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{PD}_{U\cup V}"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{PD}_U \oplus \mathrm{PD}_V"] & H^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{PD}_{U\cap V}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd} \tag{36}$$

Die obere Zeile ist die Mayer-Vietoris Sequenz (25). Die untere Zeile ist bis auf ein noch zu erklärendes Vorzeichen die duale Sequenz zur Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger (34). Nach Satz 2.11, Satz 2.21 und Lemma B.3 sind die Zeilen exakt. Begründen wir nun, warum das Diagramm kommutiert. Dazu sei $\omega \in \Omega^*(U\cup V)$, $\eta \in \Omega_c^*(U)$ und $\tau \in \Omega_c^*(V)$. Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\int_{U\cup V} \omega \wedge (i_*\eta + j_*\tau) = \int_{U\cup V} \omega \wedge i_*\eta + \int_{U\cup V} \omega \wedge j_*\tau = \int_U i^*\omega \wedge \eta + \int_V j^*\omega \wedge \tau\,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass das erste Quadrat von (36) kommutiert. Kommutativität für das zweite folgt analog. Bleibt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^k(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{PD}_{U\cap V}"] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[d, "\mathrm{PD}_{U\cup V}"] \\
H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta^*"] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^*
\end{tikzcd}$$

Hier haben wir ein Vorzeichen $(-1)^{k+1}$ eingefügt, damit das Diagramm kommutiert. Die Exaktheit der Sequenz wird davon nicht beeinflusst. Seien $\omega \in \Omega^*(U\cap V)$ und $\tau \in \Omega_c^*(U\cup V)$ geschlossene Differentialformen. Sei $\delta[\omega] = [\eta]$. Nach Definition ist $\eta = -d\rho_U\omega = d\rho_V\omega$. Damit

$$\int_{U\cup V} \eta \wedge \tau = \int_{U\cap V} -d\rho_U\omega \wedge \tau = (-1)^{k+1}\int_{U\cap V} \omega \wedge d\rho_U\tau\,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (36) ein kommutatives Diagramm ist.
Schritt 2) Wir beweisen das Theorem nach Induktion über die Anzahl der Mengen einer zellulären Überdeckung. Der Induktionsanfang ist Korollar 2.20. Angenommen das Theorem gilt für alle Mannigfaltigkeiten mit einer zellulären Überdeckung durch k Mengen. Sei $\{U_1, \dots, U_{k+1}\}$ eine zelluläre Überdeckung der Mannigfaltigkeit M. Setze $U := U_1 \cup \dots \cup U_k$ und $V = U_{k+1}$. Wie im Beweis von Satz 2.25 sehen wir dass U, V und $U \cap V$ zelluläre Überdeckungen mit k Mengen haben. Damit ist nach Induktionsvorrausetzung PD_U, PD_V und $\mathrm{PD}_{U\cap V}$ ein Isomorphismus. Mit Verwendung des Fünf-Lemmas B.5 und des ersten Schrittes also auch $\mathrm{PD}_{U\cup V} = \mathrm{PD}_M$. □

Bemerkung 2.27. (i) Die Vorrausetzung, dass M endlichen Typ hat, ist nicht notwendig und kann mit Verwendung von etwas mehr Algebra weggelassen werden. Man beachte aber, dass wenn M nicht von endlichen Typ ist, die Kohomologiegruppen von M nicht mehr endlich dimensional sein müssen und bestimmte Aussagen, die für endlich dimensionale Vektorräume wahr sind, nicht mehr gelten. Dazu ein Beispiel: Sei $M = \bigsqcup_{i\in I} M_i$ eine unendliche disjukte Vereinigung. Dann gilt

$$H^*(M) \cong \prod_{i\in I} H^*(M_i)\,, \qquad H_c^*(M) \cong \bigoplus_{i\in I} H_c^*(M_i)\,,$$

wobei links das direkte Produkt steht, d.h. der Vektorraum aller Folgen $(a_i)_{i\in I}$ mit $a_i \in H^*(M_i)$ für $i \in I$, und rechts die direkte Summe, d.h. der Vektorraum aller Folgen $(a_i)_{i\in I}$ mit nur endlich viele Folgengliedern ungleich Null. Da das Duale einer direkten Summe ein direktes Produkt ist, gilt

$$H_c^*(M)^* \cong \prod_{i\in I} H_c^*(M_i)^*\,.$$

Wenn Poincaré-Dualität für alle M_i gilt, dann auch für M, da das direkte Produkt von Isomorphismen ein Isomorphismus ist. Falsch ist aber, dass auch $H_c^k(M) \to H^{n-k}(M)^*$ durch $[\omega] \mapsto ([\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta)$ ein Isomorphismus ist. Das gilt nur für Mannigfaltigkeiten von endlichen Typ.

(ii) Die Vorraussetzung, dass M keinen Rand hat kann nicht direkt weggelassen werden. Insbesondere ist die Abbildung (35) für Mannigfaltigkeiten mit Rand nicht wohl-definiert. Es gibt aber eine Verallgemeinerung, die sogenannte *Lefschetz-Dualität*. Hierbei wird $H^*(M)$ durch die relative Kohomologiegruppe $H^*(M, \partial M)$ ersetzt.

(iii) Die Orientierbarkeit von M ist ebenfalls essentiel. Ohne Orientierung kann das Integral in (35) gar nicht definiert werden. Es gibt aber auch dafür eine Verallgemeinerung. Hierzu muss man DeRahm-Kohomologie mit lokalen Koeffizienten einführen.

Das Poincaré-Duale von Untermannigfaltigkeiten Sei $S \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ohne Rand d.h. eine Untermannigfaltigkeit welche eine abgeschlossene Teilmenge von M ist. Sei zusätzlich S orientiert von Dimension k, dann ist

$$\int_S : H_c^k(M) \to \mathbb{R}\,, \qquad [\omega] \mapsto \int_S i^*\omega\,,$$

ein lineares Funktional, wobei $i : S \to M$ die Einbettung bezeichnet. Nach der Poincaré-Dualität gibt es eine Klasse $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$ so dass $\mathrm{PD}([\eta_S])[\omega] = \int_S i^*\omega$, d.h. die Klasse $[\eta_S]$ ist eindeutig bestimmt durch

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S\,, \qquad \forall\ [\omega] \in H_c^k(M)\,. \tag{37}$$

Wir definieren das *(abgeschlossene) Poincaré-Duale* $\mathrm{PD}(S) := [\eta_S]$. Sei außerdem S kompakt ohne Rand und M von endlichen Typ. Dann ist auch $H^k(M) \to \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_S i^*\omega$ wohl-definiert und analog definieren wir das *kompakte Poincaré-Duale* $\mathrm{PD}_c(S) := [\eta'_S] \in H_c^k(M)$ wobei $[\eta'_S]$ eindeutig bestimmt ist durch

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta'_S\,, \qquad \forall\ [\omega] \in H^k(M)\,. \tag{38}$$

Das kompakte Poincaré-Duale ist für uns von geringerer Bedeutung und für kompakte Untermannigfaltigkeiten meinen wir mit dem Poincaré-Dualen stets das abgeschlossen Poincaré-Duale, wenn nicht anders angegeben.

2.4 Künnethformel

Die Künnethformel bestimmt die DeRham-Kohomologie für das Produkt zweier Mannigfaltigkeiten M und N. Bezeichne die Projektionen $\pi : M \times N \to M$ und $\tau : M \times N \to N$. Für alle $k, \ell \geq 0$ definieren wir das *Kreuzprodukt*

$$\Omega^k(M) \otimes \Omega^\ell(N) \to \Omega^{k+\ell}(M \times N)\,, \qquad \omega \otimes \eta \mapsto \pi^*\omega \wedge \tau^*\eta\,. \tag{39}$$

Theorem 2.28 (Künneth). *Sei N oder M von endlichem Typ. Für alle $m \geq 0$ induziert das Kreuzprodukt einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{k+\ell=m} H^k(M) \otimes H^\ell(N) \cong H^m(M \times N)\,, \qquad [\omega] \otimes [\eta] \mapsto [\pi^*\omega \wedge \tau^*\eta]\,. \tag{40}$$

Beweis. Wir weisen zunächst nach, dass die Abbildung (40) wohl-definiert ist. Seien ω und η geschlossen. Mit der Leibnitzregel ist dann auch $\pi^*\omega \wedge \tau^*\eta$ geschlossen und

$$\pi^*(\omega + d\omega') \wedge \tau^*(\eta + d\eta') = \pi^*\omega \wedge \tau^*\eta + d(\pi^*\omega' \wedge \tau^* d\eta') \pm d(\pi^*\omega \wedge \tau^*\eta') \pm d(\omega' \wedge d\eta')\,.$$

Demnach hängt $[\pi^*\omega \wedge \tau^*\eta]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten von $[\omega]$ und $[\eta]$ ab. Der Rest des Beweises erfolgt nach dem Mayer-Vietors Prinzip, analog zum Beweis von Theorem 2.26. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass M eine endliche zelluläre Überdeckung hat. Im ersten Schritt geben wir für alle k, ℓ und offenen Überdeckungen $\{U, V\}$ von M ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen an, wobei $m = k + \ell$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k(M) \otimes H^\ell(N) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \big(H^k(U) \oplus H^k(V)\big) \otimes H^\ell(N) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & H^k(U \cap V) \otimes H^\ell(N) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & {} \\
{} \arrow[r] & H^m(M \times N) \arrow[r] & H^m(U \times N) \oplus H^m(V \times N) \arrow[r] & H^m((U \cap V) \times N) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist die mit $H^\ell(N)$ tensorierte Mayer-Vietoris Sequenz für die Überdeckung $\{U, V\}$ von M. Aus Satz 2.11 und Lemma B.4 folgt, dass diese Sequenz exakt ist. Die untere Zeile ist die Mayer-Vietoris Sequenz für die Überdeckung $\{U \times N, V \times N\}$ von $M \times N$. Die vertikalen Morphismen sind gegeben durch (40). Einzusehen, dass die ersten beiden Quadrate kommutieren, ist eine einfache Übung. Für das dritte Quadrat wählen wir $\{\rho_U, \rho_V\}$ eine Teilung der Eins untergeordnet zu $\{U, V\}$. Dann ist $\{\bar{\rho}_U := \rho_U \circ \pi, \bar{\rho}_V := \rho_V \circ \pi\}$ untergeordnet zu $\{U \times N, V \times N\}$. Wir rechnen

$$(\delta \circ \phi)(\omega \otimes \eta) = \delta[\pi^*\omega \wedge \tau^*\eta] = [d\bar{\rho}_U \pi^*\omega \wedge \tau^*\eta] = [\pi^* d(\rho_U \omega) \wedge \tau^*\eta] = \phi(\delta[\omega] \otimes [\eta]) \ .$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass das Diagramm kommutiert. Im zweiten Schritt führen wir eine Induktion nach der Anzahl der Mengen in einer zellulären Überdeckung der Mannigfaltigkeit aus. Der Induktionsanfang folgt nach Korollar 2.8 und Homotopieinvarianz 2.6. Für den Induktionsschritt: Wir kürzen ab $A_{k,\ell} := H^k(M) \otimes H^\ell(N)$, $B_{k,\ell} := (H^k(U) \otimes H^k(V)) \otimes H^\ell(N)$, $C_{k,\ell} := H^k(U \cap V) \otimes H^\ell(N)$, $A_m := H^m(M \times N)$, $B_m := H^m(U \times N) \oplus H^m(V \times N)$ und $C_m := H^m((U \cap V) \times N)$. Fixiere m. Mit diesen Abkürzungen erhalten wir aus dem oberen Diagramm ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
B_{k-1,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & C_{k-1,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & A_{k,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & B_{k,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & C_{k,\ell} \arrow[d] \\
B_{m-1} \arrow[r] & C_{m-1} \arrow[r] & A_m \arrow[r] & B_m \arrow[r] & C_m \, .
\end{tikzcd}$$

Wir bilden die direkte Summe über alle k, ℓ so dass $k + \ell = m$ und erhalten

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus B_{k-1,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus C_{k-1,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus A_{k,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus B_{k,\ell} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus C_{k,\ell} \arrow[d] \\
B_{m-1} \arrow[r] & C_{m-1} \arrow[r] & A_m \arrow[r] & B_m \arrow[r] & C_m \, .
\end{tikzcd}$$

Nach Induktionsvorraussetzung sind die beiden äusseren vertikalen Pfeile Isomorphismen und nach dem Fünflemma B.5 auch der innere. □

Bemerkung 2.29. (i) Wieder ist die Annahme, dass eine der Mannigfaltigkeiten endlichen Typ hat, nicht notwendig und die Formel gilt auch allgemeiner für beliebige Mannigfaltigkeiten.

(ii) Man sieht leicht, dass (40) bezüglich $(a \otimes b) \wedge (c \otimes d) := (-1)^{\deg b \deg c}(a \wedge c) \otimes (b \wedge d)$ ein Algebraisomorphismus ist. Damit kann man zeigen, dass die De-Rahmkohomologie des Torus $\mathbb{T}^n = S^1 \times \ldots S^1$ als graduierte Algebra isomorph zum äusseren Produkt $\Lambda\mathbb{R}^n$ ist.

(iii) Es gibt eine analoge Formel für die DeRahm Kohomologie mit kompaktem Träger eines Produktes zweier Mannigfaltigkeiten.

2.5 Thom-Isomorphismus

Wir wollen das Poincaré-Duale von Untermannigfaltigkeiten genauer verstehen. In der Übung haben wir in Beispielen gesehen, dass dies von Differentialformen repräsentiert wird welche Träger "in der Nähe" der Untermannigfaltigkeit haben. Um das mathematisch exakt zu formulieren führen wir den Begriff der Tubenumgebung ein und zeigen im Anschluss den Thom-Isomorphismus.

Definition 2.30. *Sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Ein* Normalenbündel $E \subset TM$ *ist eine Menge $E = \bigsqcup_{x \in S} E_x$ mit $E_x \subset T_xM$ so dass*

(i) $E_x \oplus T_xS = T_xM$ für alle $x \in S$

(ii) für alle $x \in S$ gibt es Umgebungen U und Vektorfelder $X_1, \dots, X_\ell \in \mathfrak{X}(U)$ so dass für alle $y \in U$ das Tupel $(X_1(y), \dots, X_\ell(y))$ eine Basis von E_y ist.

Satz 2.31. *Ein Normalenbündel ist eine Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas von S und $X_1^\alpha, \dots, X_\ell^\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ Vektorfelder welche punktweise eine Basis von E bilden. Es sei $\pi : E \to M$ definiert durch $\pi(E_x) = x$. Wir definieren $\bar{U}_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$ und $\bar{\varphi}_\alpha : \bar{U}_\alpha \to \mathbb{R}^n$ als das Inverse der Abbildung

$$\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^\ell \to \bar{U}_\alpha\,, \qquad (\varphi_\alpha(x), a_1, \dots, a_\ell) \mapsto a_1 X_1^\alpha(x) + \dots a_\ell X_\ell^\alpha(x)\,.$$

Wir definieren $U \subset E$ als offen, wenn $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ für alle α offen ist. Diese Topologie ist Hausdorff, da φ_α eine Bijektion ist und Punkte in $\mathbb{R}^n$ durch offene Mengen getrennt werden können. Sei $\{U_i \subset \mathbb{R}^n\}$ eine abzählbare Basis von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist $\{\varphi_\alpha^{-1}(U_i)\}$ eine abzählbare Basis von offenen Mengen in E. Damit sind die notwendigen Eigenschaften an die Topologie von E nachgewiesen. Wir behaupten, dass $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ einen Atlas liefert. Für $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ sei $\psi_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^\ell)$ die Basistransformationsmatrix von $(X_1^\alpha(x), \dots, X_\ell^\alpha(x))$ nach $(X_1^\beta(x), \dots, X_\ell^\beta(x))$. Wir berrechnen den Kartenwechsel. Sei $(x, v) \in \bar{\varphi}_\alpha(\bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^\ell$. Dann gilt

$$\bar{\phi}_{\alpha\beta}(x, v) := (\bar{\varphi}_\beta \circ \bar{\varphi}_\alpha^{-1})(x, v) = ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), \psi_{\alpha\beta}(x)v)\,. \tag{41}$$

Wir schließen, dass $\bar{\phi}_{\alpha\beta}$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist. □

Der Beweis funktioniert auch für das Tangentialbündel. Wir verallgemeinern den Begriff des Normalenbündels und des Tangentialbündels zum Begriff des Vektorbündels.

Definition 2.32. *Ein* Vektorbündel $\pi : E \to M$ *von Rang ℓ ist eine surjektive (glatte) Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten E und M, so dass jede* Faser $E_x := \pi^{-1}(x)$ *für $x \in M$ die Struktur eines ℓ-dimensionalen reelen Vektorraumes hat und es einen* Bündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ *gibt:*

(i) $\{U_\alpha\}$ ist eine Überdeckung von M

(ii) $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^\ell \times U_\alpha$ ist ein Diffeomorphismus so dass

(iii) $\varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \mathbb{R}^\ell \times \{x\}$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen für alle $x \in U_\alpha$.

Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Bündelatlas. Wir definieren den *Trivialisierungswechsel* $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^\ell)$

$$\psi_{\alpha\beta}(x) := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\mathbb{R}^\ell \times \{x\}}\,.$$

Ein Vektorbündel ist *orientiert*, wenn $\det \psi_{\alpha\beta} > 0$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Satz 2.33. *Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und M orientiert. Dann ist E als Mannigfaltigkeit orientiert genau dann wenn E als Bündel orientiert ist.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 2.31 definieren wir einen Atlas $\{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ von E. Der Kartenwechsel ist gegeben durch (41). Damit ist das Differental

$$d\bar{\phi}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} d\phi_{\alpha\beta} & * \\ 0 & \psi_{\alpha\beta} \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante gilt $\det d\bar{\phi}_{\alpha\beta} = \det d\phi_{\alpha\beta} \cdot \det \psi_{\alpha\beta}$. Nach Vorraussetzung hat $\det d\phi_{\alpha\beta}$ ein positives Vorzeichen. Damit hat $\det d\bar{\phi}_{\alpha\beta}$ genau dann ein positives Vorzeichen, wenn $\det \psi_{\alpha\beta}$ ein positives Vorzeichen hat. □

Sei $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel von Rang ℓ. Die *Produktorientierung* ist die durch den Satz gegebene Orientierung auf E als Mannigfaltigkeit. Wir definieren

$$\Omega^*_{cv}(E) := \{\omega \in \Omega^*(E) \mid \operatorname{supp} \omega \cap E_x \text{ kompakt } \forall\, x \in M\} ,$$

den Raum der Differentialformen mit *kompaktem vertikalen Träger*. Auf diesen Raum überträgt sich die Definition der *Faserintegration*

$$\pi^! : \Omega^*_{cv}(E) \to \Omega^{*-\ell}(M) ,$$

eindeutig bestimmt, so dass in einer Bündelkarte $(U_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)$ für $\omega \in \Omega^*_{cv}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ gilt

(i) $\pi^!\omega = 0$ wenn $\omega = f dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \cdots \wedge dt^{j_m}$ für $m < \ell$ und

(ii) $\pi^!\omega = \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(t,x) dt^1 \dots dt^\ell\right) dx^I$ wenn $\omega = f dx^I \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^\ell$.

Um zu sehen, dass dies wohl-definiert, ist betrachte für $\omega = f dx^I \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^\ell$ den Kartenwechsel

$$\begin{aligned}
\pi^! \overline{\phi}^*_{\alpha\beta}\omega &= \pi^! \left(f(\phi_{\alpha\beta}(x), \psi_{\alpha\beta}(x)t) \det \psi_{\alpha\beta}(x) \phi^*_{\alpha\beta} dx^I \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^\ell \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(\phi_{\alpha\beta}(x), \psi_{\alpha\beta}(x)t) \det \psi_{\alpha\beta}(x)\, dt^1 \dots dt^\ell \right) \phi^*_{\alpha\beta} dx^I \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(\phi_{\alpha\beta}(x), t)\, dt^1 \dots dt^\ell \right) \phi^*_{\alpha\beta} dx^I \\
&= \phi^*_{\alpha\beta} \pi^! \omega .
\end{aligned}$$

Somit definiert $\pi^!\omega$ einen Kozykel, also eine Differentialform.

Satz 2.34. *Es gilt $d \circ \pi^! = \pi^! \circ d$.*

Beweis. Es reicht die Formel in lokaler Darstellung in einer Bündelkarte (U, φ) nachzuweisen. Für $\omega = f dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \cdots \wedge dt^{j_m}$ mit $m < \ell - 1$ verschwinden beide Seiten. Für $\omega = f dx^I \wedge dt^1 \wedge \dots \widehat{dt^j} \cdots \wedge dt^\ell$ verschwindet die linke Seite und für die rechte Seite gilt

$$\pi^!(d\omega) = \pi^! \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I \wedge dt^1 \wedge \dots \widehat{dt^j} \cdots \wedge dt^\ell \pm \left(\int \frac{\partial f}{\partial t_j}\, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^I .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung und da f kompakten Träger hat verschwindet auch dieser Term. Für $\omega = f dx^I \wedge dt^1 \wedge \dots \wedge dt^\ell$ gilt für die rechte Seite

$$\pi^!(d\omega) = \pi^! \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I \wedge dt^1 \wedge \dots \wedge dt^\ell = \sum_{i=1}^k \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^i \wedge dx^I \, .$$

Für die linke Seite gilt

$$d(\pi^! \omega) = d \left(\int f \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^I = \sum_{i=1}^k \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^i \wedge dx^I \, .$$

Damit wurde die Formel bewiesen. □

Im Gegensatz zum Pull-back ist die Faserintegration kein Ringhomomorphismus für das Dachprodukt. Anstelle gibt es eine andere Produktformel

Satz 2.35 (Produktformel)**.** *(a) Sei $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel von Rank ℓ, τ eine Differentialform auf M und ω ein Differentialform auf E mit kompaktem vertikalen Träger. Es gilt*

$$\pi^!(\pi^* \tau \wedge \omega) = \tau \wedge \pi^! \omega \, . \tag{42}$$

(b) Angenommen M ist zusätzlich orientiert von Dimension n, $\omega \in \Omega^q_{cv}(E)$ und $\tau \in \Omega_c^{n+\ell-q}(M)$. Dann gilt bezüglich der Produktorientierung auf E

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi^! \omega \, . \tag{43}$$

Beweis. Wir rechnen wieder in lokalen Koordinaten. Sei $\tau = g(x) dx^J$. Für $\omega = f(x,t) dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \dots dt^{j_m}$ mit $m < \ell$ verschwindet die rechte Seite der Produktformel und für die linkte Seite gilt

$$\pi^!(\pi^* \tau \wedge \omega) = \pi^!(g dx^J \wedge f dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_m}) = \pi^!(g f dx^J \wedge dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_m}) = 0 \, .$$

Für $\omega = f(x,t) dx^I \wedge dt^1 \dots dt^\ell$ gilt

$$\begin{aligned}
\pi^!(\pi^* \tau \wedge \omega) &= \pi^!(g(x) dx^J f(x,t) dx^I \wedge dt^1 \wedge dt^\ell) = \pi^! f(x,t) g(x) dx^J \wedge dx^I \wedge dt^1 \wedge dt^\ell \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,t) g(x) \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^J \wedge dx^I \\
&= g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,t) \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^J \wedge dx^I \\
&= \tau \wedge \pi^! \omega \, .
\end{aligned}$$

Für (b) reicht es ohne Einschränkung $\tau = g(x) dx^J$ und $\omega = f(x,t) dx^I \wedge dt^1 \wedge \dots \wedge dt^\ell$ so dass $dx^J \wedge dx^I = dx^1 \dots dx^n$ zu betrachten. Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n+\ell}} g(x) f(x,t) dx^1 \dots dx^n dt^1 \dots dt^\ell \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,t) \, dt^1 \dots dt^\ell \right) dx^1 \dots dx^n \\
&= \int_M \tau \wedge \pi^! \omega \, .
\end{aligned}$$

Damit wurde (b) bewiesen. □

Da die äußere Ableitung den Träger einer Differentialform nur verkleinert ist $d(\Omega^*_{cv}(E)) \subset \Omega^*_{cv}(E)$. Wir definieren die *DeRham-Kohomologie mit kompaktem vertikalen Träger* durch

$$H^*_{cv}(E) := \bigoplus_{k\geq 0} H^k_{cv}(E)\,, \qquad H^k_{cv}(E) := \frac{\ker d \cap \Omega^k_{cv}(E)}{\operatorname{im} d \cap \Omega^k_{cv}(E)}\,.$$

Theorem 2.36 (Thom-Isomorphismus)**.** *Sei $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel von Rang ℓ und M von endlichen Typ. Die Faserinteration induziert einen Isomorphismus*

$$H^*_{cv}(E) \cong H^{*-\ell}(M)\,.$$

Beweis. Sei $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von M. Bezeichne $E_U := \pi^{-1}(U)$, $E_V := \pi^{-1}(V)$ und $E_{U\cap V} := \pi^{-1}(U \cap V)$. Wir bezeichnen mit $\hat{i}, \hat{j}$ und $\underline{\hat{i}}, \underline{\hat{j}}$ die Einbettung von E_U, E_V in E bzw. von $E_{U\cap V}$ in E_U, E_V. Wir behaupten, dass die folgende Sequenz exakt ist

$$0 \longrightarrow \Omega^*_{cv}(E) \xrightarrow{\hat{i}^*\oplus\hat{j}^*} \Omega^*_{cv}(E_U) \oplus \Omega^*_{cv}(E_V) \xrightarrow{\underline{\hat{i}}^*-\underline{\hat{j}}^*} \Omega^*_{cv}(E_{U\cap V}) \longrightarrow 0\,.$$

Der Beweis dafür ist analog zum Beweis von Satz 2.11. Wir zeigen nur die Surjektivität von $\underline{\hat{i}}^* - \underline{\hat{j}}^*$. Wir wählen eine der Überdeckung $\{U, V\}$ untergeordnete Teilung der Eins $\{\rho_U, \rho_V\}$ und erhalten durch $\{\hat{\rho}_U := \rho_U \circ \pi, \hat{\rho}_V := \rho_V \circ \pi\}$ eine der Überdeckung $\{E_U, E_V\}$ untergeordnete Teilung der Eins. Damit definiere für gegebenes $\omega \in \Omega^*_{cv}(E_{U\cap V})$ die Formen $\omega_U := \hat{\rho}_V \omega \in \Omega^*_{cv}(E_U)$ und $\omega_V = -\hat{\rho}_U \omega \in \Omega^*_{cv}(E_V)$. Dann gilt $\underline{\hat{i}}^*\omega_U - \underline{\hat{j}}^*\omega_V = \omega$ und somit ist $\underline{\hat{i}}^* - \underline{\hat{j}}^*$ surjektiv. Die kurze exakte Sequenz induziert eine lange exakte Sequenz für die Kohomologie und mit Satz 2.11 erhalten wir ein Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & H^k_{cv}(E) & \longrightarrow & H^k_{cv}(E_U) \oplus H^k_{cv}(E_V) & \longrightarrow & H^k_{cv}(E_{U\cap V}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & H^k(M) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U\cap V) & \longrightarrow & \dots\,.
\end{array}$$

Man überprüft direkt in Bündelkarten, dass die ersten beiden Quadrate kommutieren. Für das dritte müssen wir zeigen, dass

$$\begin{array}{ccc}
H^k_{cv}(E_{U\cap V}) & \xrightarrow{\delta'} & H^{k+1}_{cv}(E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^k(U\cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(M)\,.
\end{array}$$

Für $[\omega] \in H^k_{cv}(E_{U\cap V})$ rechnen wir mit Verwendung von (42)

$$(\pi^! \circ \delta')[\omega] = [\pi^! d\hat{\rho}_U \omega] = [d\rho_U \pi^! \omega] = (\delta \circ \pi^!)[\omega]\,.$$

Der Rest des Beweises erfolgt nach Mayer-Vietors Prinzip. Der Induktionsanfang ist gegeben durch Korollar 2.20. $\square$

Der Thom-Isomorphismus besagt insbesondere, dass es eine eindeutig bestimmte Klasse $u \in H^\ell_{cv}(E)$ gibt, mit der Eigenschaft $\pi^!(u) = 1 \in H^0(M)$, wobei hier 1 die Klasse repräsentiert durch die konstante Funktion 1 bedeutet. Die Klasse u ist die *Thom-Klasse*. Mit der Produktformel sieht man, dass das Inverse von $\pi^!$ durch $\pi^*(\cdot) \wedge u$ gegeben ist. Wir weisen eine wichtige Eigenschaft der Thom-Klasse nach.

Lemma 2.37. *Die Thom-Klasse $u = [\eta] \in H^\ell_{cv}(E)$ ist eindeutig bestimmt durch $\int_{E_x} \eta = 1$ für ein beliebiges $x \in M$, wobei E_x durch die Bündelorientierung von E orientiert ist.*

Beweis. Gegeben $\eta \in \Omega^\ell_{cv}(E)$ mit $d\eta = 0$ und $\int_{E_x} \eta = 1$. Sei $f = \pi^!\eta \in C^\infty(M)$. Da $df = d\pi^!\eta = \pi^! d\eta = 0$ ist f eine konstante Funktion. In einer Bündelkarte um x gilt $\eta = g\, dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^\ell + \eta'$ wobei η' eine Summe von Differentialformen der Form $f_I dx^I \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots dt^{j_m}$ mit $m < \ell$ ist. Es gilt $f = \int_{\mathbb{R}^\ell} g\, dt^1 \ldots dt^\ell = \int_{E_x} \eta = 1$. Demnach ist $\pi^![\eta] = 1$ und η repräsentiert die Thom-Klasse. □

Definition 2.38. *Sei $S \subset M$ eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit. Eine* Tubenumgebung *von S ist eine offene Umgebung $U \subset M$ mit der Eigenschaft: Es existiert ein Normalenbündel $\pi : E \to S$, eine offene Menge $U' \subset E$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to U'$, so dass*

(i) wenn $v \in U'$ dann ist auch $rv \in U'$ für alle $r \in [0, 1]$,

(ii) $\varphi(x) = 0_x \in E_x$ für alle $x \in S$.

Insbesondere folgt, dass $\pi|_{U'} : U' \to S$ eine Deformationsretration ist.

Satz 2.39. *Jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit hat eine Tubenumbegung.*

Beweis. Wähle eine Metrik g auf M. Wir erhalten ein Normalenbündel E durch

$$E := (TS)^\perp := \{v \in TM \mid x := \pi(v) \in S\,,\ g_x(v, w) = 0\ \forall\, w \in T_xS\}\,.$$

Wir behaupten: Es gibt eine Funktion $r : S \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$U' := U'_r := \{v \in E \mid g_{\pi(v)}(v, v) < r(\pi(v))\}\,, \qquad U := \{\exp_{\pi(v)}(v) \mid v \in U'\}$$

wohl-definiert ist und $\psi : U' \to U$, $v \mapsto \exp_{\pi(v)} v$ ein Diffeomorphismus ist. Dazu zeigen wir:

- Die Menge aller $v \in E$, so dass $\exp_{\pi(v)}$ auf v definiert ist, bildet eine offene Umgebung um S.
- ψ ist injektiv auf einer offenen Umgebung um S, da S abgeschlossen und $\psi|_S$ injektiv ist.
- ψ ist lokaler Diffeomorphismus auf einer offenen Umgebung um S, analog zu [3, Lemma 3.60].
- Jede offene Umgebung von S in E enthält U'_r für eine geeignete Funktion r.

Die einzelnen Schritte zu zeigen, überlassen wir dem Leser. Siehe auch [10, §9.20] für den Fall wenn S kompakt ist. Dann kann r als konstante Funktion angenommen werden. Wenn S nicht kompakt ist, konstruiere die Funktion r mittels einer kompakten Ausschöpfung von S. Es folgt nun dass U eine Tubenumgebung um S ist. □

Hier die mathematische Formulierung der anfänglich beschriebenen Beobachtung.

Satz 2.40 (Lokalisierungsprinzip). *Für jede Tubenumbegung U einer abgeschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeit S in einer orientierten Mannigfaltigkeit M gibt es eine Differentialform mit Träger in U welche das Poincaré-Duale von S repräsentiert. Insbesondere gilt*

$$\mathrm{PD}(S) = [j_* \varphi^* \eta] \,. \tag{44}$$

Wobei $\varphi : U \to U' \subset E$ wie in Definition 2.38, η ein Repräsentant der Thom-Klasse von E und j die Einbettung von U in M bedeutet.

Beweis. Sei U', E und $\varphi : U \to U'$ wie in Definition 2.38. Wir orientieren E als Mannigfaltigkeit mit der Bedingung, dass φ orientierungserhaltend ist und als Bündel, so dass E die Produktorientierung trägt (vgl. Satz 2.33).
Schritt 1) Wir zeigen, dass es eine Differentialform mit Träger in U' gibt, welche die Thom-Klasse von E repräsentiert. Sei zunächst η ein beliebiger Repräsentant der Thom-Klasse. Für $r : S \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachte die Abbildung $\psi_r : E \to E$, $E_x \ni v \mapsto r(x)v$ und den Pull-back $\eta_r := \psi_r^* \eta$. Dann gilt nach der Transformationsformel und Satz 2.37

$$\int_{E_x} \eta_r = \int_{E_x} \psi_r^* \eta = \int_{E_x} \eta = 1 \,.$$

Demnach repräsentiert η_r auch die Thom-Klasse. Außerdem gilt $\operatorname{supp} \eta_r = \psi_r^{-1}(\operatorname{supp} \eta)$. Es reicht ein r zu finden, so dass

$$\operatorname{supp} \eta \subset \psi_r(U') \iff \operatorname{supp} \eta_r \subset U' \,. \tag{45}$$

Ähnlich zum Beweis von Satz 2.39 konstruieren wir Funktionen $r_-, r_+ : S \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\operatorname{supp} \eta \subset \{v \in E \mid \|v\| < r_+(\pi(v))\}$ und $\{v \in E \mid \|v\| < r_-(\pi(v))\} \subset U'$. Dann folgt (45) mit $r = r_+/r_-$. Im weiteren Verlauf des Beweises bezeichnen wir η_r mit η.
Schritt 2) Wir behaupten, dass $j_* \varphi^* \eta \in \Omega^*(M)$ das Poincaré-Duale repräsentiert, wobei $j : U \to M$ die Einbettung ist und j_* die Fortsetzung durch Null bedeutet. Für $[\omega] \in H_c^\ell(M)$ und $\omega' := (\varphi^{-1})^* \omega$ gilt mit Produktformel (43)

$$\int_M \omega \wedge j_* \varphi^* \eta = \int_U \omega \wedge \varphi^* \eta = \int_{U'} \omega' \wedge \eta = \int_E \pi^* i^* \omega' \wedge \eta = \int_S i^* \omega' = \int_S i^* \omega \,,$$

wobei wir in der dritten Gleichung verwendet haben, dass $\pi : E \to S$ eine Homotopie-inverse zum Nullschnitt $s : S \to E$, $x \mapsto 0_x$ ist; demnach ist mit dem Poincaré-Lemma $\omega' \wedge \eta - \pi^* i^* \omega' \wedge \eta$ exakt und nach Satz von Stokes das Integral über die Differenz gleich Null. Damit ist die Gleichung (37) erfüllt und der Beweis fertig. □

Schnitt-Theorie Mit den gewonnenen Erkenntnissen über das Poincaré-Duale studieren wir das Schnittverhalten von Untermannigfaltigkeiten mittels Differentialformen. Dies führt zu erstaunlichen Anwendungen. Sei $S \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\phi : N \to M$ *ist transversal zu* S (schreibe $\phi \pitchfork S$) wenn für alle $x \in \phi^{-1}(S)$

$$d_x \phi(T_x N) + T_{\phi(x)} S = T_{\phi(x)} M \,.$$

Zwei Untermannigfaltigkeiten $T, S \subset M$ sind *transversal* (schreibe $T \pitchfork S$), wenn für alle $x \in T \cap S$

$$T_x T + T_x S = T_x M \,.$$

Die *Kodimension* von S ist definiert durch $\operatorname{codim} S := \dim M - \dim S$.

Satz 2.41. *(a) Wenn $\phi \pitchfork S$, dann ist $\phi^{-1}(S) \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit mit*

$$\operatorname{codim} \phi^{-1}(S) = \operatorname{codim} S\,.$$

Sei zusätzlich S, M und N orientiert, dann ist auch $\phi^{-1}(S)$ orientiert und

$$\mathrm{PD}(\phi^{-1}(S)) = \phi^*\mathrm{PD}(S)\,.$$

(b) Wenn $T \pitchfork S$, dann ist $T \cap S$ eine Untermannigfaltigkeit mit

$$\operatorname{codim} S \cap T = \operatorname{codim} S + \operatorname{codim} T\,.$$

Seien zusätzlich S, T und M orientiert, dann ist auch $T \cap S$ orientiert und es gilt

$$\mathrm{PD}(S \cap T) = \mathrm{PD}(S) \wedge \mathrm{PD}(T)\,.$$

Beweis. Zu (a). Da der erste Teil der Aussage eine lokale Aussage ist, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $M = \mathbb{R}^n$ und $S = \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Sei $\rho : \mathbb{R}^n \to \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ die Projektion. Nach Vorraussetzung hat $\rho \circ \phi$ bei 0 einen reguären Wert. Damit ist nach Satz vom reglären Wert $\phi^{-1}(S) = (\rho \circ \phi)^{-1}(0)$ eine Untermannigfalitkeit. Außerdem gilt $\ker T_x\phi^{-1}(S) = \ker d_x(\rho \circ \phi)$ und somit nach Rangsatz $\operatorname{codim} \phi^{-1}(S) = \operatorname{codim} S$.

Hier fehlt was.

□

2.6 Eulerklasse

Sei $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel von Rang ℓ mit Thom-Klasse $u = u(E) \in H^\ell_{cv}(E)$. Wir definieren die *Euler-Klasse* $e = e(E) \in H^\ell(M)$ durch $e = s^*u$, wobei $s : M \to E$, $x \mapsto (x, 0)$ der Nullschnitt ist.

Satz 2.42. *Für jede orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit M gilt*

$$\int_M e(TM) = \chi(M)\,.$$

Der Beweis erfordert ein Lemma und ein paar Vorbereitungen. Sei $m = \dim H^*(M)$. Mit Verwendung der Poincaré-Dualität gibt es zwei Basen von $H^*(M)$ repräsentiert durch die Differentialformen $\omega_1, \dots, \omega_m$ und $\tau_1, \dots, \tau_m$ mit der Eigenschaft

$$\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}\,,$$

für alle $i, j = 1, \dots .m$. Wir schreiben $\deg \omega_i \in \mathbb{N}$ und $\deg \tau_j$ so dass $\omega_i \in H^{\deg \omega_i}(M)$ bzw. $\tau_j \in H^{\deg \tau_j}(M)$. Nach Satz von Künneth repräsntiert das Tupel $(\pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j)_{1 \le i,j \le m}$ eine Basis von $H^*(M \times M)$ wobei $\pi : M \times M \to M$ und $\rho : M \times M \to M$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente bedeutet. Der Raum $\Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.

Lemma 2.43. $\sum_{j=1}^{\dim H^*(M)} (-1)^{\deg \omega_j} \pi^*\omega_j \wedge \rho^*\tau_j$ *repräsentiert das Poincaré-Duale von Δ.*

Beweis. Die Abbildung $\phi : M \to \Delta$, $x \mapsto (x,x)$ ist ein Diffeomorphismus. Wir rechnen

$$\int_\Delta \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_\ell = \int_M (\pi\circ\phi)^*\tau_k \wedge (\pi\circ\rho)^*\omega_\ell = \int_M \tau_k \wedge \omega_\ell = (-1)^{\deg\tau_k \deg\omega_\ell}\delta_{k\ell}\,. \tag{46}$$

Sei η_Δ Repräsentant des Poincaré-Dualen von Δ. Nach Theorem 2.28 gibt es $c_{ij} \in \mathbb{R}$ so dass

$$\eta_\Delta = \sum_{1\le i,j\le m} c_{ij}\pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j\,.$$

Wir rechnen mit definierender Eigenschaft des Poincaré-Dualen

$$\begin{aligned}\int_\Delta \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_\ell &= \int_{M\times M} \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_\ell \wedge \eta_\Delta\\ &= \sum_{i,j} c_{ij}\int_{M\times M} \pi^*\tau_k \wedge \rho^*\omega_\ell \wedge \pi^*\omega_i \wedge \rho^*\tau_j\\ &= \sum_{i,j} c_{ij}\int_{M\times M} (-1)^{(\deg\tau_k+\deg\omega_\ell)\omega_i}\pi^*(\omega_i\wedge\tau_k)\wedge\rho^*(\omega_\ell\wedge\tau_j)\\ &= \sum_{i,j} c_{ij}(-1)^{(\deg\tau_k+\deg\omega_\ell)\deg\omega_i}\int_M \omega_i\wedge\tau_k \cdot \int_M \omega_\ell\wedge\tau_j\\ &= \sum_{i,j} c_{ij}(-1)^{(\deg\tau_k+\deg\omega_\ell)\deg\omega_i}\delta_{ik}\delta_{\ell j}\\ &= (-1)^{(\deg\tau_k+\deg\omega_\ell)\deg\omega_k}c_{k\ell}\,.\end{aligned}$$

Mit Gleichung (46) folgt

$$c_{k\ell} = \begin{cases}(-1)^{\deg\omega_k} & \text{wenn } k=\ell\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

wobei wir verwendet haben, dass $(-1)^{\deg\omega_k\deg\omega_k} = (-1)^{\deg\omega_k}$. □

Beweis von Satz 2.42. Für alle $(x,x)\in\Delta$ identifizieren wir $T_{(x,x)}M\times M = T_xM\oplus T_xM$. Mit dieser Identifizierung ist ein Normalenbündel von $\Delta\subset M\times M$ gegeben durch $E=\bigcup_{(x,x)\in\Delta}E_x$ mit

$$E_x := \{(v,-v)\in T_xM\oplus T_xM \mid v\in T_xM\}\,.$$

Die Abbildung $\bar\phi : TM\to E$, $v\mapsto(v,-v)$ ist ein Diffeomorphisus mit $\bar\phi(T_xM)=E_x$. Sei η_E ein Repräsentant der Thom-Klasse von E. Dann gilt

$$\int_{T_xM}\bar\phi^*\eta_E = \int_{E_x}\eta_E = 1\,.$$

Somit repräsentiert $\bar\phi^*\eta_E$ die Thom-Klasse von TM. Sei $U\subset M\times M$ eine Normalenumgebung von Δ und $\varphi : U\to U'\subset E$ wie in Definition 2.38. Nach Lokalisierungsprinzip 2.40 hat η_E ohne Einschränkung Träger in U' und mit Lemma 2.43 ist $j_*\varphi^*\eta_E = \sum_{j=1}^{\dim H^*(M)}(-1)^{\deg\omega_j}\pi^*\omega_j\wedge\rho^*\tau_j$. Damit

$$\int_M e(TM) = \int_\Delta s^*\eta_E = \sum_{j=1}^m(-1)^{\deg\omega_j}\int_\Delta\pi^*\omega_j\wedge\rho^*\tau_j = \sum_{j=1}^m(-1)^{\deg\omega_j} = \chi(M)\,,$$

wobei wir verwendet haben $s^*\eta_E = s^* j_* \varphi^* \eta_E$.

$\square$

Eine interessante Anwendung der hier entwickelten Theorie ist das Lefschetz-Fixpunkt Theorem. Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $\phi : M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren die *Lefschetz-Zahl* $L(\phi) \in \mathbb{Z}$ durch

$$L(\phi) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ \mathrm{Tr}(\phi^* : H^k(M) \to H^k(M)) \,,$$

wobei Tr die Spur der linearen Abbildung bedeutet.

Theorem 2.44 (Lefschetz-Fixpunkt Theorem)**.** *Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $\phi : M \to M$ so dass $L(\phi) \neq 0$, dann hat ϕ einen Fixpunkt.*

Beweis. Ohne Einschränkung ist M orientierbar. Falls nicht betrachte d Angenommen ϕ hat keinen Fixpunkt. Die Abbildung $\mathrm{id} \times \phi$ ist transversal zur Diagonalen $\Delta \subset M \times M$. Damit nach Satz 2.41 ist $(\mathrm{id} \times \phi)^{-1}(\Delta) \subset M \times M$ eine Untermannigfaltigkeit. Wenn ϕ keinen Fixpunkt hat, dann hat Δ und $(\mathrm{id} \times \phi)^{-1}(\Delta)$ auch keinen Schnittpunkt. Insbesondere schneiden diese Untermannigfaltigkeiten sich transversal und wieder mit Satz 2.41 gilt

Hier fehlt was.

$$0 = \mathrm{PD}(\Delta) \wedge \mathrm{PD}((\mathrm{id} \times \phi)^{-1}(\Delta)) = \mathrm{PD}(\Delta) \wedge (\mathrm{id} \times \phi)^* \mathrm{PD}(\Delta) \,.$$

$\square$

Berrechnung der Eulerklasse im Beispiel $\ell = 2$: Wir geben eine konkrete Berrechnung der Euler-Klasse eines orientierten Vektorbündels $\pi : E \to M$ im Fall das $\ell = \dim \pi^{-1}(x) = 2$. Hierbei nehmen wir zusätzlich an, dass es für E einen Bündelatlas $\{(U_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ gibt, so dass für den Trivialisierungswechsel gilt $\psi_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^2)$ für alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Wir identifzieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und $\mathrm{SO}(2)$ mit der Untergruppe der linearen Abbildungen, welche durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl von Norm gleich Eins gegeben sind. Mit anderen Worten es gibt Abbildungen $\lambda_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. so dass für $x \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = e^{i\lambda_{\alpha\beta}(x)} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_{\alpha\beta}(x) & -\sin\lambda_{\alpha\beta}(x) \\ \sin\lambda_{\alpha\beta}(x) & \cos\lambda_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} . \tag{47}$$

Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn E das Normalenbündel einer Einbettung $M \subset N$ ist, (N, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist und die Vektorfelder von Definition 2.30 (ii) punktweise orthonormal bezüglich g sind.
Für $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ gilt die Kozykel-Eigenschaft $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)$ bzw.

$$\lambda_{\alpha\beta}(x) + \lambda_{\beta\gamma}(x) = \lambda_{\alpha\gamma}(x) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \,. \tag{48}$$

Sei $\sigma \in \Omega^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiert durch $\pi^*\sigma = dt$, wobei t die Koordinate auf $\mathbb{R}$ und $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ die Projektion bezeichnet. Wir definieren die Differentialform $d\lambda_{\alpha\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta)$ durch

$$d\lambda_{\alpha\beta} := \lambda_{\alpha\beta}^* \sigma \,. \tag{49}$$

Analog definieren wir $d\lambda_{\beta\gamma} \in \Omega^1(U_\beta \cap U_\gamma)$ und $d\lambda_{\alpha\gamma} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\gamma)$. Aus der Gleichung (48) erhalten wir in $\Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$

$$d\lambda_{\alpha\beta} + d\lambda_{\beta\gamma} = d\lambda_{\alpha\gamma}\,. \tag{50}$$

Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine Teilung der Eins untergeordnet zu $\{U_\alpha\}$. Wir definieren die *lokale Zusammenhangsform* $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ durch

$$A_\alpha := \sum_\gamma \rho_\gamma d\lambda_{\alpha\gamma}\,.$$

Lemma 2.45. *Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt $A_\alpha - A_\beta = d\lambda_{\alpha\beta}$.*

Beweis. Wir rechnen

$$A_\alpha - A_\beta = \sum_\gamma \rho_\gamma d\lambda_{\alpha\beta} + \sum_\gamma \rho_\gamma d\lambda_{\beta\gamma} - \sum_\gamma \rho_\gamma d\lambda_{\beta\gamma} = d\lambda_{\alpha\beta} \sum_\gamma \rho_\gamma = d\lambda_{\alpha\beta}\,,$$

wobei wir (50) verwendet haben. □

Wir definieren die *Krümmungsform* $F \in \Omega^2(M)$ durch

$$F|_{U_\alpha} := dA_\alpha\,. \tag{51}$$

Lemma 2.45 zeigt, dass F wohl-definiert ist. Offenbar ist $dF = 0$. Wir bezeichen mit $E^\times = \{v \in E \mid v \neq 0\}$ das Komplement des Nullschnitts in E und $E^\times_{U_\alpha} = E^\times \cap \pi^{-1}(U_\alpha)$. Die Abbildungen $\bar\varphi_\alpha$ vom Bündelatlas und die Polarkoordinaten $\mathbb{C} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$ liefert die Identifikation

$$E^\times_{U_\alpha} \xrightarrow{\bar\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}_{>0} \times S^1\,. \tag{52}$$

Wir schreiben r_α und θ_α für die Projektion auf $\mathbb{R}_{>0}$ bzw. $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Auf $E^\times_{U_\alpha \cap U_\beta}$ gilt

$$r_\alpha = r_\beta, \qquad \theta_\alpha = \theta_\beta + \pi^*\lambda_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,. \tag{53}$$

Analog zu (49) definieren wir die Differentialformen $d\theta_\alpha \in \Omega^1(E^\times_{U_\alpha})$ und $d\theta_\beta \in \Omega^1(E^\times_{U_\beta})$. Mit letzter Gleichung gilt in $\Omega^1(E^\times_{U_\alpha \cap U_\beta})$

$$d\theta_\alpha = d\theta_\beta + \pi^* d\lambda_{\alpha\beta}\,.$$

Wir definieren die *globale Winkelform* $\Psi \in \Omega^1(E^\times)$ durch

$$\Psi|_{E^\times_{U_\alpha}} := \frac{1}{2\pi}\left(d\theta_\alpha - \pi^* A_\alpha\right)\,.$$

Wir schliessen mit Lemma 2.45, dass Ψ wohl-definiert ist. In der Tat gilt auf $E^\times_{U_\alpha \cap U_\beta}$

$$2\pi \cdot \left(\Psi|_{E^\times_{U_\alpha}} - \Psi|_{E^\times_{U_\beta}}\right) = d\theta_\alpha - \pi^* A_\alpha - (d\theta_\beta - \pi^* A_\beta) = d\theta_\alpha - d\theta_\beta + \pi^*(A_\beta - A_\alpha) = 0\,.$$

Außerdem folgern wir aus (51), dass

$$d\Psi = -\frac{1}{2\pi} \cdot \pi^* F\,.$$

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine cut-off Funktion, sodass $\beta(x) = 1$ für $x < 1/2$ und $\beta(x) = 0$ für $x > 2/3$. Aus Gleichung (53) folgt dass die Funktion $r : E^\times \to \mathbb{R}$ gegeben auf $E^\times_{U_\alpha}$ durch r_α wohl-definiert ist. Wir definieren $\rho := \beta \circ r$ und $\eta \in \Omega^2_{cv}(E)$ durch

$$\eta = -d(\rho\Psi) = -d\rho \wedge \Psi + \frac{\rho}{2\pi} \cdot \pi^* F \,.$$

Diese Form ist am Nullschnitt definiert, da $d\rho$ am Nullschnitt verschwindet und ρ sich durch Eins fortsetzt. Für $x \in M$ berechne mit Verwendung der Identifikation (52)

$$\int_{E_x} \eta = -\int_{E_x} d\rho \wedge \Psi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\beta \int_{S^1} d\theta = -\beta \Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \,.$$

Nach Lemma 2.37 repräsentiert η die Thom-Klasse von E. Sei $s : M \to E$, $x \mapsto 0_x$ der Nullschnitt. Es gilt

$$s^*\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot s^*\pi^* F = \frac{1}{2\pi} \cdot F \,.$$

Somit wird die Eulerklasse von E durch $\frac{1}{2\pi} \cdot F$ repräsentiert, d.h.

$$e(E) = \frac{1}{2\pi}[F] \,. \tag{54}$$

Bemerkung 2.46. Die obige Disskusion ist möglich sobald für einen Bündelatlas $\{(U_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ Differentialformen $\{A_\alpha\}$ gefunden werden können, so dass die Folgerung aus Lemma 2.45 gilt, d.h. $A_\alpha - A_\beta = d\lambda_{\alpha\beta}$. Diese Beobachtung werden wir im Beweis vom Satz von Gauß-Bonnet wiederaufnehmen.

3 Topologie und Krümmung

Ein großes Teilgebiet der Differentialgeometrie ist es den Zusammenhang zwischen geometrischen Grössen, etwa der Metrik und ihren abgeleiteten Größen, wie zum Beispiel der Krümmung oder der Länge, und den topologischen Eigenschaften des zugrundeliegenden Raumes zu studieren. Eines der prominentesten Beispiele dafür ist das Theorem von Gauß-Bonnet. Aber auch in höheren Dimensionen gibt es sehr interessante Theoreme die ausgehend von Krümmungsschranken topologische Aussagen treffen. Wir werden diese in dem Kapitel behandeln.

3.1 Gauß-Bonnet

Eine *Riemannsche Fläche* (M, g) ist eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten von Dimension gleich zwei. Das Theorem von Gauß-Bonnet entstand aus der Beobachtung, dass die Innenwinkelsumme von geodätischen Dreiecken auf diesen Flächen von der Krümmung abhängt.

Theorem 3.1 (Gauß-Bonnet - geschlossener Fall)**.** *Sei (M, g) eine geschlossene Riemmansche Fäche und $K : M \to \mathbb{R}$ die skalare Krümmung. Dann gilt*

$$\int_M K\, vol^g_M = 2\pi\chi(M) \,.$$

Beweis. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas von M und $e_1^\alpha, e_2^\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ die orthonormalisierten Vektorfelder $\partial x_1^\alpha, \partial x_2^\alpha$. Wir definieren die 1-Form $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ durch

$$A_\alpha(v) = \langle e_1^\alpha, \nabla_v e_2^\alpha \rangle , \tag{55}$$

wobei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang ist. Für Punkte $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ist der Basiswechsel $\psi_{\alpha\beta}(p)$ von $(e_1^\alpha(p), e_2^\alpha(p))$ auf $(e_1^\beta(p), e_2^\beta(p))$ eine Matrix mit Werten in SO(2), da beide Basen orthonormiert und orientiert sind. Mit der Identifikation (47) gibt es Funktionen $\lambda_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ so dass

$$\begin{aligned} e_1^\alpha &= \cos\lambda_{\alpha\beta} e_1^\beta - \sin\lambda_{\alpha\beta} e_2^\beta \\ e_2^\alpha &= \sin\lambda_{\alpha\beta} e_1^\beta + \cos\lambda_{\alpha\beta} e_2^\beta . \end{aligned} \tag{56}$$

Mit Verwendung von $\langle e_i^\beta, e_j^\beta \rangle = \delta_{ij}$ und da ∇ metrisch ist gilt

$$\langle e_1^\beta, \nabla e_1^\beta \rangle = \langle e_2^\beta, \nabla e_2^\beta \rangle = 0 \quad \langle e_1^\beta, \nabla e_2^\beta \rangle = -\langle \nabla e_1^\beta, e_2^\beta \rangle . \tag{57}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle e_1^\alpha, \nabla e_2^\alpha \rangle &= \cos\lambda_{\alpha\beta} \langle e_1^\beta, \nabla(\sin\lambda_{\alpha\beta} e_1^\beta + \cos\lambda_{\alpha\beta} e_2^\beta)\rangle - \sin\lambda_{\alpha\beta} \langle e_2^\beta, \nabla(\sin\lambda_{\alpha\beta} e_1^\beta + \cos\lambda_{\alpha\beta} e_2^\beta)\rangle \\ &= \cos^2\lambda_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta} + \cos^2\lambda_{\alpha\beta} \langle e_1^\beta, \nabla e_2^\beta \rangle - \sin^2\lambda_{\alpha\beta} \langle e_2^\beta, \nabla e_1^\beta \rangle + \sin^2\lambda_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta} \\ &= d\lambda_{\alpha\beta} + \langle e_1^\beta, \nabla e_2^\beta \rangle . \end{aligned}$$

Also gilt $A_\alpha - A_\beta = d\lambda_{\alpha\beta}$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ und nach Bemerkung 2.46 ist die Differentialform $F \in \Omega^2(M)$

$$F|_{U_\alpha} := dA_\alpha ,$$

wohl-definiert und nach (54) repräsentiert $\frac{1}{2\pi}F$ die die Eulerklasse von TM. Wir berechnen F. Setze $X := e_1^\alpha$ und $Y := e_2^\alpha$. Wegen (57) ist $\nabla_X X$ und $\nabla_Y X$ punktweise proportional zu Y sowie $\nabla_X Y$ und $\nabla_Y Y$ punktweise proportional zu X. Wir schliessen daraus

$$\langle \nabla_X X, \nabla_Y Y \rangle = 0 , \qquad \langle \nabla_Y Y, \nabla_X Y \rangle = 0 .$$

Damit und mit (11) gilt

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= X\langle X, \nabla_Y Y\rangle - Y\langle X, \nabla_X Y\rangle - \langle X, \nabla_{[X,Y]} Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle + \langle X, \nabla_X \nabla_Y Y\rangle - \langle \nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle - \langle X, \nabla_Y \nabla_X Y\rangle - \langle X, \nabla_{[X,Y]} Y\rangle \\ &= \langle X, R(X,Y)Y\rangle = K \end{aligned}$$

Also gilt $F = K vol_M^g$ und das Theorem folgt aus Satz 2.42. □

Sei nun (M, g) eine Riemannsche Fläche mit Rand und ∂M trage die induzierte Orientierung. Wir definieren die *Normalenkrümmung* $\kappa_g \in \Omega^1(\partial M)$ durch

$$\kappa_g(v) := \langle \nu, \nabla_v \dot\gamma \rangle , \tag{58}$$

wobei für $v \in T_p\partial M$ die Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial M$ eine orientierungserhaltende Parametrisierung einer Umgebung von p mit $|\dot\gamma| = 1$ und ν ein Normalenfeld, so dass $(\dot\gamma, \nu)$ punktweise positiv orientiert ist. Insbesondere gilt $\kappa_g = 0$, wenn γ eine Geodäte ist.

Theorem 3.2 (Gauß-Bonnet - Fall mit glattem Rand). *Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Fläche mit Rand und $K : M \to \mathbb{R}$ die skalare Krümmung. Dann gilt*

$$\int_M K\, vol_M^g + \int_{\partial M} \kappa_g = 2\pi\chi(M)\,.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst den Spezialfall $M = \mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z| = x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreisscheibe mit beliebiger Metrik g und Standardorientierung. Eine orientierungserhaltende Parametrisierung von $\partial\mathbb{D}$ ist gegeben durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \partial\mathbb{D}$, $t \mapsto e^{it}$ (vgl. Definition 1.26). Sei $e_1^\alpha, e_2^\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ mit $U_\alpha = \mathbb{D}$ die bezüglich g orthonormalisierten Vektorfelder der Standardbasis $\partial x, \partial y$ und $e_1^\beta, e_2^\beta \in \mathfrak{X}(U_\beta)$ die bezüglich g orthonormalisierten Vektorfelder von $\dot{\gamma}, i\dot{\gamma}$ fortgesetzt auf eine Tubenumgebung U_β von $\partial\mathbb{D}$. Definiere A_α, A_β durch (55). Im Beweis von Theorem 3.1 haben wir gezeigt $dA_\alpha = K vol_{\mathbb{D}}^g$. Außerdem gilt nach Definition

$$A_\beta = \langle e_1^\beta, \nabla e_2^\beta\rangle = -\langle e_2^\beta, \nabla e_1^\beta\rangle = -\kappa_g\,.$$

Des Weiteren wurde gezeigt $A_\alpha - A_\beta = d\lambda_{\alpha\beta}$ wobei $\lambda_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ durch (56) und $d\lambda_{\alpha\beta}$ durch (49) definiert ist. Damit gilt mit Satz von Stokes

$$\int_{\mathbb{D}} K\, vol_{\mathbb{D}}^g + \int_{\partial\mathbb{D}} \kappa_g = \int_{\mathbb{D}} dA_\alpha - \int_{\partial\mathbb{D}} A_\beta = \int_{\partial\mathbb{D}} A_\alpha - A_\beta = \int_{\partial\mathbb{D}} d\lambda_{\alpha\beta} = \int_{\partial\mathbb{D}} \lambda_{\alpha\beta}^*\sigma\,.$$

Da σ geschlossen ist, ändert sich der Wert des Integrals unter Homotopie von $\lambda_{\alpha\beta}$ nicht. Sei g_0 die Standardmetrik und $g_\tau := \tau g + (1-\tau)g_0$ eine Homotopie der Metriken. Dazu sei $\lambda_{\alpha\beta}^\tau$ die bezüglich g_τ bestimmte Funktion. Diese hängt stetig von τ ab. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $g = g_0$. Dafür ist die rechte Seite gleich $2\pi = 2\pi\chi(\mathbb{D})$. Wir haben damit das Theorem für diesen Spezialfall bewiesen.
Sei nun (M,g) eine allgemeine kompakte Riemannsche Fläche mit Rand. Wegen der Kompaktheit von M ist jede Zusammenhangskomponente des Randes ∂M diffeomorph zu S^1 und es gibt darüberhinaus nur endlich viele. Sei $\varphi : \bigsqcup_{i=1}^k S^1 \to \partial M$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Wir bilden die geschlossene Fläche durch Ankleben von k Scheiben via φ

$$\widehat{M} = M \cup_{\partial M} \bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{D}\,,$$

und setzen die Metrik g beliebig auf $\widehat{M}$ fort. Mit Theorem 3.1 erhalten wir unter Berücksichtigung der Orientierungen und des bereits gezeigten Spezialfalles

$$2\pi\chi(\widehat{M}) = \int_{\widehat{M}} K vol_{\widehat{M}}^g = \int_M K vol_M^g + \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{D}} K\, vol_{\mathbb{D}}^g = \int_M K\, vol_M^g + \int_{\partial M} \kappa_g + 2\pi k\,.$$

Damit folgt der allgemeine Fall mit $\chi(\widehat{M}) = \chi(M) + k$ nach Korollar 2.12 □

Wir wollen noch den Fall von Dreiecken und allgemeiner Polygonen betrachten. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein *Polygon* $P = \varphi(P') \subset M$ ist das Bild eines linearen Polygons $P' \subset U' \subset \mathbb{R}^2$ unter einem Diffeomorphismus $\varphi : U' \to U \subset M$ wobei U und U' offene Mengen sind.

Theorem 3.3 (Gauß-Bonnet - Polygone)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und $P \subset M$ ein kompaktes Polygon mit Innenwinkeln $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Definiere*

$$\alpha_i := \pi - \beta_i \,,$$

Dann gilt

$$\int_P K\, vol_M^g + \int_{\partial P} \kappa_g + \sum_{i=1}^k \alpha_i = 2\pi \,.$$

Beweis. Sei $\gamma : [0, \ell] \to \partial P$ eine stetige Parametrisierung mit $\gamma(\ell) = \gamma(0)$ und $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_k < t_{k+1} = \ell$, so dass $\gamma_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für alle $i = 0, \ldots, k$ glatt ist. Für $\varepsilon > 0$ definiere eine glatte Kurve $\gamma_\varepsilon : [0, \ell] \to M$, so dass $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t)$ für alle t mit $\min_i |t - t_i| > \varepsilon$ und für jedes i sei

$$\delta_i := \gamma_\varepsilon|_{[t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]} : [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon] \to B_\varepsilon(p_i) \,,$$

ein Pfad mit Länge $\ell(\delta_i) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ der sich in das Polygon einschmiegt. Sei e_1^α, e_2^α die orthonormalisierte Vektorfelder $\partial x_1, \partial x_2$ und e_1^β, e_2^β die orthonormalisierten Vektorfelder $\dot{\delta}_i, i\dot{\delta}_i$. Definiere A_α, A_β mit (55). Wie im Beweis von Theorem 3.2 gilt $A_\alpha - A_\beta = d\lambda_{\alpha\beta}$ und $A_\beta = -\kappa_g$. Damit folgt

$$\int \delta_i^* \kappa_g = \int \delta_i^* d\lambda_{\alpha\beta} - \int \delta_i^* A_\alpha \to \alpha_i \,.$$

Bezeichne mit $P_\varepsilon \in M$ die Zusammenhangskomponente vom Komplement von $\operatorname{im} \gamma_\varepsilon$, so dass das Maß der symmetrischen Differenz zu P für $\varepsilon \to 0$ gegen Null konvergiert. Der Abschluss von P_ε ist eine kompakte Fläche mit Rand diffeomorph zur Kreisscheibe. Nach Theorem 3.2 gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\int_{P_\varepsilon} K\, vol_M^g + \int_{\partial P_\varepsilon} \kappa_g = 2\pi \,.$$

Nach Stetigkeit des Lebesgue-Maßes folgt dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P_\varepsilon} K\, vol_M^g = \int_P K\, vol_M^g \,.$$

Des weiteren

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial P_\varepsilon} \kappa_g = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^k \int_{t_i + \varepsilon}^{t_{i+1} - \varepsilon} \gamma^* \kappa_g + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^k \int_{t_i - \varepsilon}^{t_i + \varepsilon} \delta_i^* \kappa_g = \int_{\partial P} \kappa_g + \sum_{i=1}^k \alpha_i \,.$$

Damit folgt der Beweis. □

Bemerkung 3.4. Verbindet man die Beweis von Theorem 3.3 und 3.2 erhält man einen Beweis für das Gauß-Bonnet Theorem für kompakte Riemannsche Flächen mit Rand und Ecken.

Ein Polygon P heißt *geodätisch*, wenn der Rand eine stückweise Geodäte ist. Wir kommen nun zu der Anfangs beschriebenen Beobachtung zurück.

Korollar 3.5. *Sei $P \subset M$ ein geodätisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β und γ. Dann gilt*

$$\mathrm{IWS} := \alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_P K\, vol_M^g \,.$$

Insbesondere, wenn $K = k_0 \in \mathbb{R}$ konstant ist, dann gilt $\mathrm{IWS} = \pi + k_0 vol(P)$.

3.2 Hopf-Rinow

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein *stückweise glatter Weg* ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to M$ welche auf dem Komplement von endlich vielen Punkten glatt ist. Seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ die Punkte, sodass die Einschränkung $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ glatt ist für alle $i = 1, \dots, k-1$. Die *Länge von* γ ist definiert durch

$$\ell(\gamma) := \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\dot\gamma(t)\| \, dt \,, \qquad \|\dot\gamma(t)\| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))} \,.$$

Für zwei Punkte $p, q \in M$ bezeichne mit

$$\Omega_{p,q} := \{\gamma : [a,b] \to M \mid \gamma(a) = p \,,\; \gamma(b) = q \,, \gamma \text{ ist stückweise glatt}\} \,,$$

den Raum der stückweise glatten Wege von p nach q. Damit definieren wir die Funktion

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \,, \qquad (p,q) \mapsto \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{p,q}\} \,.$$

Satz 3.6. *Die Funktion d ist eine (topologische) Metrik, d.h. es gilt für alle $p, q \in M$*

(i) $d(p,q) \geq 0$ *mit* $d(p,q) = 0$ *genau dann wenn* $p = q$.

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$.

(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ *für alle* $r \in M$.

Beweis. Siehe [8, Theorem 13.87]. □

Eine Geodäte $\gamma : [a,b] \to M$ heißt *minimal*, wenn sie den Abstand von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ minimiert, d.h. es gilt $d(\gamma(a), \gamma(b)) = \ell(\gamma)$. Eine *Normalenumgebung von* $p \in M$ ist eine offene Umgebung U mit der Eigenschaft, dass für eine offene Umgebung um Null $\tilde U \subset T_pM$ die Exponentialfunktion $\exp_p$ ein Diffeomorphismus von $\tilde U$ nach U ist.

Lemma 3.7. *Sei U eine Normalenumbegung von p und $q \in U$, dann gibt es eine eindeutige auf bogenlänge parametrisierte minimale Geodäte von p nach q welche komplett in U verläuft.*

Der Zusatz "komplett in U" im letzten Lemma ist essentiel. Die Eindeutigkeit stimmt sonst nur für hinreichend kleine Normalenumgebungen.

Lemma 3.8. *Für alle $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass es für alle q mit $d(p,q) < \varepsilon_0$ eine eindeutige minimale auf bogenlänge parametrisierte Geodäte von p nach q gibt.*

Eine wichtige Beobachtung und Folgerung aus dem letzten Lemma ist, dass die Minima der Länge genau den minimalen Geodäten entsprechen.

Korollar 3.9. *Sei $\gamma \in \Omega_{p,q}$ mit $\ell(\gamma) = d(p,q)$, dann ist γ eine minimale Geodäte.*

Für alle $\rho > 0$ und $p \in M$ bezeichnen wir den *Ball mit Radius ρ um p*

$$B_\rho(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < \rho\} \,.$$

Das Lemma 3.8 garantiert, dass für hinreichend kleine $\rho > 0$ die Bälle tatsächlich diffeomorph zu Euklidischen Bällen sind

Lemma 3.10. *Sei $p \in M$ und ε_0 wie in Lemma 3.8. Für alle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \varepsilon_0$ bildet die Exponentialabbildung $\exp_p$ den Ball $\{v \in T_pM \mid \|v\| < \varepsilon\}$ diffeomorph auf $B_\varepsilon(p)$ ab.*

Hier fehlt was.

Beweis. Bezeichne $\tilde{B}_\varepsilon(p) := \exp_p(\{v \in T_pM \mid \|v\| < \varepsilon\})$. Wir zeigen $\tilde{B}_\varepsilon(p) \subset B_\varepsilon(p)$. Sei $q = \exp_p(v) \in \tilde{B}_\varepsilon(0)$. Die Geodäte $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ ist die radiale Geodäte und nach Lemma 3.8 minimal. Somit ist $d(p,q) = \ell(\gamma) = \|v\| < \varepsilon$ und $q \in B_\varepsilon(p)$. Wir zeigen $B_\varepsilon(p) \subset \tilde{B}_\varepsilon(p)$. Sei $q \in B_\varepsilon(p)$. Nach Lemma 3.8 gibt es eine minimale Geodäte γ von p nach q. Ohne Einschränkung ist γ auf $[0,1]$ parametrisiert, also $\exp_p v = q$ wobei $v = \dot{\gamma}(0)$. $\square$

Korollar 3.11. *Die Topologie von (M,d) als metrischer Raum stimmt mit der Topologie von M als Mannigfaltigkeit überein.*

Beweis. Nach Lemma 3.10 sind für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Bälle $B_\varepsilon(p)$ offen bezüglich der Topologie von M als Mannigfaltigkeit. Jede offene Menge beider Topologien lässt sich als unendliche Vereinigung über endliche Schnitte solcher Mengen schreiben. Also sind die Topologien gleich. $\square$

Lemma 3.12. *Sei $p \in M$ und $\rho_0 > 0$ so dass $\exp_p$ auf $\{v \in T_pM \mid \|v\| < \rho_0\}$ definiert ist. Für jedes q mit $d(p,q) < \rho_0$ gibt es eine minimale Geodäte von p nach q. Insbesondere, wenn $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist, dann gibt es eine minimale Geodäte von p zu jedem $q \in M$.*

Beweis. Mit Blick auf Lemma 3.8 nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\rho_0 > \varepsilon$. Der Raum $\partial B_\varepsilon(p) = \{x \mid d(x,p) = \varepsilon\}$ ist diffeomorph zu einer Sphäre und die Funktion $x \mapsto d(x,q)$ nimmt darauf ihr Minimum an. Sei p_ε ein solches Minimum mit $d(p,p_\varepsilon) = \varepsilon$. Daraus folgt

$$d(p,q) = d(p,p_\varepsilon) + d(p_\varepsilon,q)\,.$$

Sei $\rho := d(p,q)$ und $\gamma : [0,\rho] \to M$ die nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(\varepsilon) = p_\varepsilon$. Betrachte

$$I := \{t \in [0,\rho] \mid d(p,\gamma(t)) + d(\gamma(t),q) = d(p,q)\}\,.$$

Wir müssen zeigen, dass $\rho \in I$, denn dann $d(p,\gamma(\rho)) + d(\gamma(\rho),q) = \rho + d(\gamma(\rho),q) = d(p,q) = \rho$ und somit $d(\gamma(\rho),q) = 0$ also $\gamma(\rho) = q$. Die Menge I ist nicht leer, denn $\varepsilon \in I$. Die Menge I ist auch abgeschlossen, da d und γ stetig sind. Sei $t_+ = \sup I = \max I$ und wir nehmen per Widerspruch an, dass $t_+ < \rho$. Definiere $r := \gamma(t_+)$. Analog zu eben finden wir für ein $\varepsilon' > 0$ hinreichend klein ein r_ε mit $d(r,r_\varepsilon) = \varepsilon'$ und $d(r,q) = d(r,r_\varepsilon) + d(r_\varepsilon,q)$. Es gilt

$$d(p,q) \leq d(p,r_\varepsilon) + d(r_\varepsilon,q) \leq d(p,r) + d(r,r_\varepsilon) + d(r_\varepsilon,q) \leq d(p,r) + d(r,q) \leq d(p,q)\,.$$

Demnach muss überall Gleichheit gelten und wir folgern $d(p,r_\varepsilon) = d(p,r) + d(r,r_\varepsilon)$. Sei $\gamma' : [0,\varepsilon'] \to M$ eine minimale nach bogenlänge parametrisierte Geodäte von r nach r_ε. Die Verknüpfung von $\gamma|_{[0,t_+]}$ und γ' ist eine stückweise glatte Kurve von p nach r_ε welche den Abstand minimiert. Nach Korollar 3.9 ist dies tatsächlich eine glatte Geodäte, d.h. $\gamma|_{[0,t_+ + \varepsilon']}$ ist eine minimale nach bogenlänge parametrisierte Geodäte von p nach r_ε. Somit ist $t_+ + \varepsilon' \in I$ im Widerspruch zur Maximalität von t_+. $\square$

Definition 3.13. *Ein Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt* geodätisch vollständig*, für alle $p \in M$ die Exponentialfunktion auf ganz T_pM definiert ist.*

Theorem 3.14 (Hopf-Rinow)**.** *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es ist äquivalent* *(i)* (M,d) *ist vollständig.*

(ii) (M,g) *ist geodätisch vollständig.*

(iii) *Es gibt einen Punkt* $p \in M$*, so dass* $\exp_p$ *auf ganz* T_pM *definiert ist.*

(iv) *Jede abgeschlossene und beschränkte Menge in* M *ist kompakt.*

Beweis. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $p \in M$ beliebig und $\gamma : I \to M$ eine Geodäte wobei $0 \in I$, $\gamma(0) = p$ und $I \subset \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich von γ ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\|\dot{\gamma}\| = 1$ und per Widerspruch, dass $t_+ = \sup I < \infty$. Sei $(t_\nu) \subset I$ eine Folge die gegen das Supremum t_+ konvergiert. Insbesondere ist (t_ν) eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und ν_0 so dass $|t_\nu - t_\mu| < \varepsilon$ für alle $\nu, \mu \geq \nu_0$. Sei ohne Einschränkung $t_\nu < t_\mu$. Dann gilt

$$d(\gamma(t_\nu), \gamma(t_\mu)) \leq \ell\big(\gamma|_{[t_\nu, t_\mu]}\big) = t_\mu - t_\nu < \varepsilon\,.$$

Also ist auch die Folge $(q_\nu) := (\gamma(t_\nu))$ eine Cauchy-Folge. Nach Vorraussetzung konvergiert (q_ν) gegen ein q. Sei $\varepsilon_0 > 0$ aus Lemma 3.8 für den Punkt q und $\nu > 1$ hinreichend groß, so dass $d(q_\nu, q) < \varepsilon_0$. Nach Lemma 3.8 gibt es eine minimale Geodäte $\gamma' : [0,\rho] \to M$ von $\gamma'(0) = q_\nu$ nach $\gamma'(\rho) = q$ mit $\|\dot{\gamma}'\| = 1$. Die Geodäte $\gamma|_{[t_\nu, t_+]}$ ist auch eine minimale Geodäte mit den gleichen Eigenschaften. Nach Eindeutigkeit folgt $\gamma(t + t_\nu) = \gamma'(t)$ für alle $t \in [0,\rho]$. Die Geodäte γ' lässt sich auf $[0, \rho + \varepsilon_0]$ fortsetzen, also lässt sich γ auf $[0, t_+ + \varepsilon_0]$ fortsetzen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass t_+ das Supremum ist.
Der Schritt $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist trivial.
Wir zeigen $(iii) \Rightarrow (iv)$. Sei $K \subset M$ abgeschlossen und beschränkt. Nach Lemma 3.12 gibt es für jedes $q \in K$ eine minimale Geodäte γ_q von p nach q. Ohne Einschränkung ist γ_q auf $[0,1]$ parametrisiert und mit der Definition der Exponentialfunktion $\exp_p v_q = q$ wobei $v_q := \dot{\gamma}_q(0)$. Da K beschränkt ist, gibt es eine Konstante $\rho > 0$, so dass $|v_q| = d(p,q) < \rho$ für alle $q \in K$. Mit anderen Worten

$$K \subset \exp_p\{v \in T_pM \mid \|v\| < \rho\}\,.$$

Die Menge $\{v \in T_pM \mid \|v\| < \rho\}$ ist kompakt und das Bild unter $\exp_p$ auch kompakt, da Bilder von kompakten Menge unter stetigen Abbildungen kompakt sind. Schliesslich ist K als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums auch kompakt.
Wir zeigen $(iv) \Rightarrow (i)$. Sei $(q_\nu) \subset M$ eine Cauchy-Folge. Die Menge $\{q_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt. Nach Vorraussetzung ist ihr Abschluss kompakt und somit hat (q_ν) eine konvergente Teilfolge. Da (q_ν) eine Cauchy-Folge ist, konvergiert (q_ν) gegen den Grenzwert der Teilfolge. □

Bemerkung 3.15. Der Satz von Hopf-Rinow gilt nicht für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

3.3 Jakobi-Felder

Sei jetzt wieder (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jakobi-Felder resultieren auf natürliche Weise aus einem Variationsprinzip des Längen oder Energiefunktionals. Gegeben eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$. Eine *Variation* von γ ist eine Abbildung

$$u : (\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M\,, \qquad u(0,\cdot) = \gamma\,.$$

Wenn zusätzlich gilt $u(s,a) = \gamma(a)$ und $u(s,b) = \gamma(b)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ so nennt man u eine *Variation mit festen Endpunkten.* Wir schreiben auch $\gamma_s := u(s,\cdot)$ für ein $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Für die Variation u definieren wir das pull-back Bündel und pull-back Schnitte $u^*X \in \Gamma(u^*TM)$ durch

$$u^*TM := \bigsqcup_{(s,t)} T_{u(s,t)}M\,, \qquad (u^*X)(s,t) = X(u(s,t))\,,$$

für $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dies ist ein Vektorbündel über $D := (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$ und trägt auf natürliche Weise einen Zusammenhang $\nabla = u^*\nabla$ definiert durch

$$\nabla_Y u^*X = u^*(\nabla_{duY} X)\,,$$

für alle $Y \in \mathfrak{X}(D)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Nicht jeder Schnitt in u^*TM ist der Form u^*X aber lässt sich als Linearkombination über dem Ring $C^\infty(D)$ von solchen schreiben. Wir erweitern die Definition von ∇ für Schnitte in u^*TM welche nicht vom Typ u^*X sind durch die Produktregel. Diese Definition erweitert die kovariante Ableitung $\frac{\nabla}{dt} = (\gamma^*\nabla)_{\partial t}$. Für den glatten Weg $\gamma : [a,b] \to M$ definieren wir das *Energie-Funktional*

$$E(\gamma) := \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot\gamma\|^2\, dt\,.$$

Lemma 3.16. *Sei $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation von $\gamma : [a,b] \to M$, dann sind die Funktionen $s \mapsto \ell(\gamma_s)$ und $s \mapsto E(\gamma_s)$ differentierbar und es gilt mit $\xi := \partial_s u(s,\cdot)$*

$$\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial_t\langle \xi,\dot\gamma\rangle - \langle \xi, \nabla_t\dot\gamma\rangle}{\|\dot\gamma\|}\, dt\,, \qquad \frac{d}{ds}E(\gamma_s)\Big|_{s=0} = \langle \xi,\dot\gamma\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \langle \xi, \nabla_t\dot\gamma\rangle\, dt\,.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E(\gamma_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \langle \nabla_s\partial_t u, \partial_t u\rangle\, dt\Big|_{s=0}\\
&= \int_a^b \langle \nabla_t\partial_s u, \partial_t u\rangle\, dt\Big|_{s=0}\\
&= \int_a^b \partial_t\langle \partial_s u, \partial_t u\rangle - \langle \partial_s u, \nabla_t\partial_t u\rangle\, dt\Big|_{s=0}\\
&= \langle \xi,\dot\gamma\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \langle \xi, \nabla_t\partial_t u\rangle\, dt
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\ell(\gamma_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \|\partial_t u\|^{-1}\langle \nabla_s\partial_t u, \partial_t u\rangle\, dt\Big|_{s=0}\\
&= \int_a^b \|\partial_t u\|^{-1}\langle \nabla_t\partial_s u, \partial_t u\rangle\, dt\Big|_{s=0}\\
&= \int_a^b \|\partial_t u\|^{-1}\left(\partial_t\langle \partial_s u, \partial_t u\rangle - \langle \partial_s u, \nabla_t\partial_t u\rangle\right) dt\Big|_{s=0}\\
&= \int_a^b \|\partial_t u\|^{-1}\left(\partial_t\langle \xi,\dot\gamma\rangle - \langle \xi, \nabla_t\dot\gamma\rangle\right) dt\,.
\end{aligned}$$

Wobei wir verwendet haben, dass ∇ torsionsfrei ist. $\square$

Wir sehen anhand des letzten Lemmas, dass wenn die Funktion $s \mapsto E(\gamma_s)$ für alle Variationen mit festen Endpunkten bei $s = 0$ einen kritischen Punkt hat, dass dann γ eine Geodäte ist. Das selbe gilt für $s \mapsto \ell(\gamma_s)$ unter der Vorraussetzung, dass $\|\dot\gamma\|$ konstant ist. Sei nun γ eine Geodäte, also ein kritischer Punkt der beiden Funktionale. Wir bestimmen die zweite Ableitung. Diese involviert den Krümmungstensor.

Lemma 3.17. *Sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodäte und $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ eine glatte Variation. Dann gilt mit $\xi := \partial_s u(s, \cdot)$*

$$\frac{d^2}{ds^2} E(\gamma_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \|\nabla_t \xi\|^2 - \langle R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma, \xi\rangle \, dt + \langle \nabla_s \xi, \dot\gamma\rangle\Big|_a^b ,$$

und mit $\xi^\perp := \xi - \frac{\langle \dot\gamma, \xi\rangle \dot\gamma}{\|\dot\gamma\|^2}$ (d.h. der orthogonalen Projektion von ξ senkrecht zu $\dot\gamma$)

$$\frac{d^2}{ds^2} \ell(\gamma_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{\|\dot\gamma\|} \int_a^b \|\nabla_t \xi^\perp\|^2 - \langle R(\xi^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, \xi^\perp\rangle \, dt + \langle \nabla_s \xi, \dot\gamma\rangle\Big|_a^b .$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} E(\gamma_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \langle \nabla_s \nabla_s \partial_t u, \partial_t u\rangle + \langle \nabla_s \partial_t u, \nabla_s \partial_t u\rangle \, dt\Big|_{s=0} \\
&= \int_a^b \langle \nabla_s \nabla_t \partial_s u, \partial_t u\rangle + \|\nabla_t \partial_s u\|^2 \, dt\Big|_{s=0} \\
&= \int_a^b \langle R(\partial_s u, \partial_t u)\partial_s u, \partial_t u\rangle + \langle \nabla_t \nabla_s \partial_s u, \partial_t u\rangle + \|\nabla_t \partial_s u\|^2 \, dt\Big|_{s=0} \\
&= \int_a^b \partial_t u\langle \nabla_s \partial_s u, \partial_t u\rangle - \langle \nabla_s \nabla_s u, \nabla_t \partial_t u\rangle - \langle R(\partial_s u, \partial_t u)\partial_t u, \partial_s u\rangle + \|\nabla_t \partial_s u\|^2 \, dt\Big|_{s=0} \\
&= \langle \nabla_s \xi, \dot\gamma\rangle\Big|_a^b + \int_a^b \|\nabla_t \xi\|^2 - \langle R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma, \xi\rangle \, dt ,
\end{aligned}$$

wobei wir $\nabla_t \dot\gamma = 0$ und Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors verwendet haben. Die Rechnung für das Längenfunktional ist ähnlich und befindet sich [6, p. 175]. $\square$

Diese Rechnung legen legen die Definition einer Hessischen für das Energiefunktional nahe.

Definition 3.18. *Sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodäte. Wir definieren die* Indexform*, als die symmetrische Bilinearform $I : \Gamma(\gamma^* TM) \otimes \Gamma(\gamma^* TM) \to \mathbb{R}$ durch*

$$I(\xi, \eta) := \int_a^b \langle \nabla_t \xi, \nabla_t \eta\rangle - \langle R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma, \eta\rangle \, dt .$$

Ein Vektorfeld ξ entlang der Geodäten γ heißt Jakobi-Feld*, wenn gilt*

$$\boxed{\nabla_t \nabla_t \xi + R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma = 0}$$

Setze $\Gamma_0(\gamma^* TM)$ als den Raum der Vektorfelder ξ entlang $\gamma : [a, b] \to M$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$.

Lemma 3.19. *Sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine Geodäte und $\xi \in \Gamma(\gamma^*TM)$. Es gilt*

$$\xi \text{ ist ein Jakobifeld} \quad \Longleftrightarrow \quad I(\xi,\eta) = 0\,, \ \forall\ \eta \in \Gamma_0(\gamma^*TM)\,.$$

Beweis. Da $\eta(a) = \eta(b) = 0$ gilt mit partieller Integration

$$I(\xi,\eta) = \int_a^b \langle \nabla_t \xi, \nabla_t \eta\rangle - \langle R(\xi,\dot\gamma)\dot\gamma, \eta\rangle \, dt = -\int_a^b \langle \nabla_t\nabla_t \xi + R(\xi,\dot\gamma)\dot\gamma, \eta\rangle \, dt\,.$$

Das Resultat folgt. □

Definition 3.20. *Sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine Geodäte. Angenommen es gibt ein Jakobifeld $\xi \in \Gamma_0(\gamma^*TM)$, also mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$, dann heißen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$* konjugiert entlang γ.

Satz 3.21. *Sei $\gamma : [0,\ell] \to M$ eine nach bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $p = \gamma(0)$ und $q = \gamma(\ell)$. Es ist äquivalent*

(i) Die Punkte $\gamma(0)$ und $\gamma(\ell)$ sind konjugiert.

(ii) Es gibt eine nicht-triviale Variation $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell] \to M$ durch Geodäten, d.h. die Kurve $\gamma_s := u(s,\cdot)$ ist eine Geodäte für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, mit den Randbedingungen $u(\cdot,a) = p$ und $\partial_s|_{s=0} u(s,\ell) = 0$.

(iii) Das Differential der Exponentialfunktion $\exp_p$ ist singulär bei $v\ell \in T_pM$ mit $v := \dot\gamma(0)$.

Beweis. Wir zeigen $(iii) \Rightarrow (ii)$. Sei $w \in T_pM$ mit $w \neq 0$ und $d_{v\ell}\exp_p(w) = 0$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug definieren wir eine Variation $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell] \to M$ durch $u(s,t) = \exp_p\big(t(v + sw)\big)$. Dies ist eine Variation durch Geodäten welche die Randbedingungen erfüllt. In der Tat $u(s,0) = \exp_p(0) = p$ für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ und

$$\partial_s u(s,\ell)|_{s=0} = d_{\ell v}\exp_p \ell w = 0\,.$$

Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (i)$. Definiere $\xi : [0,\ell] \to \gamma^*TM$ durch $\xi(t) := \partial_s|_{s=0} u(s,t)$. Da γ_s eine Geodäte ist, gilt $\nabla_t \partial_t u(s,t) = 0$ für alle $s,t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell]$ und somit

$$0 = \nabla_s\nabla_t\partial_t u = R(\partial_s u, \partial_t u) + \nabla_t\nabla_s\partial_t u = R(\partial_s u, \partial_t u)\partial_t u + \nabla_t\nabla_t\partial_s u\,.$$

Wir setzen $s = 0$ und folgern dass ξ ein Jakobifeld entlang γ ist. Da u nach Vorraussetzung nicht-trivial ist, ist auch ξ nicht trivial. Außerdem gilt $\xi(0) = \xi(\ell) = 0$. Damit sind $\gamma(0)$ und $\gamma(\ell)$ konjugiert.
Wir zeigen $(i) \Rightarrow (iii)$. Sei ξ ein nicht-triviales Jakobifeld entlang γ mit $\xi(0) = \xi(\ell) = 0$. Dazu betrachten wir wieder die Variation $u(s,t) = \exp_p(s(v + tw))$ mit $w := \nabla_t\xi(0)$. Es gilt $w \neq 0$, sonst wäre ξ trivial. Das Vektorfeld $\xi' = \partial_s|_{s=0} u(s,\cdot)$ ist ein Jakobifeld entlang γ mit $\xi'(0) = 0$ und $\nabla_t\xi'(0) = w$. Dies sind die gleichen Anfangsbedingungen wie auch für ξ und wegen Eindeutigkeit $\xi = \xi'$. Also $0 = \xi(\ell) = \xi'(\ell) = d_{v\ell}\exp_p \ell w$ damit ist $\exp_p$ singlär bei $v\ell$. □

Bemerkung 3.22. Im Beweis haben wir gesehen, dass Jakobifelder aus Variationen mit Geodäten entstehen.

Satz 3.23 (Jakobi Lemma)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gegeben eine nach bogenlänge parametrisierte Geodäte $\gamma : [0, \ell] \to M$ und $t_0 \in (0, \ell)$ so dass $\gamma(0)$ und $\gamma(t_0)$ entlang γ konjugiert ist, dann gibt es eine Variation $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \to M$, so dass für die Kurven $\gamma_s := u(s, \cdot)$ gilt*

$$\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma) \qquad \forall\ s \neq 0.$$

Insbesondere ist γ nicht minimal.

Beweis. Sei ξ ein nicht-triviales Jakobifeld entlang γ mit $\xi(0) = \xi(t_0) = 0$. Sei ausserdem ζ ein beliebiges Vektorfeld entlang γ mit

$$\zeta(0) = \zeta(\ell) = 0\,, \qquad \zeta(t_0) = -\nabla_t \xi(t_0)\,.$$

Zum Beispiel kann ein solches ζ folgendermaßen gefunden werden: Wähle eine cut-off Funktion $\beta : [0, \ell] \to [0, 1]$ mit kompaktem Träger in $(0, \ell)$ und $\beta(t) = 1$ für alle t mit $|t - t_0|$ klein genug. Sei ζ_0 ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit $\zeta_0(t_0) = -\nabla_t \xi(t_0)$. Dann ist $\zeta(t) = \beta(t)\zeta_0(t)$ ein solches Vektorfeld. Für $\varepsilon > 0$ definiere $\eta_\varepsilon : [0, \ell] \to \gamma^* TM$ durch

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi(t) + \varepsilon\zeta(t) & \text{für } t \leq t_0 \\ \varepsilon\zeta(t) & \text{für } t > t_0\,. \end{cases}$$

Dieses η_ε ist im Allgemeinen nur stetig bei t_0, d.h. die Variation $u(s, t) := \exp_{\gamma(t)} s\eta_\varepsilon(t)$ ist nur stückweise glatt in t. Wir bezeichnen mit I, I_0 und I_1 die Indexform entlang γ, $\gamma|_{[0,t_0]}$ bzw. $\gamma_{[t_0,\ell]}$. Damit gilt

$$I(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = I_0(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) + I_1(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = I_0(\xi, \xi) + 2\varepsilon I_0(\xi, \zeta) + \varepsilon^2 I_0(\zeta, \zeta) + \varepsilon^2 I_1(\zeta, \zeta)\,.$$

Da ξ ein Jakobifeld entlang und $\xi(0) = \xi(t_0) = 0$ verschwindet $I_0(\xi, \xi)$. Wir berrechnen

$$I_0(\xi, \zeta) = \int_0^{t_0} \langle \nabla_t \xi, \nabla_t \zeta \rangle - \langle R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma, \zeta \rangle \, dt = \langle \nabla_t \xi(t_0), \zeta(t_0) \rangle + \int_0^{t_0} -\langle \nabla_t \nabla_t \xi, \zeta \rangle - \langle R(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma, \zeta \rangle \, dt\,.$$

Da ξ ein Jakobifeld ist verschwindet das Integral und übrig bleibt

$$I_0(\xi, \zeta) = -\|\nabla_t \xi(t_0)\|^2\,.$$

Insgesammt haben wir

$$I(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = -2\varepsilon \|\nabla_t \xi(t_0)\|^2 + \varepsilon^2 I(\zeta, \zeta)\,.$$

Da ξ ein nicht-triviales Jakobifeld ist muss $\|\nabla_t \xi(t_0)\|^2 > 0$ und damit für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $I(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) < 0$. Wir setzen $\gamma_s = u(s, \cdot)$. Damit

$$\partial_s|_{s=0} \ell(\gamma_s) = I(\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon) < 0\,.$$

Somit hat die Funktion $s \mapsto \ell(\gamma_s)$ ein striktes Maximum bei $s = 0$. $\square$

3.4 Cartan-Hadamard

Eine *Überlagerung* ist eine surjektive glatte Abbildung $\phi : N \to M$, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ mit der folgenden Eigenschaft hat: Es gibt eine disjunkte Zerlegung

$$\phi^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in I} U_j \,,$$

und die Einschränkung $\phi|_{U_j} : U_j \to U$ ist ein Diffeomorphismus. Man kann zeigen, dass dabei die Kardinalität von I lokal konstant ist. Falls I endlich und M zusammenhängend ist, heißt die Anzahl der Elemente von I der *Grad* der Überlagerung. Wir definieren die *Decktransformationen*

$$\mathrm{Deck}(\phi) \subset \mathrm{Diff}(N) \,,$$

als die Untergruppe der Diffeomorphismen $\psi : N \to N$ so dass $\phi \circ \psi = \phi$. Seien zusätzlich (N, g) und $(M, \bar{g})$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine *semi-Riemannsche Überlagerung* ist eine Überlagerung so dass $\phi|_{U_j}$ eine Isometrie ist. Offensichtlich ist jede Überlagerung auch ein lokaler Diffeomorphismus $\phi : N \to M$, d.h. jeder Punkt $p \in N$ hat eine Umgebung U, so dass $\phi|_U : U \to \phi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Die Umkehrung stimmt nicht. Siehe dazu etwa das Beispiel $N = \mathbb{R} \sqcup (0, 1)$ und $M = \mathbb{R}$ mit $\phi(p) = p$ für $p \in \mathbb{R}$ und $p \in (0, 1)$. Dazu brauchen wir ein Kriterium.

Satz 3.24 (Liftungseigenschaft)**.** *Sei $\phi : (N, g) \to (M, \bar{g})$ eine lokale Isometrie. Angenommen für jeden Punkt $p \in N$ und jede Geodäte $\bar{\gamma} : [0, \ell] \to M$ mit $\bar{\gamma}(0) = \phi(p)$ existiert eine Geodäte $\gamma : [0, \ell] \to N$ mit $\gamma = \phi \circ \bar{\gamma}$, dann ist ϕ eine Überlagerung.*

Lemma 3.25. *Sei $\phi : (N, g) \to (M, \bar{g})$ eine surjektive lokale Isometrie. Dann ist äquivalent*

(i) (N, g) ist geodätisch vollständig.

(ii) $(M, \bar{g})$ ist geodätisch vollständig und ϕ ist eine semi-Riemannsche Überlagerung.

Sei $K : \Lambda^2 TM \to \mathbb{R}$ die *Schnittkrümmung*, definiert durch $K(v \wedge w) = g_p(R_p(v, w)w, v)$ für alle $v \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$ mit $|v| = |w| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$. Wir schreiben $K \leq 0$, wenn $K(v \wedge w) \leq 0$ für alle $v \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$.

Theorem 3.26 (Cartan-Hadamard)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$, dann ist fúr alle $p \in M$*

$$\exp_p : T_p M \to M \,,$$

eine Überlagerung. Insbesondere gilt $M \cong \mathbb{R}^n / \Gamma$ wobei Γ die Deck-transformationsgruppe ist.

Definition 3.27. *Eine* Raumform *ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung.*

Wir sehen durch das Theorem von Cartan-Hadamard, dass die Überlagerung einer Raumform mit nicht-positiver konstanter Schnittkrümmung diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

3.5 Bonnet-Meyers

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $d : M \times M \to [0,\infty)$ ihr Abstand. Die *Ricci-Krümmung* $\mathrm{Ric} \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ ist definiert für alle $v,w \in T_pM$ durch

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_i,v)w,e_i)\,,$$

wobei $e_1,\ldots,e_n \in T_pM$ eine orthonormale Basis ist. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Wir schreiben $\mathrm{Ric} \geq \lambda g$ für $R(v,v) \geq \lambda g(v,v)$ für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$.

Theorem 3.28 (Bonnet-Meyers). *Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung K und Riccikrümmung Ric. Angenommen es gibt $\lambda > 0$ so dass*

(i) $K \geq \lambda$ *oder*

(ii) $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\lambda g$

dann hat jede Geodäte von Länge $\geq \pi\lambda^{-1/2}$ konjugierte Punkte.

Lemma 3.29 (Umkehrung des Jakobi-Lemmas). *Sei $\gamma : [0,\ell] \to M$ eine Geodäte ohne konjugierte Punkte, dann gilt $I(\xi,\xi) \geq 0$ für alle Vektorfelder ξ entlang γ mit $\xi(0) = \xi(\ell) = 0$.*

Korollar 3.30. *Unter den gleichen Vorrausetzungen wie Theorem 3.28 gilt* $\mathrm{diam}(M) \leq \pi\lambda^{-1/2}$. *Insbesondere ist M kompakt.*

3.6 Cartan-Ambrose-Hicks

Seien (N,g) und $(M,\bar{g})$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Das Cartan-Ambrose-Hicks Theorem gibt ein Kriterium wann N und M (lokal) isometrisch sind. Zuerst untersuchen wir das lokale Problem. Gegeben eine lineare Isometrie $I : T_pN \to T_{\bar{p}}M$ für ein festes $p \in N$ und $\bar{p} \in M$. Seien $\exp_p, \overline{\exp}_p$ die Exponentialfunktion von $g, \bar{g}$. Für $r > 0$ klein genug ist

$$\phi : B_r(p) \to B_r(\bar{p}), \qquad q \mapsto \left(\overline{\exp}_{\bar{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}\right)(q)\,,$$

wohl-definiert und ein Diffeomorphismus. Wann ist ϕ eine Isometrie? Für eine radiale Geodäte $\gamma : [0,\ell] \to M$ mit $p = \gamma(0)$ und $q = \gamma(\ell) \in B_r(p)$ definiere $I_\gamma : T_qN \to T_{\phi(q)}M$ durch

$$I_\gamma = P_{\bar{\gamma}} \circ I \circ P_\gamma^{-1}\,,$$

wobei $\bar{\gamma} = \phi \circ \gamma$ und P_γ, $P_{\bar{\gamma}}$ der Paralleltransport entlang γ, $\bar{\gamma}$ bedeutet.

Lemma 3.31 (lokales CAH-Theorem). *Angenommen für alle $q \in B_r(p)$ und alle $u,v,w \in T_qN$ gilt*

$$I_\gamma(R(u,v)w) = \bar{R}(I_\gamma(u), I_\gamma(v))I_\gamma(w)\,,$$

wobei γ die radiale Geodäte von p nach q ist und $R, \bar{R}$ die Krümmungstensoren von g bzw. $\bar{g}$ sind, dann ist ϕ eine Isometrie und $d_p\phi = I$.

Beweis. Sei ξ ein Jakobifeld entlang γ mit $\xi(0) = 0$. Definiere $\bar\xi$ entlang $\bar\gamma$ durch

$$\bar\xi(t) = I_{\gamma|_{[0,t]}}\xi(t)\,.$$

Wir behaupten, dass $\bar\xi$ ein Jakobifeld ist. Dazu sei $\bar\eta$ ein beliebiges paralleles Vektorfeld entlang $\bar\gamma$ und definiere η entlang γ durch $\eta(t) = P_{\gamma|_{[0,t]}}(I^{-1}(\bar\eta(0)))$. Dann ist η auch parallel und es gilt $I_{\gamma|_{[0,t]}}\eta(t) = \bar\eta(t)$. Es sei $\nabla, \bar\nabla$ der Levi-Civita Zusammenhang von $g, \bar g$. Wir berechnen

$$\langle \bar\nabla_t\bar\nabla_t\bar\xi, \bar\eta\rangle = \partial_t\partial_t\langle\bar\xi,\bar\eta\rangle = \partial_t\partial_t\langle\xi,\eta\rangle = \langle\nabla_t\nabla_t\xi,\eta\rangle = -\langle R(\xi,\dot\gamma)\dot\gamma,\eta\rangle = -\langle\bar R(\bar\xi,\dot{\bar\gamma})\dot{\bar\gamma},\bar\eta\rangle\,.$$

Damit $\langle\bar\nabla_t\bar\nabla_t\xi + \bar R(\bar\xi,\dot{\bar\gamma})\dot{\bar\gamma},\bar\eta\rangle = 0$ für jedes beliebige parallele Vektorfeld $\bar\eta$ entlang $\bar\gamma$. Daraus folgt, dass $\bar\xi$ ein Jakobifeld ist. Nach Konstruktion gilt $\|\xi(t)\| = \|\bar\xi(t)\|$ für alle $t\in[0,\ell]$. Es reicht demnach zu zeigen,

$$\bar\xi(t) = d_{\gamma(t)}\phi\big(\xi(t)\big)\,.$$

Sei $w = \nabla_t\xi(0)$ und $\bar w = \bar\nabla_t\bar\xi(0)$. Analog zum letzten Schritt zeigen wir, dass $I(w) = \bar w$ und wie im Beweis von Satz 3.21

$$\xi(t) = d_{\gamma(t)}\exp_p tw\,,\qquad \bar\xi(t) = d_{\bar\gamma(t)}\overline{\exp}_{\bar p}t\bar w\,.$$

Damit

$$\bar\xi(t) = d_{\bar\gamma(t)}\overline{\exp}_{\bar p}t\bar w = d_{\bar\gamma(t)}\overline{\exp}_{\bar p}I(tw) = \Big(d_{\bar\gamma(t)}\overline{\exp}_{\bar p}\circ I\circ d_{\gamma(t)}\exp_p^{-1}\Big)(\xi(t)) = d_{\gamma(t)}\phi(\xi(t))\,,$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel verwendet haben. □

Sei nun $\gamma : [0,\ell]\to N$ eine gebrochene Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\ell > 0$ beliebig, dann erhalten wir eine gebrochene Geodänte $\bar\gamma : [0,\ell]\to N$ durch rekursives Anwenden der oben beschriebenen Konstruktion. Genauer: Seien $0 = t_1 < t_2\cdots < t_k < t_{k+1} = \ell$, so dass $\gamma_i := \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für alle $i = 1,\dots,k$ eine nach Bogenlänge parametrisierte glatte Geodäte ist. Wir nehmen außerdem ohne Einschränkung an, dass die Länge $\ell(\gamma_i) = t_{i+1}-t_i$ für alle $i = 1,\dots,k$ klein genug ist. Wir definieren die gebrochene Geodäte $\bar\gamma : [0,\ell]\to M$ durch die Verknüpfung

$$\bar\gamma = \bar\gamma_1\#\bar\gamma_2\#\dots\#\bar\gamma_k\,, \tag{59}$$

wobei die Stücke $\bar\gamma_i$ durch $\bar\gamma_i := \phi_i\circ\gamma_i$ und die Abbildungen ϕ_i wie folgt auf kleinen Umgebungen um $p_i = \gamma(t_i)$ mit $\bar p_1 := \bar p$ und $I_1 := I$ rekursiv definiert sind

$$\begin{aligned} \bar p_{i+1} &:= \bar\gamma_i(t_{i+1})\,, & I_{i+1} &:= d_{p_{i+1}}\phi_i\\ p_{i+1} &:= \gamma_i(t_{i+1})\,, & \phi_i &:= \overline{\exp}_{\bar p_i}\circ I_i\circ\exp_{p_i}^{-1}\,. \end{aligned}$$

Für eingebettete Untermannigfaltikeiten N und M in $\mathbb{R}^3$ ist die Abbildung $\gamma\mapsto\bar\gamma$ durch “Abrollen” von N an M gegeben. Wir brauchen noch einen topologischen Begriff.

Definition 3.32. *Zwei stetige Pfade $\gamma,\gamma' : [0,\ell]\to N$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(\ell) = \gamma'(\ell)$ heißen* homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0,1]\times[0,\ell]\to N$ gibt mit $H(0,\cdot) = \gamma$, $H(1,\cdot) = \gamma'$ und $H(\cdot,t) = \gamma(t)$ für $t = 0,\ell$. Die Abbildung H heißt* Homotopie zwischen γ und γ'. *Der Raum N heißt* einfach zusammenhängend*, wenn je zwei stetige Pfade $\gamma,\gamma' : [0,\ell]\to N$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(\ell) = \gamma'(\ell)$ homotop sind.*

Theorem 3.33 (CAH-Theorem)**.** *Seien (N, g) und $(M, \bar{g})$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Angenommen für alle gebrochenen Geodäten $\gamma : [0, \ell] \to N$ mit $\gamma(0) = p$ und $u, v, w \in T_{\gamma(\ell)}N$ gilt*

$$I_\gamma R(u, v)w = \bar{R}(I_\gamma u, I_\gamma v)I_\gamma w\,.$$

Seien $\gamma, \gamma' : [0, \ell] \to N$ homotope gebrochene Geodäten mit $\gamma(0) = \gamma'(0) = p$, $\gamma(\ell) = \gamma'(\ell)$ und $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}' : [0, \ell] \to M$ die dazu in (59) *konstruierten gebrochenen Geodäten. Dann gilt*

$$\bar{\gamma}(\ell) = \bar{\gamma}'(\ell)\,.$$

Sei zusätzlich (N, g) einfach zusammenhängend und vollständig, dann ist die Abbildung

$$\phi : N \to M\,, \qquad q = \gamma_q(\ell) \mapsto \bar{\gamma}_q(\ell)\,,$$

wohl-definiert und eine Riemannsche Überlagerung, wobei $\gamma_q : [0, \ell] \to N$ eine beliebige gebrochene Geodäte von p nach q ist und $\bar{\gamma}_q$ die dazu in (59) *konstruierte gebrochene Geodäte.*

Bemerkung 3.34. Der erste Teil des Theorems ist für einfach zusammenhängende N sogar eine Äquivalenz.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Hauptaussage in drei Schritten.
Schritt 1) Wir zeigen die Aussage gilt für alle γ, γ' mit Bild in $B_r(p)$, wobei $r > 0$ wie in Lemma 3.31. Wir wissen nach Lemma 3.31, dass $\phi = \overline{\exp}_{\bar{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}$ eine Isometrie ist. Damit ist $\bar{\gamma} = \phi \circ \gamma$ und $\bar{\gamma}' = \phi \circ \gamma'$. Insbesondere gilt $\bar{\gamma}(\ell) = \bar{\gamma}'(\ell)$ und außerdem gilt $I_\gamma = d_{\gamma(\ell)}\phi = I_{\gamma'}$.
Schritt 2) Wir zeigen die Aussage unter einer zusätzlichen Annahme: Angenommen es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = \ell$, so dass für alle i die Pfade $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ und $\gamma'|_{[t_i,t_{i+1}]}$ glatt sind und

$$p_{i+1}, p'_{i+1}, p'_{i+2} \in B_{r_i}(p_i)\,, \tag{60}$$

wobei $p_i = \gamma(t_i)$, $p'_i = \gamma'(t_i)$ und $r_i > 0$ die Konstante von Lemma 3.31 bezüglich p_i ist, dann gilt

$$\bar{\gamma}(\ell) = \bar{\gamma}'(\ell)\,, \qquad I_\gamma = I_{\gamma'}\,.$$

Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist Schritt 1. Sei die Aussage nun wahr für alle Paare von Geodäten welche die Zusatzbedingung mit $k \geq 1$ erfüllen und seien γ, γ' gegeben welche die zusätzliche Bedingung für $k + 1$ erfüllen. Sei τ die minimale Geodäte von p_k nach p'_{k+1}. Die stückweise gebrochenen Geodäten $\gamma_0 := \gamma|_{[0,t_k]}\#\tau$ und $\gamma'_0 := \gamma|_{[0,t_{k+1}]}$ erfüllen die zusätzliche Bedinung für k. Also nach Induktionsvorraussetzung

$$\bar{\gamma}_0(t_{k+1}) = \bar{\gamma}'_0(t_{k+1})\,, \qquad I_{\gamma_0} = I_{\gamma'_0}\,.$$

Schliesslich erfüllen die gebrochenen Geodäten $\gamma|_{[t_{k+1},\ell]}$ und $\tau^{-1}\#\gamma'|_{[t_k,\ell]}$. die Vorraussetzung von Schritt 1) und damit

$$\bar{\gamma}'(\ell) = (\bar{\tau}^{-1}\#\bar{\gamma}')(\ell) = \bar{\gamma}(\ell)\,, \qquad I_\gamma = I_{\gamma'}\,.$$

Hier fehlt was.

Damit ist dieser Schritt erbracht
Schritt 3) Wir zeigen die Aussage allgemein. $\square$

3.7 Schnittort und Injektivitätsradius

Angenommen M ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, wir groß eine Normalenumgebung um einen Punkt $p \in M$ sein kann. Gegeben $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ die Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. Definiere die Teilmenge $I_v \subset \mathbb{R}$ aller $t > 0$ so dass $\gamma|_{[0,t]}$ minimal ist.

Lemma 3.35. *Die Menge $I_v \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und zusammenhängend.*

Beweis. Wir zeigen I_v ist zusammenhängend: Sei $t \in I_v$ und $0 < t' < t$. Damit $t = d(p, \gamma(t)) \leq d(p, \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t)) = t' + (t - t')$. Damit ist $t' = d(p, \gamma(t'))$, also $t' \in I_v$.
Wir zeigen I_v ist abgeschlossen: Sei $(t_\nu) \subset I_v$ eine Folge mit $t_\nu \to t$. Wir müssen zeigen, dass $t \in I_v$. Bezeichne $q_\nu := \gamma(t_\nu)$ und $q := \gamma(t)$. Da der Abstand und γ stetig ist,

$$d(p, q) = \lim_{\nu\to\infty} d(p, q_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} t_\nu = t\,,$$

Damit ist $\gamma|_{[0,t]}$ minimierend und somit $t \in I_\nu$. □

Mit letzten Lemma gibt es zwei Möglichkeiten, entweder $I_v = [0, \ell]$ oder $I_v = [0, \infty)$. Im ersten Fall heißt $q = \gamma(\ell)$ *Minimalpunkt zu p entlang γ*; im zweiten Fall sagen wir, dass *es entlang γ keine Minimalpunkte gibt.*

Satz 3.36. *Sei $q = \gamma(\ell)$ ein Minimalpunkt entlang γ zu $p = \gamma(0)$. Dann gilt:*

(i) Der Punkt q ist der erste zu p konjugierte Punkt entlang γ oder

(ii) es gibt mindestens zwei verschiedene minimale Geodäten von p nach q.

Beweis. Sei $t_\nu \to \ell$ mit $t_\nu > \ell$. Nach Satz von Hopf-Rinow gibt es minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten $\gamma_\nu : [0, \ell_\nu] \to M$, so dass $\gamma_\nu(0) = p$ und $\gamma_\nu(\ell_\nu) = \gamma(t_\nu)$. Es gilt $\gamma_\nu(t) = \exp_p(tv_\nu)$ mit $\|v_\nu\| = 1$ für Vektoren $v_\nu \in T_pM$. Nach Einschränkung auf eine Teilfolge konvergiert (v_ν) zu w und (ℓ_ν) zu ℓ. Wenn $w \neq v$ gibt es zwei verschiedene minimale Gedoäten von p nach q, nämlich $t \mapsto \exp_p tv$ und $t \mapsto \exp_p tw$, und somit gilt Fall (ii). Sei also $v = w$ und per Widerspruch q nicht konjugiert zu p entlang γ. Nach Satz 3.21 ist das Differential von $\exp_p$ an der Stelle ℓv regulär und nach Satz vom regulären Wert gibt es eine offene Umgebung U von ℓv, so dass $\exp_p$ eingeschränkt auf U ein Diffeomorphismus auf $\exp_p(U)$ ist. Für ν hinreichend groß ist $t_\nu v \in U$ und $\ell_\nu v_\nu \in U$, und da $\exp_p(t_\nu v) = \exp_p(\ell_\nu v_\nu)$ gilt $t_\nu v = \ell_\nu v_\nu$. Da $\|v\| = \|v_\nu\| = 1$ gilt $v = v_\nu$ und wir schliessen, dass für ein $\varepsilon > 0$ die Kurve $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ minimal ist, im Widerspruch zur Maximalität von ℓ. Ausserdem ist $\gamma(t)$ für $t < \ell$ nicht konjugiert zu p, da sonst mit Satz 3.23 die Geodäte $\gamma|_{[0,\ell]}$ nicht minimal ist. □

Lemma 3.37. *Seien $\gamma, \delta : [0, \ell] \to M$ zwei verschiedene minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten mit $\gamma(0) = \delta(0)$ und $\gamma(\ell) = \delta(\ell)$, dann ist für alle $\varepsilon > 0$ jede Fortsetzung $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht minimal.*

Beweis. Angenommen $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ ist minimal. Schreibe $\gamma_1 = \gamma|_{[0,\ell]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[\ell,\ell+\varepsilon]}$. Die Länge der echt gebrochenen Geodäten $\delta\#\gamma_2$ ist $\ell(\delta\#\gamma_2) = \ell(\delta) + \ell(\gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) = \ell(\gamma) = \ell + \varepsilon$, also ist $\delta\#\gamma_2$ minimierend im Widerspruch zu Blatt 7 Aufgabe 3. □

Korollar 3.38. *Sei $q = \gamma(\ell)$ ein Minimalpunkt entlang γ zu $p = \gamma(0)$, dann ist p ein Minimalpunkt entlang $\bar\gamma$ zu q, wobei $\bar\gamma : [0, \ell] \to M$, $t \mapsto \gamma(\ell - t)$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\bar{\gamma}_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht minimal ist. Im Fall (i) sei ξ ein nicht-triviales Jakobifeld entlang γ mit $\xi(0) = \xi(\ell) = 0$, dann ist $\bar{\xi} : [0,\ell] \to TM$, $t \mapsto \xi(\ell - t)$ ein nicht-triviales Jakobifeld entlang $\bar{\gamma}$ mit $\bar{\xi}(0) = \bar{\xi}(\ell) = 0$. Damit $p = \bar{\gamma}(\ell)$ zu $q = \bar{\gamma}(0)$ entlang $\bar{\gamma}$ konjugiert und nach Satz 3.23 ist $\bar{\gamma}|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht minimal.
Im Fall (ii) sei $\delta : [0,\ell] \to M$ eine zweite minimale Geodäte von $p = \delta(0)$ nach $q = \delta(\ell)$, dann ist $\bar{\delta} : [0,\ell] \to M$, $t \mapsto \delta(\ell - t)$ eine zweite minimale Geodäte von q nach p, Nach Lemma 3.37 ist $\bar{\gamma}_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht minimal. □

Wir definieren die Funktion

$$\rho : \{v \in T_pM \mid \|v\| = 1\} \to \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}, \qquad v \mapsto \sup I_v\,.$$

Satz 3.39. *Die Funktion ρ ist stetig und von unten durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt.*

Beweis. Siehe [7, Thm. 7.3]. □

Außerdem definiere die offene Menge U_p und ihren topologischen Rand

$$\begin{aligned} U_p &:= \{tv \mid v \in T_pM\,,\ \|v\| = 1\,,\ 0 \le t < \rho(v)\} \\ \partial U_p &:= \{\rho(v)v \in T_pM \mid v \in T_pM\,,\ \|v\| = 1\}\,. \end{aligned}$$

Definition 3.40. *Der* Schnittort *ist* $\mathrm{Cut}(p) := \exp_p(\partial U_p) \subset M$*.*

Hier der zentrale Satz dieses Abschnitts.

Satz 3.41. *Sei (M,g) eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle Punkte $p \in M$ gilt*

(i) $M = \exp_p(U_p) \cup \mathrm{Cut}(p)$,

(ii) $\exp_p(U_p) \cap \mathrm{Cut}(p) = \emptyset$,

(iii) $U_p \to M \setminus \mathrm{Cut}(p)$, $v \mapsto \exp_p v$ *ist ein Diffeomorphismus,*

(iv) $\mathrm{Cut}(p)$ *ist die Menge aller Punkte q, so dass (i) oder (ii) von Satz 3.36 gilt,*

(v) $q \in \mathrm{Cut}(p)$ *genau dann wenn* $p \in \mathrm{Cut}(q)$.

Beweis. Zu (i). Sei $q \in M$ beliebig. Nach Satz von Hopf-Rinow gibt es mindestens eine minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte $\gamma : [0,\ell] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(\ell) = q$. Sei $v := \dot{\gamma}(0)$. Damit ist $\rho(v) \ge \ell$ und somit $q \in \exp_p(U_p) \cup \exp_p(\partial U_p)$.
Zu (ii). Angenommen es gibt $q \in \exp_p(U_p) \cap \exp_p(\partial U_p)$. Da $q \in \exp_p(U_p)$ gibt es eine minimale Geodäte $\gamma : [0,\ell] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(\ell) = q$, so dass $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ noch minimal ist. Da $q \in \exp_p(\partial U_p)$ gibt es eine minimale Geodäte $\delta : [0,\ell] \to M$ so dass $\delta(0) = p$ und $\delta(\ell) = p$ aber $\delta_{[0,\ell+\varepsilon]}$ ist nicht minimal. Damit ist $\delta \neq \gamma$. Aber mit Lemma 3.37 ist dann auch $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht minmal. Das ist ein Widerspruch.
Zu (iii). Wir zeigen, dass $\exp_p$ eingeschränkt auf U_p injektiv ist. Angenommen es gibt $q \in \exp_p(U_p)$ mit $q = \exp_p \ell v = \exp_p \ell w$ mit $v \neq w$, $\ell v \in U_p$ und $\|v\| = \|w\| = 1$. Sei $\gamma : [0,\ell] \to M$, $t \mapsto \exp_p tv$. Dann gibt es zwei verschiedene minimale Geodäten von p nach q und nach Lemma 3.37 ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Kurve $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht mehr minimal im Widerspruch zur Annahme, dass $\ell v \in U_p$. Wir zeigen, dass $\exp_p$ eingeschränkt auf U_p ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dafür genügt

es nach Satz 3.21 zu zeigen, dass für alle $\ell v \in U_p$ der Punkt $q = \exp_p \ell v$ nicht konjugiert zu p entlang $t \mapsto \exp_p tv$ ist. Das gilt aber, denn nach Satz von Jakobi 3.23 wäre sonst $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht mehr minimal. Wir haben also gezeigt, dass $\exp_p$ eingeschränkt auf U_p ein injektiver lokaler Diffeomorphismus ist; also ist $\exp_p|_{U_p} : U_p \to \exp_p(U_p) = M \setminus \mathrm{Cut}(p)$ ein Diffeomorphismus mit Verwendung von (i) und (ii).
Die Punkte (*iv*) und (*v*) wurden bereits in Satz 3.36 und Korollar 3.38 bewiesen. □

Bemerkung 3.42. Wir haben im Beweis gezeigt, dass $\mathrm{Cut}(p)$ die Menge aller Punkte $q \in M$ ist, so dass es eine minimale Geodäte $\gamma : [0,\ell] \to M$ von p nach q gibt, aber für alle $\varepsilon > 0$ die Geodäte $\gamma|_{[0,\ell+\varepsilon]}$ nicht mehr minimal ist.

Definition 3.43. *Der* Injektivitätsradius *ist definiert durch*

$$\begin{aligned} r_{inj}(p) &= d(p, \mathrm{Cut}(p)) = \inf\{d(p,q) \mid q \in \mathrm{Cut}(p)\} \\ &= \sup\{r \mid \exp_p \textit{ eingeschränkt auf } B_r(0) \textit{ ist ein Diffeomorphismus auf das Bild}\}, \end{aligned}$$

und $r_{inj}(M) = \inf\{r_{inj}(p) \mid p \in M\}$.

3.8 Rauch-Vergleichssatz

Die Rauch-Vergleichssätze werden gebraucht um Jakobifelder abzuschätzen. Die Idee ist, dass diese in einem Modellraum (M_0, g_0) verstanden sind und man Rückschlüsse auf Jakobifelder im Raum (M, g) trifft. Das funktioniert unter gewissen Krümmungsschranken.

Theorem 3.44. *Seien* (M_0, g_0) *und* (M, g) *Riemannsche Mannigfaltigkeiten,* $\gamma_0, \gamma : [0,\ell] \to M_0, M$ *Geodäten und* $\xi_0, \xi : [0,\ell] \to \gamma_0^* TM_0, \gamma^* TM$ *Jakobifelder so dass*

(i) $\dim M_0 \geq \dim M$*,*

(ii) $\xi_0(0), \xi(0)$ *ist proportional zu* $\dot\gamma_0(0)\dot\gamma(0)$*,*

(iii) $\|\xi_0(0)\| = \|\xi(0)\|$, $\|\nabla_t \xi_0(0)\| = \|\nabla_t \xi(0)\|$ *und* $\langle \dot\gamma_0(0), \nabla_t \xi_0(0)\rangle = \langle \dot\gamma, \nabla_t \xi(0)\rangle$*,*

(iv) $K_0(\dot\gamma_0 \wedge w_0) \geq K(\dot\gamma \wedge w)$ *für alle* $w_0 \in T_{\gamma_0} M_0$ *und* $w \in T_\gamma M$*,*

(v) $\gamma_0(0)$ *und* $\gamma_0(t)$ *ist nicht konjugiert für alle* $t \in [0,\ell)$

dann gilt

$$\|\xi(t)\| \geq \|\xi_0(t)\|, .$$

Hier fehlt was.

3.9 Sphärentheorem

Wir haben bereits gesehen, dass eine einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter positiver Schnittkrümmung isometrisch zur Sphäre ist. Wir behandeln hier den Fall, wenn die Schnittkrümmung nicht mehr konstant sondern beschränkt ist. Das Sphärentheorem besagt, wenn die obere von der unteren Schranke nicht zu sehr abweicht die Mannigfaltigkeit homöomorph zur Sphäre ist. In diesem Abschnitt bezeichnet (M, g) stets eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und K ihre Schnittkrümmung.

Satz 3.45. *Sei $p \in M$ und $q \in \mathrm{Cut}(p)$, so dass $d(p,q) = \mathrm{inj}(p) = d(p, \mathrm{Cut}(p))$ und γ eine mininmale Geodäte von $p = \gamma(0)$ nach $q = \gamma(\ell)$. Dann gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:*

(i) Der Punkt q ist konjugiert zu p entlang γ oder

(ii) es gibt genau zwei verschiedene minimale Geodäten γ, σ von $p = \gamma(0) = \sigma(0)$ nach $q = \gamma(\ell) = \sigma(\ell)$. Außerdem gilt $\dot\gamma(\ell) = -\dot\sigma(\ell)$.

Beweis. Nach Satz 3.36 reicht es folgenden Fall zu betrachten: Der Punkt p ist nicht zu q konjugiert und es gibt zwei minimale Geodäten γ und σ von $p = \gamma(0) = \sigma(0)$ nach $q = \gamma(\ell) = \sigma(\ell)$. Per Widerspruch nehmen wir an $\dot\gamma(\ell) \neq -\dot\sigma(\ell)$. Damit gibt es $v \in T_qM$, so dass

$$\langle v, \dot\gamma(\ell)\rangle < 0 \qquad \langle v, \dot\sigma(\ell)\rangle < 0\,.$$

Da q nicht zu p konjugiert ist gibt es eine offene Umgebung $U \subset T_pM$ um $\ell\dot\gamma(0)$, so dass $\exp_p$ eingeschränkt auf U ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Für alle $s \in \mathbb{R}$ klein genug definiere

$$\xi(s) := \left(\exp_p|_U\right)^{-1}\left(\exp_q(sv)\right) \in T_pM, , \qquad \gamma_s(t) := \exp_p\left(\frac{t}{\ell}\,\xi(s)\right)\,.$$

Für jedes s ist $t \mapsto \gamma_s(t)$ eine Geodäte von $p = \gamma_s(0)$ nach $\gamma_s(\ell) = q_s := \exp_q(sv)$ und es gilt

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\gamma_s) = \langle v, \dot\gamma(\ell)\rangle < 0\,.$$

und somit $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma) = \mathrm{inj}(p)$ für alle hinreichend kleine $s \neq 0$. Analog gibt es eine offene Umgebung $V \subset T_pM$ von $\ell\dot\sigma(0)$, so dass für alle s klein genug

$$\sigma_s(t) := \exp_p\left(\frac{t}{\ell}\,\left(\exp_p|_V\right)^{-1}(q_s)\right)\,,$$

wohl-defniert ist und $\ell(\sigma_s) < \ell = \mathrm{inj}(p)$ für alle hinreichend kleine $s \neq 0$. Die Kurven σ_s und γ_s sind zwei verschiedene minimale Geodäten von p nach q_s. Nach Lemma 3.37 ist $q_s \in \mathrm{Cut}(p)$ und wir erhalten den Widerspruch

$$\mathrm{inj}(p) \leq d(p, q_s) \leq \ell(\gamma_s) < \ell(\gamma) = \mathrm{inj}(p)\,.$$

Somit muss $\dot\gamma(\ell) = -\dot\sigma(\ell)$. Wir wiederholen das Argument mit jeder weiteren minimalen Geodäten μ von $p = \mu(0)$ nach $q = \mu(\ell)$; demnach gilt $\dot\mu(\ell) = \pm\dot\gamma(\ell)$ und nach Eindeutigkeit der Lösung von Geodäten muss gelten $\mu = \gamma$ oder $\mu = \sigma$. □

Eine Geodäte $\gamma : [0, \ell] \to M$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(\ell) = \gamma(0)$ und $\dot\gamma(\ell) = \dot\gamma(0)$. Durch diese Randbedingung ist $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z} \to M$, $[t] \mapsto \gamma(t)$ eine glatte Abbildung.

Korollar 3.46 (Klingenberg)**.** *Sei (M, g) kompakt und $K \leq \kappa$ für eine Konstante $\kappa > 0$. Dann gilt*

(i) $\mathrm{inj}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ *oder*

(ii) $\mathrm{inj}(M) = \frac{1}{2}\min\{\ell(\gamma) \mid \gamma$ *ist eine geschlossene nicht-konstante Geodäte*$\}$.

Beweis. Da M kompakt ist, gibt es p, so dass $\mathrm{inj}(M) = \mathrm{inj}(p)$. Da $\mathrm{Cut}(p)$ abgeschlossen und somit auch kompakt ist, gibt es $q \in \mathrm{Cut}(p)$, so dass $\mathrm{inj}(M) = \mathrm{inj}(p) = d(p,q)$. Sei γ eine minimale Geodäte von p nach q. Wenn q zu p entlang γ konjugiert ist, dann ist nach Satz von Jakobi 3.23 und da γ minimal ist, q der erste zu p konjugierte Punkt entlang γ. Somit nach Übungsaufgabe 2 Blatt 9

$$\mathrm{inj}(M) = d(p,q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\,.$$

Betrachen wir nun den Fall, wenn q nicht zu p konjugiert ist. Nach Satz 3.45 gibt es genau zwei Geodäten γ und σ von $p = \gamma(0) = \sigma(0)$ zu $q = \gamma(\ell) = \sigma(\ell)$ mit $\dot\gamma(\ell) = -\dot\sigma(\ell)$ von Länge $\ell = d(p,q)$. Nach Satz 3.41 ist $p \in \mathrm{Cut}(q)$ und da $d(p,q) = \mathrm{inj}(M)$ ist auch $d(p,q) = \mathrm{inj}(q)$. Die Geodäten $\bar\gamma(t) := \gamma(\ell - t)$ und $\bar\sigma(t) := \sigma(\ell - t)$ sind zwei Geodäten von $q = \bar\gamma(0) = \bar\sigma(0)$ nach $p = \bar\gamma(\ell) = \bar\sigma(\ell)$. Nach Satz 3.45 gilt $\dot{\bar\gamma}(\ell) = -\dot{\bar\sigma}(\ell)$. Zusammengefasst gilt $\dot\gamma(\ell) = \dot{\bar\sigma}(0)$ und $\dot{\bar\sigma}(\ell) = \dot\gamma(0)$. Wir setzen γ fort zu einer Geodäten $\gamma : [0, 2\ell] \to M$. Nach Eindeutigkeit von Geodäten ist $\gamma(t) = \bar\sigma(t - \ell)$ für alle t und außerdem ist γ eine geschlossene Geodäte mit Länge gleich $2\ell = 2\mathrm{inj}(M)$.
Sei $\gamma' : [0, 2\ell'] \to M$ eine kürzer nicht-konstante geschlossene Geodäte mit Länge $2\ell' < 2\ell$. Die Geodäten γ' und $\bar\gamma'(t) := \gamma'(2\ell' - t)$ eingeschränkt auf $[0, \ell']$ sind zwei Geodäten zwischen den antipodalen Punkten $p' = \gamma'(0)$ und $q' = \gamma'(\ell')$ von Länge ℓ'. Demnach kann $\gamma'|_{[0,\ell'+\varepsilon]}$ für alle $\varepsilon > 0$ nicht minimal sein und wir erhalten den Widerspruch

$$\mathrm{inj}(p') \leq \ell' < \ell = \mathrm{inj}(M) \leq \mathrm{inj}(p')\,.$$

Es gilt also (ii). □

Theorem 3.47 (Klingenberg)**.** *Sei (M,g) eine vollständige einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung K, so dass*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1\,, \tag{61}$$

dann gilt $\mathrm{inj}(M) \geq \pi$*.*

Beweis. Wir zeigen den Beweis nur für den Fall, dass die Dimension $n = 2m$ von M gerade ist. Den Fall für n ungerade finden Sie in zum Beispiel in [1, pp. 276].
Nach Theorem von Bonnet-Meyers ist M kompakt. Wir nehmen per Widerspruch an, dass $\mathrm{inj}(M) < \pi$. Nach Korollar 3.46 gibt es eine nicht-konstante geschlossene Geodäte $\gamma : \mathbb{R}/2\ell\mathbb{Z} \to M$ von Länge 2ℓ mit $\ell = \mathrm{inj}(M) < \pi$. Sei $P_\gamma : T_pM \to T_pM$ der Paralleltransport entlang γ mit $p = \gamma(0)$. Da M einfach zusammenhängend und somit orientierbar ist, gilt $\det P_\gamma = 1$ nach Übungsaufgabe 4 von Blatt 9. Wir wissen, dass P_γ eine orthogonale lineare Abbildung ist und außerdem $P_\gamma(\dot\gamma(0)) = \dot\gamma(0)$ da γ eine Geodäte und somit per Definition das Vektorfeld $\dot\gamma$ parallel entlang γ ist. Sei $E \subset T_pM$ der orthogonale Raum zu $\dot\gamma(0)$. Der Raum E hat dimension $2m-1$ und somit hat P_γ eingeschränkt auf E einen Eigenvektor $v \in E \subset T_pM$ mit $P_\gamma v = v$, da die Einschränkung $P_\gamma|_E$ orthogonal und orientierbar ist. Das Vektorfeld X entlang γ definiert durch $X(t) := P_{\gamma|_{[0,t]}} v \in T_{\gamma(t)}M$ ist ein glattes Vektorfeld und die Variation γ_s definiert durch

$$\gamma_s(t) := \exp_{\gamma(t)} sX(t)\,,$$

ist eine glatte Variation von γ. Da die Schnittkrümmung positiv ist, gilt

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} E(\gamma_s) = -\int_0^{2\ell} \langle R(\dot\gamma, X)\dot\gamma, X\rangle\, dt < 0\,.$$

Also ist $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma)$ für alle $s \neq 0$ klein genug. Für alle s wähle $t_s \in [0, 2\ell]$, so dass

$$d(\gamma_s(0), \gamma_s(t_s)) = \sup_{t \in [0,2\ell]} d(\gamma_s(0), \gamma_s(t)) . \tag{62}$$

Setze $p_s := \gamma_s(0)$ und $q_s := \gamma_s(t_s)$. Nach Konstruktion gilt $\gamma_s(2\ell) = \gamma_s(0)$. Der Abstand von $\gamma_s(0)$ zu jedem $\gamma_s(t)$ ist als Folge dessen maximal die Hälfte der Länge von γ_s somit gilt für alle $s \neq 0$

$$d(p_s, q_s) \leq \frac{1}{2}\ell(\gamma_s) < \frac{1}{2}\ell(\gamma) = \operatorname{inj}(M) .$$

Der Abstand zwischen den Punkte q_s und p_s ist also kleiner als der Injektivitätsradius. Es gibt somit eine eindeutige nach Bogenlänge parametrisierte minimale Geodäte μ_s von $q_s = \mu_s(0)$ nach p_s. Für $s \to 0$ konvergiert p_s gegen p und q_s gegen $q = \gamma(\ell)$. Der Raum der Einheitsvektoren ist kompakt, also konvergiert eine Teilfolge von $\dot{\mu}_s(0)$ für $s \to 0$ zu einem Einheitsvektor $w \in T_qM$. Die Geodäte $\mu : [0, \ell] \to M$, $t \mapsto \exp_q tw$ ist eine minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte von q nach p. Wir behaupten

$$\langle w, \dot{\gamma}(\ell) \rangle = 0 . \tag{63}$$

Für $\tau \in \mathbb{R}$ sei $\mu_{s,\tau}$ die minimale Geodäte von $\gamma_s(t_s + \tau)$ zu p_s. Nach Definition (62) gilt für alle τ

$$\ell(\mu_{s,\tau}) \leq \ell(\mu_s) .$$

Die Funktion $\tau \mapsto \ell(\mu_{s,\tau}) = 2E(\mu_{s,\tau})$ hat somit bei $\tau = 0$ einen kritischen Punkt und damit nach der Formel für die erste Variation des Energiefunktionals

$$0 = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} E(\mu_{s,\tau}) = \langle \dot{\mu}_s(0), \dot{\gamma}_s(t_s) \rangle .$$

Nach Stetigkeit für $s \to 0$ gilt auch (63). Insbesondere ist $\bar{\mu}(t) := \mu(\ell - t)$ eine minimale Geodäte von p nach q mit $\dot{\bar{\mu}}(\ell) = w \neq \pm\dot{\gamma}(\ell)$. Das ist im Widerspruch zum Satz 3.45. □

Bemerkung 3.48. Für den Fall wenn $\dim M$ gerade ist reicht es eine untere Schranke $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < K$ zu haben. Die untere Schranke $\varepsilon = \frac{1}{4}$ wird nur für den Fall wenn $\dim M$ ungerade ist benötigt.

Theorem 3.49 (Klingenberg). *Sei (M, g) eine vollständige einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmng K, so dass*

$$\frac{1}{4} < K \leq 1 ,$$

dann ist M homöomorph zu S^n.

Der Beweis erfordert noch ein paar Lemmata. Wir definieren den *Durchmesser* von M durch $\operatorname{diam}(M) = \sup_{p,q \in M} d(p, q)$.

Lemma 3.50 (Berger). *Sei M kompakt und $p, q \in M$, so dass* $\operatorname{diam}(M) = d(p, q)$. *Für jeden Vektor $v \in T_pM$ gibt es eine minimale Geodäte γ von $p = \gamma(0)$ nach q, so dass*

$$\langle \dot{\gamma}(0), v \rangle \geq 0 .$$

Lemma 3.51. *Mit den gleichen Vorraussetzungen wie Theorem 3.49. Sei* $\delta > \frac{1}{4}$*, so dass*

$$\delta \leq K \leq 1\,, \tag{64}$$

dann gibt es Punkte $p, q \in M$ *mit* $\operatorname{diam}(M) = d(p,q)$ *und* $M = B_r(p) \cup B_r(q)$ *für alle* $r > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$*.*

Lemma 3.52. *Mit den gleichen Vorraussetzugen wie Theorem 3.49 und* p, q, δ *wie in Lemma 3.51. Für jede minimale Geodäte* γ *mit* $p = \gamma(0)$ *und* $\ell(\gamma) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ *gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt* $m = \gamma(t_0) \in M$*, so dass*

$$d(p,m) = d(q,m)\,. \tag{65}$$

Für $v \in T_pM \setminus \{0\}$ definiere die minimale Geodäte $\gamma_v : [0,\ell] \to M$, $t \mapsto \exp_p(tv)$ mit $\ell = \frac{\pi}{\|v\|}$. Es gilt $\ell(\gamma_v) = \pi > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Nach Lemma 3.52 gibt es einen Punkt $m_v = \gamma_v(t_v) \in M$ eindeutig bestimmt durch $d(m_v, p) = d(m_v, q)$. Definiere die Abbildung

$$\varphi : T_pM \setminus \{0\} \to T_pM\,, \qquad v \mapsto t_v v\,.$$

Lemma 3.53. *Die Abbildung* φ *ist stetig.*

Beweis von Theorem 3.49. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die runde Sphäre und $\bar{p}, \bar{q} \in S^n$ die Pole $(0,\ldots,0,\pm 1)$. Wir wählen eine lineare Isometrie $I : T_{\bar{p}}S^n \to T_pM$. Wir definieren $\phi : S^n \to M$ durch

$$\phi(x) = \begin{cases} p & \text{wenn } x = \bar{p} \\ \exp_p\left(\frac{2d(x,\bar{p})}{\pi}\left(\varphi \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}\right)(x)\right) & \text{wenn } 0 < \frac{2d(x,\bar{p})}{\pi} \leq 1 \\ \exp_q\left(\frac{2d(x,\bar{q})}{\pi}\left(\exp_q^{-1} \circ \exp_p \circ \varphi \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}\right)(x)\right) & \text{wenn } 0 < \frac{2d(x,\bar{q})}{\pi} \leq 1 \\ q & \text{wenn } x = \bar{q}\,. \end{cases} \tag{66}$$

□

4 Spektraltheorie

Die Spektraltheorie beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen den Eigenwerten des Laplace-Operators und seinen Verallgemeinerungen mit der Geometrie des Raumes. Als einfachstes Beispiel betrachte das Intervall $M = [0,\ell] \subset \mathbb{R}$ mit flacher Metrik für ein $\ell > 0$. Die Eigenwerte $\sigma([0,\ell])$ sind die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass es eine nicht-triviale Lösung $u : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ gibt

$$\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u\,, \qquad u|_{\partial M} = u|_{0,\ell} = 0\,.$$

Physikalisch betrachtet sind die Werte $\lambda \in \sigma([0,\ell])$ die Töne die eine Saite der Länge ℓ abgeben kann. Man berechnet für diesen Fall

$$\sigma\left([0,\ell]\right) = \left\{ \frac{(k\pi)^2}{\ell^2} \mid k = 1, 2, \ldots \right\}\,.$$

Die kleinste Zahl $\frac{\pi^2}{\ell^2}$ ist dabei der Grundton und die anderen bilden die Obertöne. Dieses Beispiel hat eine direkte Verallgemeinerung zu Gebieten mit glattem Rand $\Omega = M \subset \mathbb{R}^2$. Nun besteht das

Spektrum $\sigma(\Omega) \subset \mathbb{R}$ aus den Werte λ für die es eine nicht-triviale Lösung des *Dirichlet-Problems* gibt

$$\Delta u = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \lambda u\,, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0\,.$$

Man sieht leicht, dass zwei solche Gebiete Ω und Ω' die durch Drehung und Verschiebung ineinander überführt werden können das gleiche Spektrum haben. Dies führt zu der Frage, ob das Spektrum $\sigma(\Omega)$ das Gebiet Ω bis auf Drehung und Verschiebung eindeutig charakterisiert. Diese Frage wurde 1966 von Mark Kac in seinem Artikel *"Can you hear the shape of a drum?"* formuliert. Die Antwort darauf ist negativ. Die Mathematiker Urakawa und Büser fanden zwei isospektrale aber nicht isometrischen Gebiete. Dennoch bleibt die Frage inwiefern das Spektrum die Geometrie von Ω bestimmt. Hermann Weyl fand 1912 die asymptotische Formel für die Verteilungsfunktion $N(\lambda) := \#\{\sigma(\Omega) \cap [0,\lambda]\}$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} vol(\Omega) vol B_n\,,$$

wobei $vol(\Omega)$ und $vol(B_n)$ das Euklidische Volumen von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bzw. des Einheitsballes B_n bedeutet. Das zeigt insbesondere, dass das Volumen von Ω und die Dimension bestimmt ist. Um noch mehr Informationen über Ω zu gewinnen eignet es sich die *Theta-Funktion* zu betrachten

$$\theta_\Omega(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}\,, \qquad \sigma(\Omega) = \{0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}\,.$$

Man kann zeigen, dass diese Funktion für $t > 0$ konvergiert und für die Konstanten $a_0, a_1, \dots$ in der asymptotischen Entwicklung bei $t \downarrow 0$

$$\theta_\Omega(t^2) \sim t^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\,,$$

gilt im Fall $n = 2$

$$a_0 = vol(\Omega), \qquad a_1 = \ell(\partial\Omega), \qquad 6a_2 = \chi(\Omega) - 1\,.$$

Diese überraschenden Erkenntnisse lassen die Vermutung zu, dass auch für Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) Informationen aus dem Spektrum des Laplace-Operators Δ gewonnen werden können. Dieser ist definiert durch

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ u &\mapsto -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)\,, \end{aligned}$$

Sei nun M geschlossen, d.h. kompakt und ohne Rand. Resultate aus der Funktionalanalysis zeigen, dass dann das Spektrum $\sigma(M, g)$, d.h. die Werte λ für die es eine nicht-triviale Lösung $u : M \to \mathbb{R}$ von $\Delta u = \lambda u$ gibt, eine diskrete Menge von nicht-negativen Zahlen bilden. Analog definieren wir wieder die Theta-Funktion

$$\theta_{(M,g)}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}\,, \qquad \sigma(M, g) = \{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}\,,$$

und Konstanten $a_0, a_1, \dots$ mit der asymptotische Entwicklung für $t \downarrow 0$

$$\theta_{(M,g)}(t^2) = t^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\,.$$

Man kann nun zeigen, dass zum Beispiel für $n = 2$

$$6a_1 = \int_M R vol_M^g = 2\pi\chi(M)\,.$$

Demnach ist wieder die Topologie von M durch das Spektrum bestimmt. Diese Herangehensweise, d.h. das Ermitteln von Informationen über die Geometrie des Raumen aus Kenntnissen über das Spektrum nennt man auch *inverses Spektralproblem*. Wenn umgekehrt Informationen über die Geometrie des Raumes bekannt sind und daraus Kenntnisse über das Spektrum gewonnen werden, spricht man vom *direkten Spektralproblem*. Ein Vertreter aus dieser Kategorie ist das folgende Theorem von Obata und Lichnerowicz

Theorem 4.1. *Sei (M, g) eine n-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit so dass für die Ricci-Krümmung gilt* $\mathrm{Ric} \geq cg$, *mit $c > 0$. Dann gilt für den kleinsten Spektralwert λ_1*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}c\,,$$

Falls Gleichheit gilt, dann ist (M, g) isometrisch zur runden n-Sphäre.

Nach dieser kurzen Einführung erweitern wir die Definition des Laplace-Operators auf Differentialformen und studieren damit die Geometrie von (M, g).

4.1 Kodifferential

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform und Index $p \in \{0, \dots, n\}$. Dann trägt auch $\Lambda^k V$ eine symmetrische Bilinearform definiert durch lineare Fortsetzung von

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k\rangle := \det\left(\langle v_i, w_j\rangle_{1\leq i,j\leq k}\right), \tag{67}$$

für alle $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \in \Lambda^k V$. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Wir haben in der Übung gesehen, dass die Menge der $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ über alle total geordneten Tupel $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ eine Orthonormalbasis bezüglich (67) ist. Damit folgt, dass (67) nicht-ausgeartet ist. Wir definieren den *Hodge-Operator* durch

$$* : \Lambda^k V \to \Lambda^{n-k} V\,, \qquad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mapsto \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_{n-k}} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}\,, \tag{68}$$

wobei $\varepsilon_i := \langle e_i, e_i\rangle \in \{\pm 1\}$ und $j_1, \dots, j_{n-k} \in \{1, \dots, n\}$, so dass $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}})$ eine positive Basis von V bildet.

Lemma 4.2. *Es gilt*

(i) $v \wedge w = \langle *v, w\rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ *für alle* $v \in \Lambda^k V$ *und* $w \in \Lambda^{n-k} V$,

(ii) $**\,v = (-1)^{p-k(n-k)} v$ *für alle* $v \in \Lambda^k V$,

(iii) $*(v \wedge *w) = *(w \wedge *v) = (-1)^p \langle v, w\rangle$ *für alle* $v, w \in \Lambda^k V$.

Beweis. Blatt 1 Aufgabe 4. □

Wir schließen aus Punkt (i), dass der Hodge-Operator nicht von der Wahl der Orthonormalbasis sondern nur von der Wahl der Orientierung abhängt.
Sei nun (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Metrik induziert einen Isomorphismus

$$T_pM \to T_p^*M\,, \qquad v \mapsto v^\flat := g_p(v, \cdot)\,.$$

Mit diesem Isomorphismus erhalten wir durch g_p auch eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform g_p^* auf T_p^*M. Explizit ist dieses folgendermaßen gegeben. Sei $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ eine Orthonormalbasis bezüglich g_p, dann ist für alle $\alpha, \beta \in T_p^*M$

$$g_p^*(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha(e_i)\beta(e_i)\,. \tag{69}$$

Wir schreiben auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für g_p^*, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist. Mit Satz 1.15 erhalten wir eine Orientierung von T_p^*M für alle p. Mit diesen Daten definieren wir den *Hodge-Operator* für Differentialformen mit (68) durch

$$* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M) \qquad \alpha \mapsto \big(p \mapsto *\alpha_p\big)\,, \tag{70}$$

die $(-1)^p$ hatte ich in der VL vergessen

Lemma 4.3. *Der Operator $*$ ist wohl-definiert und erfüllt $*1 = (-1)^p vol_M^g$.*

Beweis. Wir zeigen, warum $*\alpha$ ein glatter Schnitt im Bündel $\Lambda^{n-k}T^*M$ ist. Wir folgen einer Konstruktion von Blatt 3 Aufgabe 4. Für eine offene Menge $U \subset M$, seien $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ Vektorfelder, welche punktweise eine orientierte orthonormale Basis von T_pM bilden und $\sigma^1, \dots, \sigma^n \in \Omega^1(U)$ Differentialformen, welche punktweise die duale Basis dazu bilden. Die Menge $\sigma^I := \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \in \Omega^k(M)$ über alle total geordneten Tupel $I = (i_1, \dots, i_k)$ ist punktweise eine Basis von $\Lambda^k T_p^*M$, d.h. es gibt Funktionen $f_I \in C^\infty(U)$, so dass $\alpha_p = \sum_I f_I(p)\sigma_p^I$ für alle $p \in U$. Dann ist mit (68) $*\alpha_p = \pm \sum_I f_I(p)\sigma_p^{I^*}$ wobei $I^* = (j_1, \dots, j_{n-k})$ und $I = (i_1, \dots, i_k)$, so dass $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}})$ punktweise eine positive Basis bildet. Wir sehen, dass $*\alpha|_U$ ein Summe von glatten Differentialformen, also ein glatter Schnitt ist. Der Fakt $*1 = (-1)^p vol_M^g$ folgt aus Korollar 1.32 und (68). $\square$

Lemma 4.4. *Die Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : \Omega_c^k(M) \times \Omega_c^k(M) \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} := \int_M \alpha \wedge *\beta\,, \tag{71}$$

für $\alpha, \beta \in \Omega_c^k(M)$ definert eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\Omega_c^k(M)$.

Beweis. Aus $*1 = vol_M^g$ folgt mit Lemma 4.2 $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle vol_M^g$, damit ist (71) bilinear und symmetrisch. Wir zeigen, dass (71) nicht-ausgeartet ist. Sei $\alpha \in \Omega_c^k(M)$, so dass für alle $\beta \in \Omega_c^k(M)$ gilt $0 = \langle \alpha, \beta \rangle_{L^2}$. Insbesondere für jedes $f \in C^\infty(M)$ und $\beta = f\alpha$ gilt

Ich musste den Beweis etwas ändern, denn wenn M eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, so ist $\langle \alpha, \alpha \rangle$ nicht notwendigerweise nur positiv oder negativ.

$$0 = \langle \alpha, f\alpha \rangle_{L^2} = \int_M f \langle \alpha, \alpha \rangle vol_M^g\,.$$

Damit folgt $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ und da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist, auch $\alpha = 0$. $\square$

Definition 4.5. *Definiere das* Kodifferential

$$d^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)\,,$$

als den zum äußeren Differential formal adjungierten Operator, d.h. es gilt

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, d^* \beta \rangle_{L^2} \,. \tag{72}$$

für alle $\alpha \in \Omega_c^{k-1}(M)$ *und* $\beta \in \Omega_c^k(M)$.

Lemma 4.6. *Es gilt*

$$d^*\omega = (-1)^{p+n(k+1)+1} * d * \omega \,, \tag{73}$$

für alle $\omega \in \Omega^k(M)$.

Beweis. Mit Lemma 4.2 gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d(*\beta) \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{k-1+p-(n-k+1)(k-1)} \alpha \wedge **d*\beta \,. \end{aligned}$$

Das Resultat folgt nach Integration, Satz von Stokes und

$$k - 1 + p - (n-k+1)(k-1) + 1 \equiv p + n(k-1) \mod 2 \,.$$

Wobei wir verwenden $k(k-1) \equiv 0 \mod 2$. □

Insbesondere $d^*d^* = \pm * d ** d * = \pm * dd * = 0$. Wir erhalten den DeRham-Komplex

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0 \;,$$

und einen dazu formal dualen Komplex

$$0 \longleftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{d^*} \Omega^1(M) \xleftarrow{d^*} \dots \xleftarrow{d^*} \Omega^{n-1}(M) \xleftarrow{d^*} \Omega^n(M) \longleftarrow 0 \;.$$

Definition 4.7. *Wir definieren den* Hodge-Laplace Operator $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ *durch*

$$\Delta := d^* \circ d + d \circ d^* \,.$$

Lemma 4.8. *Es gilt*

(i) $\langle \Delta\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle_{L^2}$ *für alle* $\alpha, \beta \in \Omega_c^k(M)$,

(ii) $d \circ \Delta = \Delta \circ d$ *und* $d^* \circ \Delta = \Delta \circ d^*$,

(iii) $\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ *für alle* $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ *und*

(iv) $(d + d^*)^2 = \Delta$.

Beweis. Wir zeigen (i) mit (72)

$$\begin{aligned} \langle \Delta\alpha, \beta \rangle_{L^2} &= \langle d^* d\alpha, \beta \rangle_{L^2} + \langle dd^*\alpha, \beta \rangle_{L^2} \\ &= \langle d\alpha, d\beta \rangle_{L^2} + \langle d^*\alpha, d^*\beta \rangle_{L^2} \\ &= \langle \alpha, d^* d\beta \rangle_{L^2} + \langle \alpha, dd^*\beta \rangle_{L^2} \\ &= \langle \alpha, \Delta\beta \rangle_{L^2} \,. \end{aligned}$$

Wir zeigen (ii)

$$d\Delta\alpha = dd^*d\alpha + ddd^*\alpha = dd^*d\alpha = dd^*d\alpha + d^*dd\alpha = \Delta d\alpha\,.$$

Analog folgt $d^*\Delta = \Delta d^*$. Für (iii). Nach Blatt 2 Aufgabe 3, Blatt 10 Aufgabe 2 und $\operatorname{grad} f = (df)^\sharp$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f vol^g_M = \mathcal{L}_{\operatorname{grad} f} vol^g_M = (-1)^p d * df\,.$$

Mit Lemma 4.2 und 4.3 gilt $* vol^g_M = 1$. Wir wenden $*$ auf die letzte Gleichung an und erhalten da $d^*f = 0$ und mit Lemma 4.6

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = (-1)^p * d * df = -d^*df = -d^*df - dd^*f = -\Delta f.$$

Für (iv)

$$(d + d^*)^2 = dd + dd^* + d^*d + d^*d^* = dd^* + d^*d = \Delta\,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Wir wollen Δ mittels des Levi-Citiva Zusammenhangs ∇ von (M, g) ausdrücken. Dazu verallgemeinern wir die Definition von ∇ auf Differentialformen durch

$$(\nabla_X\omega)(X_1, \dots, X_k) := X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^{k} \omega(X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_k)\,, \tag{74}$$

für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Man überprüft leicht, dass die Abbildung

$$\nabla_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)\,,$$

die bekannte Produktregel erfüllt:

$$\nabla_X f\omega = X(f)\omega + \nabla_X\omega\,, \tag{75}$$

für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Ferner gelten folgende Rechenregeln

Satz 4.9. *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltikeit und ∇ der durch den Levi-Civita Zusammenhang induzierte Zusammenhang für die Differentialformen. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$*

(i) $X\langle\omega, \sigma\rangle = \langle\nabla_X\omega, \sigma\rangle + \langle\omega, \nabla_X\sigma\rangle$ *für alle* $\omega, \sigma \in \Omega^k(M)$,

(ii) $\nabla_X(\omega \wedge \sigma) = \nabla_X\omega \wedge \sigma + \omega \wedge \nabla_X\sigma$ *für alle* $\omega \in \Omega^k(M)$ *und* $\sigma \in \Omega^\ell(M)$,

(iii) $\nabla_X(Y \lrcorner\, \omega) = \nabla_X Y \lrcorner\, \omega + Y \lrcorner \nabla_X\omega$ *für alle* $\omega \in \Omega^k(M)$ *und* $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

(iv) Wenn M zusätzlich orientierbar ist, dann gilt $* \nabla_X = \nabla_X *$.

Beweis. Wir zeigen (ii). Sei zunächst $\omega \in \Omega^1(M)$, dann gilt für $X_1, \dots, X_{1+\ell} \in \mathfrak{X}(M)$

$$
\begin{aligned}
&\big(\nabla_X(\omega \wedge \sigma)\big)(X_1, \dots, X_{\ell+1}) \\
&= X\big((\omega \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{\ell+1})\big) - \sum_{j=1}^{\ell+1} (\omega \wedge \sigma)(X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_{\ell+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell+1} (-1)^{i+1} X\big(\omega(X_i)\sigma(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{\ell+1})\big) - \sum_{i=1}^{\ell+1} (-1)^{i+1} \omega(\nabla_X X_j)\sigma(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{\ell+1}) \\
&\quad - \sum_{1 \le i \ne j \le \ell+1} (-1)^{i+1} \omega(X_i)\sigma(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_{\ell+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell+1} (-1)^{i+1} \nabla_X \omega(X_i)\sigma(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{\ell+1}) + \sum_{i=1}^{\ell+1} (-1)^{i+1} \omega(X_i) \nabla_X \sigma(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{\ell+1}) \\
&= \big(\nabla_X \omega \wedge \sigma + \omega \wedge \nabla_X \sigma\big)(X_1, \dots, X_{\ell+1}) \,.
\end{aligned}
$$

Damit wurde (ii) für alle $\omega \in \Omega^1(M)$ gezeigt. Wir zeigen (ii) für $\omega \in \Omega^k(M)$ mit $k \ge 1$ durch Induktion wie im Beweis von Satz 1.13 Teil (i).
Wir zeigen (i). Sei zunächst $\omega, \sigma \in \Omega^1(M)$. Sei $U \subset M$ eine offene Menge mit $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(U)$ welche punktweise eine Orthonormalbasis bilden. Dann gilt mit (69)

$$
\begin{aligned}
X\langle \omega, \sigma \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j X(\omega(e_j))\sigma(e_j) + \varepsilon_j \omega(e_j) X(\sigma(e_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \left(\nabla_X \omega(e_j)\sigma(e_j) - \omega(\nabla_X e_j)\sigma(e_j) + \omega(e_j)\nabla_X \sigma(e_j) - \omega(e_j)\sigma(\nabla_X e_j) \right) \\
&= \langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle + \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle - \sum_{1 \le j, i \le n} \varepsilon_j \left(\varepsilon_i \langle \nabla_X e_j, e_i \rangle \omega(e_i)\sigma(e_j) + \varepsilon_i \langle \nabla_X e_j, e_i \rangle \omega(e_j)\sigma(e_i) \right) ,
\end{aligned}
$$

die letzte Summe verschwindet da $0 = X\langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle$. Wir haben also (i) für 1-Formen gezeigt. Sei nun $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$ und $\sigma = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^k$. Mit Verwendung der Produktformel zeigen wir

$$
\begin{aligned}
X\langle \omega, \sigma \rangle &= X \sum_{\pi \in \Sigma} (-1)^\pi \langle \omega^1, \sigma^{\pi(1)} \rangle \dots \langle \omega^k, \sigma^{\pi(k)} \rangle \\
&= \sum_{\pi \in \Sigma} (-1)^\pi \sum_{j=1}^{k} \langle \omega^1, \sigma^{\pi(1)} \rangle \dots \Big(\langle \nabla_X \omega^j, \sigma^{\pi(j)} \rangle + \langle \omega^j, \nabla_X \sigma^{\pi(j)} \rangle \Big) \dots \langle \omega^k, \sigma^{\pi(k)} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} \langle \omega^1 \wedge \dots \wedge \nabla_X \omega^j \wedge \dots \wedge \omega^k, \sigma \rangle + \langle \omega, \sigma^1 \wedge \dots \wedge \nabla_X \sigma^j \wedge \dots \wedge \sigma^k \rangle \\
&= \langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle + \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle \,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt (i) mit linearer Fortsetzung.
Für Teil (iii) argumentieren wir analog zu Teil (iv) im Beweis von Satz 1.13. Und zwar sind $i_Y \circ \nabla_X - \nabla_X \circ i_Y$ und $i_{\nabla_X Y}$ anti-Derivationen. Demnach genügt es die Gleichung für 1-Formen

nachzuweisen. Dafür gilt

$$\nabla_X(Y \lrcorner \omega) = X\omega(Y) = \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y) = \nabla_X Y \lrcorner \omega + Y \lrcorner \nabla_X \omega\,.$$

Wir zeigen Teil (iv). Es gilt für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^{n-k}(M)$ nach Lemma 4.2

$$\langle \omega \wedge \sigma, vol_M^g \rangle = (-1)\langle * \omega, \sigma \rangle\,.$$

Mit dieser Gleichung berechnen wir unter Ausnutzung das ∇_X metrisch ist und der Produktregel

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X * \omega - * \nabla_X \omega, \sigma \rangle &= X\langle * \omega, \sigma \rangle - \langle * \omega, \nabla_X \sigma \rangle - \langle * \nabla_X \omega, \sigma \rangle \\ &= (-1)^p \left(X\langle \omega \wedge \sigma, vol_M^g \rangle - \langle \omega \wedge \nabla_X \sigma, vol_M^g \rangle - \langle \nabla_X \omega \wedge \sigma, vol_M^g \rangle \right) \\ &= (-1)^p \langle \omega \wedge \sigma, \nabla_X vol_M^g \rangle\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite verschwindet, da

$$(\nabla_X vol_M^g)(e_1, \ldots, e_n) = -\sum_{j=1}^n vol_M^g(e_1, \ldots, \nabla_X e_j, \ldots, e_n) = -\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \langle \nabla_X e_i, e_i \rangle = 0\,,$$

denn $\langle \nabla_X e_i, e_i \rangle = \frac{1}{2} X\langle e_i, e_i \rangle = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

Satz 4.10. *Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein lokale Orthonormalbasis und $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ die dazu duale Basis, dann gilt*

(i) $d = \sum_{i=1}^n \sigma^i \wedge \nabla_{e_i}$ *und*

(ii) $d^* = -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i}$ *wobei* $\varepsilon_i := \langle e_i, e_i \rangle \in \{\pm 1\}$.

Beweis. Fixiere $p \in U$ und wähle Normalkoordinaten bei p, so dass $\partial_{x_i}(p) = e_i(p)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}$ die Menge der Funktionen bzw. Differentialformen welche bei p verschwinden und schreiben $f = g + \mathcal{O}$, wenn $f - g \in \mathcal{O}$. Da die Christoffel-Symbole bei p verschwinden gilt, für alle i, j, k

$$(\nabla_{\partial x_i} dx^j)(\partial x_k) = \partial_{x_i}(\delta_{jk}) - dx^j(\nabla_{\partial_{x_i}} \partial x_k) \in \mathcal{O}\,. \tag{76}$$

Damit gilt $\nabla_{\partial x_i} dx^j \in \mathcal{O}$. Nach Linearität genügt es (i) für Differentialformen $f dx^I$ mit $f \in C^\infty(U)$ zu zeigen. Unter Verwendung der Produktregel gilt demnach

$$\sum_{i=1}^n e_i^\flat \wedge \nabla_{e_i} f dx^I = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \nabla_{\partial_{x_i}} f dx^I + \mathcal{O} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx^i \wedge dx^I + \mathcal{O} = d\big(f dx^I\big) + \mathcal{O}\,.$$

Also stimmen linke und rechte Seite bei p überein. Da p beliebig gewählt wurde ist (i) gezeigt. Für (ii) sei $f dx^I \in \Omega^k(U)$ und $J = (j_1, \ldots, j_{n-k})$, so dass $dx^I \wedge dx^J > 0$. Mit (73) gilt

$$\begin{aligned}d^* f dx^I &= (-1)^{p+n(k+1)+1} * d * f dx^I \\ &= (-1)^{p+n(k+1)+1} \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_{n-k}} * df dx^J + \mathcal{O} \\ &= (-1)^{p+n(k+1)+1} \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_{n-k}} * \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx^i \wedge dx^J + \mathcal{O} \\ &= (-1)^{p+n(k+1)+1} (-1)^{p+(n-k)(k-1)} \sum_{j=1}^k (-1)^j \varepsilon_{i_j} \partial_{x_{i_j}} f dx^{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx^{i_j}} \cdots \wedge dx^{i_k} + \mathcal{O} \\ &= -\sum_{j=1}^k \varepsilon_{i_j} (-1)^j \varepsilon_{i_j} \partial_{x_{i_j}} f dx^{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx^{i_j}} \cdots \wedge dx^{i_k} + \mathcal{O}\,.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt mit (76)

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i} f dx^I &= -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \partial_{x_i} \lrcorner \partial_{x_i} f dx^I + \mathcal{O} \\
&= -\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{i_j} (-1)^j \partial_{x_{i_j}} f dx^{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx^{i_j}} \cdots \wedge dx^{i_k} + \mathcal{O} \,.
\end{aligned}
$$

Damit wurde auch (ii) gezeigt. □

Wir definieren die *Clifford-Multiplikation* durch

$$
\begin{aligned}
c : \Omega^1(M) \otimes \Omega^k(M) &\to \Omega^*(M) \\
\alpha \otimes \omega &\mapsto \alpha \wedge \omega - \alpha^\sharp \lrcorner \omega \,.
\end{aligned} \tag{77}
$$

Wir schreiben auch $\alpha \cdot \omega = c(\alpha, \omega)$.

Lemma 4.11. *Es gilt*

(i) $\big(\sigma \cdot \tau + \tau \cdot \sigma\big) \cdot \omega = -2\langle \sigma, \tau \rangle \omega$ *für alle* $\sigma, \tau \in \Omega^1(M)$ *und* $\omega \in \Omega^k(M)$,

(ii) $\nabla_X(\sigma \cdot \omega) = (\nabla_X \sigma) \cdot \omega + \sigma \cdot \nabla_X \omega$ *für alle* $\sigma \in \Omega^1(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ *und* $X \in \mathfrak{X}(M)$,

(iii) für $D := c \circ \nabla : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ *gilt*

- *(a)* $D = d + d^*$
- *(b)* $D^2 = \Delta$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.12. Lineare Operatoren D welche $D^2 = \Delta$ erfüllen, heißen *Dirac-Operatoren.*

4.2 Elliptische Differentialoperatoren

Bevor wir das Hodgetheorem beweisen, beschreiben wir noch einen allgemeinen formellen Rahmen, in den sich der Hodgeoperator einfügt. Sei $\mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\pi : E \to M$ ein $\mathbb{k}$-Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Wie bereits erwähnt bezeichnet

$$
\Gamma(E) := \{ s : M \to E \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_M \} \,,
$$

den $\mathbb{k}$-Vektorraum der glatten Schnitte in E. Eine $\mathbb{k}$-lineare Abbildung

$$
D : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \,,
$$

heißt *Differentialoperator* von Grad $\leq k$, wenn es eine Überdeckung von M durch Karten (U, φ) und Trivialisierungen $\phi : E_U \to U \times \mathbb{k}^\ell$ gibt, so dass mit $\phi_p := \phi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{k}^\ell = \mathbb{k}^\ell$ und

$$
\Phi : \Gamma(E_U) \to C^\infty(U, \mathbb{k}^\ell) \,, \qquad s \mapsto \big(x \mapsto \phi_x(s(x))\big) \,,
$$

die Komposition $\Phi \circ D \circ \Phi^{-1}$ ein linearer Differentialoperator auf $C^\infty(U, \Bbbk^\ell)$ ist, d.h. es gibt Koeffizienten $A_\alpha \in C^\infty(U, \Bbbk^{\ell\times\ell})$ und es gilt

$$\Phi \circ D \circ \Phi^{-1} = \sum_{|\alpha|\le k} A_\alpha \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \,, \tag{78}$$

wobei die Summe über alle Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \le k$ läuft. Wir sagen D hat Grad k, wenn D den Grad $\le k$ aber nicht $\le k-1$ hat. Sei nun D ein Differentialoperator von Grad k. Das *Hauptsymbol* von D an der Stelle $p \in M$ in Richtung $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$ ist die lineare Abbildung definiert durch

$$\sigma(D)_\xi : E_p \to E_p \qquad e \mapsto \frac{1}{k!} D(f^k s)(p) \,,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$, so dass $f(p) = 0$ und $d_p f = \xi$ sowie $s \in \Gamma(E)$, so dass $s(p) = e$. Mit Verwendung der lokalen Darstellung (78) erhalten wir

$$\phi_p \circ \sigma(D)_\xi \circ \phi_p^{-1} = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} \in \Bbbk^{\ell\times\ell} \,, \tag{79}$$

wobei $x = \varphi(p)$ und $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$.

Lemma 4.13. *Seien D und D' zwei Differentialoperatoren von Grad k, für alle $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$*

$$\sigma(D + D')_\xi = \sigma(D)_\xi + \sigma(D')_\xi \tag{80}$$

$$\sigma(D \circ D')_\xi = \sigma(D)_\xi \circ \sigma(D')_\xi \,. \tag{81}$$

Beweis. Seien $A_\alpha, A'_\alpha \in C^\infty(U, \Bbbk^{\ell\times\ell})$ definiert durch (78) bezüglich D bzw. D'. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi \circ (D + D') \circ \Phi^{-1} &= \Phi \circ D \circ \Phi^{-1} + \Phi \circ D' \circ \Phi^{-1} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} (A_\alpha + A'_\alpha) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \,. \end{aligned}$$

Mit Gleichung (79) gilt Gleichung (80). Gleichung (81) folgt analog. □

Satz 4.14. *Sei (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$*

(i) $\sigma(\nabla_X)_\xi = \xi(X) \operatorname{id}_{T_pM}$

(ii) $\sigma(d)_\xi = \xi \wedge \cdot$

(iii) $\sigma(d^*)_\xi = -\xi^\sharp \lrcorner \cdot$

(iv) $\sigma(d + d^*)_\xi = c(\xi, \cdot)$

(v) $\sigma(\Delta)_\xi = -g_p(\xi^\sharp, \xi^\sharp) \operatorname{id}_{\Lambda^k T_p^* M}$

Beweis. Blatt 11 Aufgabe 1. □

Ein Differentialoperator $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ ist

(i) *elliptisch* $\iff$ $\sigma(D)_\xi$ ist ein Isomorphismus für alle $p \in M$ und $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$ und

(ii) *von Laplace-Typ* $\iff$ $\sigma(D)_\xi = -g(\xi^\sharp, \xi^\sharp)\mathrm{id}_{E_p}$ für alle $p \in M$ und $\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$.

Sei M orientierbar mit Volumenform vol und g^E eine positiv definite Bündelmetrik auf E, d.h. ein glatter Schnitt im Bündel $E^* \otimes E^*$ welcher punktweise eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist. Wir schreiben wieder $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für g^E, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist. Bezeichne mit $\Gamma_c(E) \subset \Gamma(E)$ den Untervektorraum aller Schnitte mit kompaktem Träger. Wir definieren auf $\Gamma_c(E)$ ein positiv definite symmetrische Bilinearform durch

$$\langle s, s' \rangle_{L^2} := \int_M \langle s(p), s'(p) \rangle \, vol \, .$$

Wir bezeichnen mit $L^2(E)$ die Vervollständigung von $\Gamma_c(E)$ durch die von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ induzierten Norm. Der lineare Operator D ist nur auf der dichten Teilmenge $\Gamma_c(E)$ von $L^2(E)$ definiert. Das *Spektrum* $\mathrm{spec}(D) \subset \Bbbk$ ist das Komplement aller Zahlen $\lambda \in \Bbbk$, so dass der Operator

$$D_\lambda := D - \lambda \mathrm{id} \, ,$$

Die Definition in der VL vom Spektrum war falsch.

injektiv ist, ein dichtes Bild hat und das Inverse $D_\lambda^{-1} : \mathrm{im}\, D_\lambda \to \Gamma_c(E)$ beschränkt ist, d.h.

$$\Bbbk \setminus \mathrm{spec}(D) := \{\lambda \in \Bbbk \mid \ker D_\lambda = 0, \ \mathrm{im}\, D_\lambda \text{ dicht}, D_\lambda^{-1} \text{ beschränkt}\} \, .$$

Außerdem definieren wir die *Eigenwerte* $\mathrm{EW}(D) \subset \Bbbk$ durch

$$\Bbbk \setminus \mathrm{EW}(D) := \{\lambda \in \Bbbk \mid D_\lambda \text{ ist injektiv}\} \, .$$

Man beachte, dass diese beiden Mengen nicht übereinstimmen müssen, da für unendlich dimensionale Vektorräume injektive Abbildungen nicht notwendigerweise Isomorphismen sind. Der Operator D heißt *formal selbst-adjungiert*, wenn

$$\langle Ds, s' \rangle_{L^2} = \langle s, Ds' \rangle_{L^2} \, ,$$

für alle $s, s' \in \Gamma_c(E)$. Ferner sagen wir, *es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von D*, wenn es Folgen $(s_\nu) \subset \Gamma(E)$ und $(\lambda_\nu) \subset \mathrm{EW}(D)$ gibt, so dass $s_\nu \in \ker D_\lambda$ mit $|s_\nu| = 1$ sowie $\langle s_\nu, s_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$ und für jedes $s \in L^2(E)$ gilt

$$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle s, s_\nu \rangle_{L^2} s_\nu \, ,$$

mit Konvergenz der Summe bezüglich der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ induzierten Norm.

Eine lineare Abbildung $\varphi : \Gamma_c(E) \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $|\varphi(s)| \leq c \|s\|_{L^2}$ für alle $s \in \Gamma_c(E)$. Wir definieren den Raum der *Distributionen*

$$\mathcal{D}'(E) := \{\varphi : \Gamma_c(E) \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist stetig}\} \, .$$

Für jedes $s \in \Gamma_c(E)$, ist $\varphi_s : \Gamma_c(E) \to \mathbb{R}$, $s' \mapsto \langle s, s' \rangle_{L^2}$ eine Distribution, denn nach der Ungleichung von Cauchy-Schwartz gilt

$$|\varphi_s(s')| = |\langle s, s' \rangle| \leq \|s\| \, \|s'\| \, .$$

Eine solche Distribution heißt *glatte Distribution.* Wir definieren den *formal adjungierten Operator* $D^* : \Gamma_c(E) \to \Gamma_c(E)$ durch die Forderung

$$\langle Ds, s' \rangle_{L^2} = \langle s, D^* s' \rangle_{L^2} ,$$

In der VL habe ich den $*$ vergessen.

für alle $s, s' \in \Gamma_c(E)$ und die Fortsetzung von D auf $\mathcal{D}'(E)$

$$D : \mathcal{D}'(E) \to \mathcal{D}'(E), \qquad \varphi \mapsto \big(s \mapsto (D\varphi)(s) = \varphi(D^* s)\big) .$$

Für elliptische formal selbst-adjungierte Operatoren auf geschlossener Mannigfaltigkeiten gilt der folgende wichtige Struktursatz. Er geht auf zwei Resultate aus der Funktionalanalysis zurück; der *elliptischen Regularität* und der *Fredholmeigenschaft.* Die Regularität besagt, dass jede schwache Lösung eines elliptischen Differentialoperators automatisch eine starke Lösung ist. Die Fredholmeigenschaft besagt, dass der Operator "fast", d.h. bis auf endlich dimensionale Räume, invertiebar ist.

Theorem 4.15. *Sei M orientierbar, $E \to M$ ein Vektorbündel, $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ ein elliptischer Differentialoperator, $s_0 \in \Gamma_c(E)$ und $\varphi \in \mathcal{D}'(E)$, so dass*

$$D\varphi = \varphi_{s_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(D^* s') = \langle s_0, s' \rangle \quad \forall\ s' \in \Gamma_c(E) ,$$

dann gibt es $s \in \Gamma_c(E)$, so dass $\varphi_s = \varphi$ und somit $Ds = s_0$. Sei zusätzlich M geschlossen und D formal selbst-adjungiert, dann gilt

(i) $\operatorname{spec}(D) = \operatorname{EW}(D)$,

(ii) $\operatorname{spec}(D) \subset \mathbb{R}$ *ist diskret und unbeschränkt,*

(iii) $\ker D_\lambda$ *ist endlich dimensional für alle* $\lambda \in \operatorname{EW}(D)$,

(iv) es gibt eine orthogonale Zerlegung $\Gamma(E) = \ker D \oplus \operatorname{im} D$ *und*

(v) ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von D.

Beweis. Wir skizzieren hier nur den Beweis. Zunächst definieren wir einen geeigneten Funktionenraum. Wähle dazu einen endlichen Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ und Trivialisierungen $\phi_\alpha : E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^\ell$. Wir erhalten $\Phi_\alpha : \Gamma(E_{U_\alpha}) \to C^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}^\ell)$, $s \mapsto (x \mapsto \phi_\alpha(x)s(x))$. Schliesslich wähle eine Teilung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ untergeordnet zur Überdeckung $\{U_\alpha\}$. Für $s \in \Gamma(E)$ definiere die Norm

$$\|s\|_{k,2} := \sum_\alpha \|s_\alpha\|_{H^{k,2}(U_\alpha)} , \tag{82}$$

wobei $s_\alpha := \Phi_\alpha(\rho_\alpha s)$ und $\|\cdot\|_{H^{k,2}(U_\alpha)}$ die gewöhnliche Sobolev-Norm ist. Dann sei $H^{k,2}(E)$ die Vervollständigung von $\Gamma(E)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{k,2}$. Für die Funktionenräume gilt: Für alle $k > \ell$ ist die Einbettung $H^{k,2}(E) \subset H^{\ell,2}(E)$ kompakt, d.h. beschränkte Folgen in $H^{k,2}(E)$ haben eine konvergente Teilfolge in $H^{\ell,2}(E)$ (Rellich-Kondrachov Theorem [5, p. 272]). Die lokale Darstellung (78) liefert elliptische Differentialoperatoren von Grad k für Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ und mit der Theorie dafür erhalten wir die a priori Abschätzung

$$\|s\|_{k,2} \le c(\|Ds\|_{0,2} + \|s\|_{k-1,2}) . \tag{83}$$

Siehe dazu [2, §6.5] für den Fall wenn k gerade ist. Die gleiche Abschätzung mit möglicherweise einer anderen Konstanten gilt auch für D ersetzt mit D_λ. Wir bezeichnen mit

$$\overline{D} : H^{k,2}(E) \to L^2(E)\,,$$

die stetige Fortsetzung von D. Dies ist ein beschränkter Operator zwischen den Banachräumen $H^{k,2}(E)$ und $L^2(E)$.
Wir zeigen (iii). Das folgt aus Lemma A.1 mit der Abschätzung (83).
Wir zeigen (iv). Wegen elliptischer Regularität gilt $\ker D = \ker \overline{D} = \operatorname{im} \overline{D}^\perp$, da

$$s \in \ker D \iff \langle s, Ds'\rangle = 0 \quad \forall\, s' \in \Gamma(E) \iff s \in \operatorname{im} \overline{D}^\perp\,. \tag{84}$$

Nach Lemma A.1 ist $\operatorname{im} \overline{D}_\lambda$ abgeschlossen. Damit

$$\ker D^\perp = \operatorname{im} \overline{D}^{\perp^\perp} = \operatorname{cl}(\operatorname{im} \overline{D}) = \operatorname{im} \overline{D}\,.$$

Wir erhalten die Zerlegung $L^2(E) = \ker D \oplus \operatorname{im} \overline{D}$. Wegen elliptischer Regularität gilt $\operatorname{im} \overline{D} \cap \Gamma(E) = \operatorname{im} D$ und somit folgt (iv).
Wir zeigen (i). Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass D_λ injektiv ist. Aus Lemma A.1 ist das Bild von $\overline{D}_\lambda$ abgeschlossen. Nach (84) mit D ersetzt durch D_λ ist $\overline{D}_\lambda$ surjektiv. Somit ist das Bild von D_λ dicht. Nach dem Satz über die offene Abbildung ist die Umkehrabbildung von D_λ stetig. Damit $\operatorname{spec}(D) = \operatorname{EW}(D)$.
Wir zeigen (v) und (ii). Sei $G : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definiert durch

$$Gs = s' \iff \operatorname{pr}(s) = Ds' \text{ und } s' \in \ker D^\perp\,,$$

wobei $\operatorname{pr} : \Gamma(E) \to \operatorname{im} D = \ker D^\perp$ die Projektion in der Zerlegung aus (iv) ist. Nach Korollar 3.46 mit den Banachräumen $X = H^{k,2}(E) \cap \ker D^\perp$ und $Y = L^2(E)$ gilt mit einer Konstanten $c > 0$,

$$\|s\|_{0,2} \geq \|\operatorname{pr}(s)\|_{0,2} = \|Ds'\|_{0,2} \geq c\|s'\|_{k,2} = c\|Gs\|_{k,2}\,.$$

Damit ist die stetige Fortsetzung von G auf $\overline{G} : L^2(E) \to H^{k,2}(E)$ definiert. Verknüpft mit der kompakten Einbettung $H^{k,2}(E) \to L^2(E)$ ist $\overline{G} : L^2(E) \to L^2(E)$ ein kompakter Operator. Da $\ker D_\lambda \perp \ker D$ für $\lambda \neq 0$, gilt offensichtlich

$$0 \neq \lambda \in \operatorname{EW}(D) \iff \lambda^{-1} \in \operatorname{EW}(G)\,.$$

Die Aussage (v) und dass $\operatorname{EW}(D)$ diskret ist, folgt aus Satz A.4. Schliesslich falls $\operatorname{EW}(D)$ beschränkt ist, dann ist $\operatorname{EW}(D)$ endlich, da diskret und mit (iii) muss das Orthonormalsystem aus nur endlich vielen Eigenvektoren bestehen. Damit wäre $L^2(E)$ endlich dimensional. Das ist ein Widerspruch.

□

4.3 Harmonische Differentialformen

Sei nun (M, g) eine orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren den Raum der *harmonischen Differentialformen*

$$\mathcal{H}^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta\omega = 0\}\,. \tag{85}$$

Theorem 4.16 (Hodge)**.** *Sei (M,g) eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist für alle $k = 0, \dots, n$ der Raum $\mathcal{H}^k(M)$ endlich dimensional und es gibt orthogonale Zerlegungen*

$$\Omega^k(M) = \Delta\left(\Omega^k(M)\right) \oplus \mathcal{H}^k(M) = d\left(\Omega^{k-1}(M)\right) \oplus d^*\left(\Omega^{k+1}(M)\right) \oplus \mathcal{H}^k(M)\,. \tag{86}$$

Außerdem enthält jede DeRham-Kohomologieklasse genau einen harmonischen Repräsentanten und es gibt einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^k(M) \cong H^k(M)\,. \tag{87}$$

Beweis. Der Operator $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ erfüllt nach Lemma 4.8 und Satz 4.14 die Vorraussetzungen von Theorem 4.15. Damit ist $\mathcal{H}^k(M) = \ker\Delta$ endlich dimensional und es gibt die orthogonale Zerlegung

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \operatorname{im}\Delta\,. \tag{88}$$

Bleibt noch $\operatorname{im}\Delta = \operatorname{im}d \oplus \operatorname{im}d^*$ zu zeigen. Zunächst ist $\operatorname{im}\Delta \subset \operatorname{im}d + \operatorname{im}d^*$ nach Definition. Sei $d\alpha \in \operatorname{im}d$ und $d^*\beta \in \operatorname{im}d^*$. Dann gilt

$$\langle d\alpha, d^*\beta\rangle = \langle d^2\alpha, \beta\rangle = 0\,,$$

und somit dass $\operatorname{im}d + \operatorname{im}d^* = \operatorname{im}d \oplus \operatorname{im}d^*$ eine orthogonale Zerlegung. Sei $\alpha \in \mathcal{H}^k(M)$, dann gilt

$$0 = \langle\Delta\alpha, \alpha\rangle = \langle d^*d\alpha, \alpha\rangle + \langle dd^*\alpha, \alpha\rangle = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|\,. \tag{89}$$

Wir schliessen, dass $d\alpha = d^*\alpha = 0$. Für ein $d\beta \in \operatorname{im}d$ gilt demnach $\langle\alpha, d\beta\rangle = \langle d^*\alpha, \beta\rangle = 0$. Also steht $\operatorname{im}d$ senkrecht auf $\ker\Delta$. Analog zeigen wir, dass $\operatorname{im}d^*$ senkrecht auf $\ker\Delta$ steht. Nach der Zerlegung (88) ist $\operatorname{im}d$ und $\operatorname{im}d^*$ eine Teilmenge von $\operatorname{im}\Delta$. Das zeigt $\operatorname{im}\Delta = \operatorname{im}d \oplus \operatorname{im}d^*$ wie gewünscht.
Wir zeigen, dass in jeder DeRham-Kohomologieklasse genau ein harmonischer Repräsentant ist. Die Eindeutigkeit ist leicht. Seien $[\alpha] = [\alpha'] \in H^k(M)$ mit $\alpha, \alpha' \in \mathcal{H}^k(M)$. Dann ist

$$\alpha - \alpha' \in \operatorname{im}d \cap \mathcal{H}^k(M)\,,$$

und mit der Zerlegung (86) gilt $\alpha - \alpha' = 0$. Für die Existenz betrachten wir den Operator

$$G : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)\,, \tag{90}$$

definiert durch $G\alpha = \beta \iff \Delta\beta = \operatorname{pr}(\alpha)$ mit $\beta \in \operatorname{im}\Delta$, wobei $\operatorname{pr} : \Omega^k(M) \to \operatorname{im}\Delta$ die Projektion in der Zerlegung (86) ist. Wir behaupten, dass G mit d kommutiert. Dazu sei $\alpha \in \Omega^k(M)$. Es gilt $d\operatorname{pr}(\alpha) = d\alpha$, da $\alpha' := \alpha - \operatorname{pr}(\alpha) \in \mathcal{H}^k(M)$ und $d\alpha' = 0$ wegen (89). Zweitens gilt $d \circ \Delta = \Delta \circ d$ nach Lemma 4.8. Mit $\beta = G\alpha$ gilt

$$\Delta d\beta = d\Delta\beta = d\operatorname{pr}(\alpha) = d\alpha\,.$$

Da $d\alpha, d\beta \in \operatorname{im}\Delta$ ist $d\beta$ die eindeutige Lösung von $\Delta d\beta = d\alpha$ und somit $Gd\alpha = d\beta = dG\alpha$. Insbesondere ist $d\beta = 0$, wenn $d\alpha = 0$ und wir erhalten

$$\alpha = \operatorname{pr}(\alpha) + \alpha' = \Delta\beta + \alpha' = d^*d\beta + dd^*\beta + \alpha' = dd^*\beta + \alpha'\,.$$

Damit ist $[\alpha] = [\alpha']$ und wir haben gezeigt, dass in jeder Kohomologieklasse ein harmonischer Repräsentant ist. $\square$

Bemerkung 4.17. Der Operator G heißt auch *Green'scher Operator*.

4.4 Weitzenböck Formel

Wir wollen das Hodge-Theorem verwenden um von Krümmungsinformationen Aussagen über die Topologie zu treffen. Dafür brauchen wir die Weitzenböck Formel. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihr Levi-Civita Zusammenhang. Mit (74) definieren wir einen Zusammenhang auf den Differentialformen. Wir setzen Definition von ∇ auch auf allgemeine Tensoren fort, mit der Bedingung, dass ∇ eine Derivation für das Tensorprodukt ist. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) &\to \Gamma(T^*M^{\otimes 2} \otimes \Lambda^k T^*M)\\ \sigma \otimes \omega &\mapsto \nabla\sigma \otimes \omega + \sigma \otimes \nabla\omega\,.\end{aligned}$$

Für einen mindestens zweifach kovarianten Tensor $B \in \mathfrak{X}^{k,\ell}(M)$ definieren wir die *Spur* $\operatorname{Tr} B \in \mathfrak{X}^{k,\ell-2}(M)$ durch

$$\operatorname{Tr} B := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i B(e_i, e_i, \dots)\,,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ eine lokale Orthonormalbasis ist und $\varepsilon_i := \langle e_i, e_i\rangle \in \{\pm 1\}$.

Definition 4.18. *Der* Bochner-Laplace Operator *ist* $-\operatorname{Tr}(\nabla^2) : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.

Satz 4.19. *Für den Bochner-Laplace Operator gelten folgende Rechenregeln*

(i) $-\operatorname{Tr}\nabla^2\omega = -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}\omega)$ *für alle* $\omega \in \Omega^k(M)$,

(ii) $-\operatorname{Tr}\nabla^2(f\omega) = -f\operatorname{Tr}\nabla^2\omega - 2\nabla_{\operatorname{grad} f}\omega + (\Delta f)\omega$ *für alle* $f \in C^\infty(M)$ *und* $\omega \in \Omega^k(M)$,

Sei (M, g) *zusätzlich orientiert und*

$$\nabla^* : \Gamma_c(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \to \Gamma_c(\Lambda^k T^*M)\,,$$

der zu ∇ *formal duale Operator, dann gilt*

(a) $\nabla^*(\sigma \otimes \omega) = -\nabla_{\sigma^\sharp}\omega - \operatorname{div}(\sigma^\sharp)\omega$ *für alle* $\sigma \in \Omega^1(M)$ *und* $\omega \in \Omega^k(M)$,

(b) $-\operatorname{Tr}\nabla^2 = \nabla^* \circ \nabla$

(c) $-\operatorname{Tr}\nabla^2$ *ist formal selbst-adjungiert.*

Beweis. Zu *(i)*. Sei $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ lokale 1-Formen welche punktweise die duale Basis von $e_1, \dots, e_n$ bilden. Es gilt

$$\begin{aligned}-\operatorname{Tr}\nabla^2\omega &= -\sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}\nabla(\sigma^i \otimes \nabla_{e_i}\omega)\\ &= -\sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}\left(\nabla\sigma^i \otimes \nabla_{e_i}\omega + \sigma^i \otimes \nabla\nabla_{e_i}\omega\right)\\ &= -\sum_{j,i=1}^n \operatorname{Tr}\left(\sigma^j \otimes \nabla_{e_j}\sigma^i \otimes \nabla_{e_i}\omega + \sigma^i \otimes \sigma^j \otimes \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega\right)\\ &= -\sum_{i,j,k=1}^n \varepsilon_k\sigma^j(e_k)(\nabla_{e_j}\sigma^i)(e_k)\nabla_{e_i}\omega + \sigma^i(e_k)\sigma^j(e_k)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\omega\\ &= -\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_j(\nabla_{e_j}\sigma^i)(e_j)\nabla_{e_i}\omega - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\omega\end{aligned}$$

Mit einer Nebenrechnung

$$(\nabla_{e_j}\sigma^i)(e_j) = e_j(\sigma^i(e_j)) - \sigma^i(\nabla_{e_j}e_j) = -\varepsilon_i\langle e_i, \nabla_{e_j}e_j\rangle = -\varepsilon_i e_j\langle e_i, e_j\rangle + \varepsilon_i\langle \nabla_{e_j}e_i, e_j\rangle\,.$$

setzen wir die Rechnung fort

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Tr}\nabla^2\omega &= -\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_j\varepsilon_i\langle \nabla_{e_j}e_i, e_j\rangle\nabla_{e_i}\omega - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\omega \\
&= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}\omega - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\omega\,.
\end{aligned}$$

Zu (ii)

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Tr}\nabla^2 f\omega &= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}(f\omega) + \operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}f\omega\right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\left(e_i(e_i(f))\omega + 2e_i(f)\nabla_{e_i}\omega + f\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \operatorname{div}(e_i)e_i(f)\omega + f\operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}\omega\right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\left(\left(e_i(e_i(f)) + \operatorname{div}(e_i)e_i(f)\right)\omega + \left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}\omega\right)f + 2e_i(f)\nabla_{e_i}\omega\right) \\
&= \Delta(f)\omega - f\operatorname{Tr}\nabla^2\omega - 2\nabla_{\operatorname{grad} f}\omega\,,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\langle \operatorname{grad} f, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i(f)e_i\,.$$

Zu (a).

$$\begin{aligned}
\langle\nabla\omega, \sigma\otimes\eta\rangle_{L^2} &= \int_M \langle\nabla\omega, \sigma\otimes\eta\rangle vol_M^g \\
&= \sum_{i=1}^n \int_M \langle\sigma^i\otimes\nabla_{e_i}\omega, \sigma\otimes\eta\rangle vol_M^g \\
&= \sum_{i=1}^n \int_M \langle\sigma^i, \sigma\rangle\langle\nabla_{e_i}\omega, \eta\rangle vol_M^g \\
&= \sum_{k,i=1}^n \int_M \varepsilon_k\sigma^i(e_k)\sigma(e_k)\langle\nabla_{e_i}\omega, \eta\rangle vol_M^g \\
&= \sum_{i=1}^n \int_M \varepsilon_i\sigma(e_i)\langle\nabla_{e_i}\omega, \eta\rangle vol_M^g \\
&= \int_M \langle\nabla_{\sigma^\sharp}\omega, \eta\rangle vol_M^g \\
&= \int_M \sigma^\sharp\langle\omega, \eta\rangle - \langle\omega, \nabla_{\sigma^\sharp}\eta\rangle vol_M^g\,.
\end{aligned}$$

Mit der Nebenrechnung $\operatorname{div}(\langle\omega,\eta\rangle\sigma^\sharp) = \sigma^\sharp\langle\omega,\eta\rangle + \langle\omega,\eta\rangle\operatorname{div}(\sigma^\sharp)$ setzen wir die Rechnung mit Satz von Stokes (Aufgabe 3 Blatt 2) fort

$$\begin{aligned}
\langle\nabla\omega, \sigma\otimes\eta\rangle_{L^2} &= \int_M \operatorname{div}(\langle\omega,\eta\rangle\sigma^\sharp) - \langle\omega, \operatorname{div}(\sigma^\sharp)\eta + \nabla_{\sigma^\sharp}\eta\rangle vol_M^g \\
&= \int_M \langle\omega, -\operatorname{div}(\sigma^\#)\eta - \nabla_{\sigma^\sharp}\eta\rangle vol_M^g \\
&= \int_M \langle\omega, \nabla^*(\sigma\otimes\eta)\rangle vol_M^g\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt auch

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla\omega &= \nabla^*\sum_{i=1}^n \sigma^i\otimes\nabla_{e_i}\omega \\
&= -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \operatorname{div}(e_i)\nabla_{e_i}\omega\right) \\
&= -\operatorname{Tr}\nabla^2\omega\,,
\end{aligned}$$

und somit

$$\langle -\operatorname{Tr}\nabla^2\omega, \eta\rangle_{L^2} = \langle\nabla^*\nabla\omega,\eta\rangle_{L^2} = \langle\nabla\omega,\nabla\eta\rangle_{L^2} = \langle\omega,\nabla^*\nabla\eta\rangle_{L^2} = \langle\omega, -\operatorname{Tr}\nabla^2\eta\rangle_{L^2}\,.$$

□

Die Weitzenböck-Formel gibt einen Ausdruck für die Differenz zwischen dem Hodge-Laplace und dem Bochner-Laplace Operator. Dafür benötigen wir den verallgemeinerte Krümmungstensor für Differentialformen definiert durch

$$R(X,Y)\omega = \nabla_X\nabla_Y\omega - \nabla_Y\nabla_X\omega - \nabla_{[X,Y]}\omega\,, \tag{91}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$.

Theorem 4.20 (Weitzenböck)**.** *Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigeit dann gilt*

$$\Delta = -\operatorname{Tr}\nabla^2 + \mathcal{K}\,,$$

wobei $\mathcal{K} : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ definiert ist durch

$$\mathcal{K}\omega = \sum_{i<j}\sigma^i\cdot\sigma^j\cdot R(e_i,e_j)\omega\,,$$

$e_1,\dots,e_n$ eine lokale Orthonormalbasis, $\sigma^1,\dots,\sigma^n$ die dazu duale Basis und mit $\cdot$ die Clifford-Multiplikation (77) *gemeint ist.*

Beweis. Fixiere $p \in M$ und bezeichne wie im Beweis von Satz 4.10 mit $\mathcal{O}$ den Vektorraum der Funktionen die bei p verschwinden. Wir rechnen mit Verwendung von Lemma 4.11

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= (c \circ \nabla)^2 \omega \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^i \cdot \nabla_{e_i} \left(\sigma^j \cdot \nabla_{e_j} \omega \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^i \cdot \big(\underbrace{\nabla_{e_i} \sigma^j}_{\in \mathcal{O}} \cdot \nabla_{e_j} \omega + \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega \big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega + \mathcal{O} \\
&= \sum_{i<j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega + \sum_{i=j} \sigma^i \cdot \sigma^i \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \sum_{i>j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega + \mathcal{O}\,.
\end{aligned}$$

Da mit $\sigma^i \cdot \sigma^j + \sigma^j \cdot \sigma^i = -2\langle \sigma^i, \sigma^j \rangle = -2\varepsilon_i \delta^{ij}$ nach Lemma 4.11 erhalten wir nach Umbenennen von i und j in der letzten Summe

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \sum_{i<j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) \omega - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \mathcal{O} \\
&= \sum_{i<j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot R(e_i, e_j) \omega - \operatorname{Tr} \nabla^2 \omega + \mathcal{O}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass $\nabla_{[e_i, e_j]} \omega \in \mathcal{O}$ und $\operatorname{div}(e_i) \in \mathcal{O}$. □

Korollar 4.21. *Für* $\alpha \in \Omega^1(M)$ *gilt*

$$\Delta\alpha = -\operatorname{Tr} \nabla^2 \alpha + \operatorname{Ric}(\alpha)\,,$$

wobei $\operatorname{Ric}(\alpha) \in \Omega^1(M)$ *definiert ist durch* $\operatorname{Ric}(\alpha)(X) = \alpha(\operatorname{Ric}(X))$ *und* $\operatorname{Ric}(X) \in \mathfrak{X}(M)$ *durch* $\langle \operatorname{Ric}(X), Y \rangle = \operatorname{Ric}(X, Y)$ *für alle* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Um das Korollar zu beweisen verwenden wir noch ein Lemma.

Lemma 4.22. *Für* $\mathcal{K}$ *aus Theorem gilt*

$$\mathcal{K}\omega = \sum R_{ij\mu\nu} \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\sharp \lrcorner\, \sigma^\mu \wedge (\sigma^\nu)^\sharp \lrcorner\, \omega\,,$$

wobei die Summantion über alle $i, j, \mu, \nu = 1, \ldots, n$ *läuft und die lokale Funktion* $R_{ij\mu\nu}$ *durch*

$$R_{ij\mu\nu} = \langle R(e_i, e_j) e_\mu, e_\nu \rangle\,,$$

definiert ist.

Nun erfolgt die Anwendung der erarbeiteten Theorie auf die Topologie. Wir sagen, dass $\operatorname{Ric} \geq 0$, wenn für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ gilt $\operatorname{Ric}(v, v) \geq 0$.

Theorem 4.23. *Sei* (M, g) *eine orientierte, zusammenhängende und geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt* *(i) Wenn* $\mathrm{Ric} \geq 0$ *dann gilt*

$$\mathcal{H}^1(M) = \{\alpha \in \Omega^1(M) \mid \nabla\alpha = 0\}\,, \tag{92}$$

und $\dim H^1(M) \leq \dim M = n$*. Falls gilt* $\dim H^1(M) = n$*, dann ist* M *isometrisch zum flachen Torus.*

(ii) Wenn $\mathrm{Ric} \geq 0$ *und* $\mathrm{Ric} > 0$ *für einen Punkt dann ist* $H^1(M) = 0$*.*

Beweis. Wir verwenden Korollar 4.21 und $-\operatorname{Tr}\nabla^2 = \nabla^* \circ \nabla$ nach Satz 4.19. Für $\alpha \in \Omega^1(M)$ gilt

$$\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle_{L^2} + \langle \mathrm{Ric}(\alpha), \alpha\rangle_{L^2} \geq \|\nabla\alpha\|^2_{L^2}\,.$$

Wir schliessen, dass wenn $\Delta\alpha = 0$, dann ist $\nabla\alpha = 0$. Andererseits

$$\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|^2\,.$$

Daraus folgt zusammen mit 4.10, wenn $\nabla\alpha = 0$, dann $d\alpha = d^*\alpha = 0$ und somit $\Delta\alpha = 0$. Das zeigt (92). Die Gleichung $\nabla\alpha = 0$ ist in lokalen Koordinaten ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Somit ist die Lösung eindeutig durch den Wert an einer Stelle bestimmt und es gilt für den Lösungsraum

$$\dim\ker\nabla \leq \dim T_p^*M = n\,.$$

Zusammen mit dem Theorem von Hodge erhalten wir $\dim H^1(M) \leq n$. Sei nun $\dim H^1(M) = n$. Damit gibt es Differentialformen $\sigma^1, \dots, \sigma^n \in \Omega^1(M)$ mit $\nabla\sigma^i = 0$ die an einem Punkt linear unabhängig sind. Da diese wieder Lösungen eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erster Ordung sind muss dann auch $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ an jedem Punkt linear unabhängig sein. Sei $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder, welche punktweise dual zu $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ sind. Da $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ parallel sind, gilt auch $\nabla e_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Damit

$$R(e_i, e_j)e_k = 0\,,$$

für alle $i, j, k = 1, \dots, n$. Damit ist $R = 0$ und nach der Klassifikation von Raumformen ist M isometrisch zum flachen Torus. $\square$

A Funktionalanalysis

Wir fassen die notwendigen Resultate aus der Funktionalanalysis zusammen. Ein *Banachraum* ist ein normierter reeler Vektorraum welcher vollständig bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik ist. Der Banachraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Ein *beschränkter Operator* $D : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y ist eine lineare Abbildung für die es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $\|Dx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$. Der Operator heißt *kompakt*, wenn D beschränkte Folgen auf Folgen mit konvergenter Teilfolge abbildet.

Lemma A.1. *Seien* X, Y, Z *Banachräume,* $D : X \to Y$ *ein beschränkter Operator und* $K : X \to Z$ *ein kompakter Operator, so dass für ein* $c > 0$ *und alle* $x \in X$ *gilt*

$$\|x\| \leq c(\|Dx\| + \|Kx\|)\,, \tag{93}$$

dann ist $\ker D$ *endlich dimensional und* $\operatorname{im} D \subset Y$ *abgeschlossen.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $\ker D$ endlich dimensional ist, zeigen wir, dass der Einheitsball in $\ker D$ kompakt ist. Gegeben eine Folge

$$(x_\nu) \subset \ker D \qquad \|x_\nu\| \leq 1\,.$$

Nach Einschränkung auf eine Teilfolge, ist die Folge (Kx_ν) eine Cauchyfolge. Wir erhalten aus (93)

$$\|x_\mu - x_\nu\| \leq c\|K(x_\nu) - K(x_\mu)\| \to 0\,,$$

wenn $\mu, \nu \to \infty$. Also ist (x_ν) eine Cauchyfolge und nach Vollständigkeit von X konvergiert (x_ν). Das zeigt, dass $\ker D$ endlich dimensional ist.
Wir zeigen, dass $\operatorname{im} D \subset Y$ abgeschlossen ist. Ohne Einschränkung ist jetzt $\ker D = 0$. Falls nicht ersetzen wir X durch ein abgeschlossenes Komplement von $\ker D$. Dies existiert nach dem Theorem von Hahn-Banach (siehe [9, §III]). Sei nun $(x_\nu) \subset X$ so dass $Dx_\nu \to y$. Wir müssen zeigen, dass $x_\nu \to x$ und $Dx = y$. Wir zeigen zunächst, dass (x_ν) beschränkt ist. Falls nicht, gilt nach Einschränkung auf eine Teilfolge $\|x_\nu\| \to \infty$. Definiere $(x'_\nu) \subset X$ durch $x'_\nu := \|x_\nu\|^{-1}x_\nu$. Es gilt

$$\|Dx'_\nu\| = \|x_\nu\|^{-1}\|Dx_\nu\| \to 0\,.$$

Die Folge (x'_ν) ist beschränkt und somit nach Einschränkung auf eine Teilfolge konvergiert (Kx'_ν). Damit nach (93)

$$\|x'_\mu - x'_\nu\| \leq c(\|Dx'_\nu\| + \|Dx'_\mu\| + \|K(x'_\nu - x'_\mu)\|) \to 0\,,$$

für $\mu, \nu \to \infty$. Also konvergiert (x'_ν) und es gilt $x'_\nu \to x'$ mit $Dx' = 0$. Da $\ker D = 0$ ist $x' = 0$. Das ist ein Widerspruch zu $1 = \|x'_\nu\| \to 0$. Wir schliessen daraus, dass (x_ν) beschränkt ist und nach einem analogen Argument gibt es eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung $x_\nu \to x$ und da D stetig ist $Dx_\nu \to y = Dx$. □

Eine Abbildung $D : X \to Y$ heißt *offen*, wenn D offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Das nächste Theorem heißt auch *Satz über die offene Abbildung.*

Theorem A.2. *Sei $D : X \to Y$ ein beschränkter surjektiver Operator und X, Y Banachräume, dann ist D offen.*

Beweis. [9, p. 82]. □

Korollar A.3. *Sei $D : X \to Y$ eine beschränkter injektiver Operator, X, Y Banachräume und $\operatorname{im} D \subset Y$ abgeschlossen, dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$\|Dx\| \geq c\|x\|\,.$$

Beweis. Das Bild $Y' := \operatorname{im} D$ ist als abgeschlossene Teilmenge ein Banachraum. Somit erfüllt $D : X \to Y'$ die Vorraussetzungen von Theorem A.2. Damit ist die Umkehrabbildung $D^{-1} : Y' \to X$ stetig, also beschränkt und es gibt eine Konstant $c > 0$ so dass $\|D^{-1}y\| \leq c^{-1}\|y\|$ für alle $y \in Y'$. Setze nun $y = Dx$. □

Satz A.4. *Sei X ein separabler Hilbertraum und $G : X \to X$ ein kompakter Operator, dann ist $\mathrm{EW}(G)$ beschränkt und hat 0 als einzigen Häufungspunkt. Außerdem gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von G.*

B Homologische Algebra

Wir fassen die notwendigen Resultate aus der Homologischen Algebra zusammen. Dabei schränken wir uns auf die Kategorie der reelen Vektorräume ein, da nur diese für uns relevant ist. Man beachte, dass manche der angegebenen Sätze für allgemeinere Situationen, etwa für Moduln über Ringen, nicht mehr richtig sind.

B.1 Exakte Sequenzen

Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen reelen Vektorräumen. Wir schreiben $\ker \phi = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$ und $\operatorname{im} \phi = \phi(V) \subset W$ für den *Kern* bzw. das *Bild* von ϕ. Eine *Sequenz* ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$V_0 \xrightarrow{\phi_0} V_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_n \,. \tag{94}$$

Die Sequenz heißt *exakt*, wenn für alle $k = 1, \dots, n-1$ gilt $\operatorname{im} \phi_{k-1} = \ker \phi_k$.

Lemma B.1. *Sei* (94) *eine exakte Sequenz von endlich dimensionalen Vektorräumen, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim V_k = 0 \,.$$

Beweis. Nach Rangsatz und Exaktheit gilt

$$\dim V_k = \dim \operatorname{im} \phi_k + \dim \ker \phi_k = \dim \operatorname{im} \phi_k + \dim \operatorname{im} \phi_{k-1} \,.$$

Die Gleichung folgt aus der Tatsache, dass in der Summe jeder Term $\dim \operatorname{im} \phi_k$ zweimal mit je unterschiedlichem Vorzeichen auftritt. $\square$

Für exakte Sequenzen von Vektorräume gibt es folgendes Kriterium.

Lemma B.2. *Eine Sequenz* (94) *ist exakt genau dann wenn es eine Sequenz gibt*

$$V_0 \xleftarrow{\psi_0} V_1 \xleftarrow{\psi_1} V_2 \xleftarrow{\psi_2} \dots \xleftarrow{\psi_{n-2}} V_{n-1} \xleftarrow{\psi_{n-1}} V_n \tag{95}$$

so dass für alle $k = 1, \dots, n-1$ *gilt*

$$\mathrm{id}_{V_k} = \psi_k \circ \phi_k + \phi_{k-1} \circ \psi_{k-1} \,. \tag{96}$$

Beweis. Wir zeigen $\Rightarrow$. Durch die Wahl einer Basis finden wir $\psi_k : \operatorname{im} \phi_k \to V_k$, so dass $\phi_k \circ \psi_k = \mathrm{id}_{\operatorname{im} \phi_k}$. Für alle $v \in V_k$ gilt $v - \psi_k(\phi_k(v)) \in \ker \phi_k = \operatorname{im} \phi_{k-1}$ und da $\ker \phi_k \cap \operatorname{im} \psi_k = 0$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$V_k = \ker \phi_k \oplus \operatorname{im} \psi_k = \operatorname{im} \phi_{k-1} \oplus \operatorname{im} \psi_k \,.$$

Nach Konstruktion sind $\phi_k : \operatorname{im} \psi_k \to \operatorname{im} \phi_k$ und $\psi_k : \operatorname{im} \phi_k \to \operatorname{im} \psi_k$ invers zueinander. Erweitere die Definition von ψ_k zu $\psi_k : V_{k+1} \to V_k$ durch $\psi_k|_{\operatorname{im} \psi_{k+1}} = 0$. Für $v \in \ker \phi_k = \operatorname{im} \phi_{k-1}$ gilt $(\psi_k \circ \phi_k + \phi_{k-1} \circ \psi_{k-1})(v) = \phi_{k-1}(\psi_{k-1}(v)) = v$ und für $v \in \operatorname{im} \psi_k$ gilt $(\psi_k \circ \phi_k + \phi_{k-1} \circ \psi_{k-1})(v) = \psi_k(\phi_k(v)) = v$. Damit haben wir die Gleichung (96) nachgewiesen.
Der Schritt $\Leftarrow$ folgt aus (96), denn für jedes $v \in \ker \phi_k$ gilt $v = \phi_{k-1}\psi_{k-1}(v) \in \operatorname{im} \phi_{k-1}$. $\square$

Sei V ein Vektorraum. Der *Dualraum* V^* ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen $\varphi : V \to \mathbb{R}$. Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die *duale Abbildung* $\phi^* : W^* \to V^*$ ist gegeben durch $W^* \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \phi$. Für eine Sequenz (94) definieren wir die *duale Sequenz* durch

$$V_0^* \xleftarrow{\phi_0^*} V_1^* \xleftarrow{\phi_1^*} \dots \xleftarrow{\phi_{n-2}^*} V_{n-1}^* \xleftarrow{\phi_{n-1}^*} V_n^* . \tag{97}$$

Lemma B.3. *Die duale Sequenz einer exakten Sequenz ist exakt.*

Beweis. Nach Lemma B.2 gibt es eine Sequenz (95). Die zu (95) duale Sequenz liefert Abbildungen $\psi_k^* : V_k^* \to V_{k+1}^*$ und es gilt $\psi_{k-1}^* \circ \phi_{k-1}^* + \phi_k^* \circ \psi_k^* = (\phi_{k-1} \circ \psi_{k-1} + \psi_k \circ \phi_k)^* = \mathrm{id}_{V_k}^* = \mathrm{id}_{V_k^*}$. Damit ist wieder nach Lemma B.2 die Sequenz (97) exakt. □

Sei nun W ein beliebiger Vektorraum. Zu der Sequenz (94) assozieren wir eine weitere Sequenz

$$V_0 \otimes W \longrightarrow V_1 \otimes W \longrightarrow \dots \longrightarrow V_{n-1} \otimes W \longrightarrow V_n \otimes W\,, \tag{98}$$

mit Abbildungen $\phi_k \otimes \mathrm{id}_W : V_k \otimes W \to V_{k+1} \otimes W$ definiert durch lineare Fortsetzung von $v \otimes w \mapsto \phi_k(v) \otimes w$ für alle $k = 0, \dots, n-1$.

Lemma B.4. *Wenn die Sequenz* (94) *exakt ist, dann ist auch* (98) *exakt.*

Beweis. Nach Lemma B.2 gibt es die Sequenz (95). Wir tensorieren (95) mit $\cdot \otimes W$ und erhalten Abbildungen $\psi_k \otimes \mathrm{id}_W : V_{k+1} \otimes W \to V_k \otimes W$, für die gilt $((\psi_k \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\phi_k \otimes \mathrm{id}_W) + (\phi_{k-1} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\psi_{k-1} \otimes \mathrm{id}_W)) = (\psi_k \circ \phi_k + \phi_{k-1} \otimes \psi_{k-1}) \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V_k} \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V_k \otimes W}$. Damit ist wieder nach Lemma B.2 die Sequenz (98) exakt. □

Lemma B.5 (Fünf-Lemma)**.** *Gegeben ein kommutative Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd} \tag{99}$$

Sind α, β, δ und ϵ Isomorphismen, dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd. □

B.2 Kokomplexe

Ein *Kokomplex* ist ein Paar (C, d) bestehend aus einem graduiertem Vektorraum und einer linearen Abbildung

$$C = \bigoplus_{k=0}^{n} C^k, \qquad d : C \to C$$

mit $d \circ d = 0$ und $d(C^k) \subset C^{k+1}$. Die Abbildung d heißt *Differential*. Wir schreiben (C, d) auch als Sequenz

$$\dots \xrightarrow{d} C^k \xrightarrow{d} C^{k+1} \xrightarrow{d} C^{k+2} \xrightarrow{d} \dots .$$

Der Fakt $\operatorname{im} d \subset \ker d$ erlaubt die Definition der *Kohomologie von* (C, d) durch

$$H^*(C,d) := \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(C,d), \qquad H^k(C,d) := \frac{\ker d \cap C^k}{\operatorname{im} d \cap C^k}.$$

Ein Beispiel für einen Kokomplex bilden offensichtlich die Differentialformen mit dem äußeren Differential. In diesem Fall ist die Kohomologie die DeRham-Kohomologie.
Gegeben zwei Kokomplexe (C, d) und (D, d). Eine lineare Abbildung $\phi : C \to D$ heißt *Koketten-morphismus*, wenn $\phi \circ d = d \circ \phi$ und $\phi(C^k) \subset D^k$ für alle $k \geq 0$. Diese Eigenschaft erlaubt die Definition der induzierten Abbildung auf Kohomologie

$$\phi : H^*(C,d) \to H^*(D,d)\,, \qquad [c] \mapsto [\phi(c)]\,.$$

Wir benötigen folgenden zentralen Satz.

Satz B.6. *Eine kurze exakte Sequenz von Koketten-morphismen*

$$0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\phi_0} C_1 \xrightarrow{\phi_1} C_2 \longrightarrow 0\ ,$$

induziert eine lange exakte Homologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^k(C_0) \xrightarrow{\phi_0} H^k(C_1) \xrightarrow{\phi_1} H^k(C_2) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(C_0) \longrightarrow \ldots\ .$$

Literatur

[1] Manfredo Perdig ao do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser Boston, 1993.

[2] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer, 2010.

[3] Helga Baum. Skript differentialgeometrie. https://www2.mathematik.hu-berlin.de/ schma-scf/hskript.pdf, 2015.

[4] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[6] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Springer, 2005.

[7] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume II of *Wiley Classics Library.* John Wiley& Sons, Inc., 1969.

[8] Jeffrey Lee. *Manifolds and Differential Geometry.* American Mathematical Society, 2009.

[9] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I. Academic Press, 1980.

[10] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. I.* Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, third edition, 1999.