

10. Berliner Tag der Mathematik

Mannschaftswettbewerb Klasse 11-13

Für jede Aufgabe ist eine Klarsichthülle beigegefügt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Klassenstufe, Team-Nummer sowie die Aufgabennummer. Achten Sie darauf, dass das farbige Blatt **auf jeden Fall und obenauf** in der Hülle ist, auch wenn dort nicht die richtige Lösung steht. Kennzeichnen Sie das, falls dies so ist.

1. Durch jede der 12 Ziffern eines Ziffernblattes werde vom Mittelpunkt aus ein Strahl gelegt, so dass alle Winkel zwischen benachbarten Strahlen gleich sind. Vom Punkt P_1 in der "1" fälle man das Lot auf den Strahl S_2 durch die "2". Vom erhaltenen Punkt P_2 fälle man das Lot auf den Strahl S_3 durch die "3" usw.

Am Ende fälle man vom erhaltenen Punkt P_{12} auf dem Strahl S_{12} wieder das Lot auf den Strahl S_1 , um $X = P_{13}$ zu erhalten.

(a) Wie gross ist (ungefähr) die Entfernung des Punktes X vom Zentrum, wenn der entsprechende Abstand von P_1 mit 1 angenommen wird ? (4 Punkte)

(b) Es mögen jetzt die Ziffern (bis auf die "1") ein wenig falsch auf dem Ziffernblatt angebracht sein, so dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Strahlen immer kleiner als 90° ist.

Man zeige: In Bezug auf solche Strahlen S_k ist der Endabstand von X zum Zentrum *nur dann* maximal, wenn die oben beschriebene symmetrische Ausgangssituation vorliegt.

(6 Punkte)

(c) Man zeige: Der Endabstand von X zum Zentrum ist *tatsächlich* maximal, wenn die symmetrische Ausgangssituation vorliegt. (10 Punkte)

2. Die Tür in einem Kirchturm sei p Meter hoch, und die gegenüber liegende Rückwand von der Türwand nur q Meter entfernt. Dagegen sei die Höhe des Turms vergleichsweise sehr groß. Wie lang ist die längste Leiter, die man (ohne sie zu verkanten) in den Turm (der senkrecht auf einer Ebene steht) hineinbringen kann ?(10 Punkte)

3. Aus einem Schachbrett mit $2^n \times 2^n$ Feldern ($n > 0$) werde ein Eckfeld herausgeschnitten. Wieso lässt sich das reduzierte Schachbrett mit Teilen in Winkelform (=reduziertes Schachbrett der Größe 2×2), die man auch drehen darf, überlappungsfrei und vollständig überdecken? (10 Punkte)