Die Riemannsche Vermutung

Prof. Dr. Jürg Kramer (Humboldt-Universität zu Berlin)

Die Primzahlen sind bekanntlich die Bausteine der natürlichen Zahlen; sie sind nur durch Eins und sich selber teilbar, und jede natürliche Zahl ist als Produkt von Primzahlen darstellbar. Bereits Euklid (ca. 300 v. Chr.) bewies, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die unendlich Folge der Primzahlen beginnt mit

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots;$$

die Primzahlen werden zunehmend größer, so ist z.B. eine 39-stellige Primzahl gegeben durch

$$170141183460469231731687303715884105727.$$

Lange Zeit hat man versucht, eine allgemeine Formel zur Bestimmung aller Primzahlen zu finden. Im Zusammenhang mit Untersuchungen in der mathematischen Logik ergab sich, dass die Primzahlen als die positiven Werte des folgenden Polynoms charakterisiert werden können:

$$\begin{aligned}
&F(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z) = \\
&+[k+2][1-(wz+h+j-q)^2-(2n+p+q+z-e)^2 \\
&-(a^2y^2-y^2+1-x^2)^2-([e^4+2e^3][a+1]^2-o^2)^2 \\
&-(16[k+1]^3[k+2][n+1]^2+1-f^2)^2 \\
&-([(a+u^4-u^2a)^2-1][n+4dy)^2+1-[x+cu]^2)^2 \\
&-(ai+k+1-l-i)^2-([gk+2g+k+1][h+j]+h-z)^2 \\
&-(16r^2y^4[a^2-1]+1-u^2)^2 \\
&-(p-m+l[a-n-1]+b[2an+2a-n^2-2n-2])^2 \\
&-(z-pm+pla-p^2l+t[2ap-p^2-1])^2 \\
&-(q-x+y[a-p-1]+s[2ap+2a-p^2-2p-2])^2 \\
&-(a^2l^2-l^2+1-m^2)^2-(n+l+v-y)^2].
\end{aligned}$$

Man kann sich nun andererseits aufgrund der nicht sehr übersichtlichen obigen "Formel" vielleicht besser nach der Dichte der Primzahlen, d.h. nach der Anzahl der Primzahlen, die unterhalb einer Schranke x liegen, fragen. Dazu führte bereits Bernhard Riemann die Primzahlfunktion

$$\pi(x) = \text{Anzahl der Primzahlen kleiner als } x$$

ein. Durch umfangreiche Experimente, die bereits auf C.F. Gauß zurückgehen, fand sich eine asymptotische Formel für $\pi(x)$. Die Riemannsche Vermutung besagt nun, wie der Fehler in der asymptotischen Bestimmung von $\pi(x)$ optimal abgeschätzt werden kann. Über die Geheimnisse der Riemannschen Vermutung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie soll in diesem Vortrag berichtet werden.