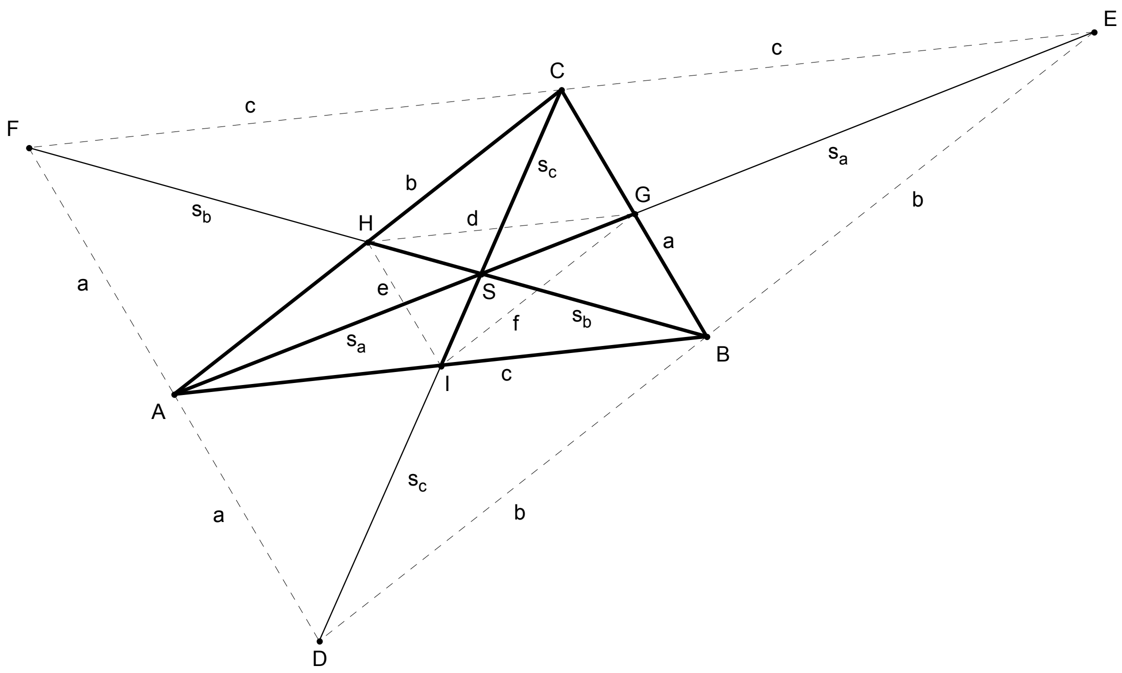
Klasse 7 / 8

Aufgabe 2 (Seitenhalbierende, 10 Punkte)

In einem Dreieck seien S die Summe der Seitenlängen und s die Summe der Längen der Seitenhalbierenden.
Man beweise, dass $s < S < 2s$.

Skizze:



zur Bezeichnung:

Dreieck ABC,
die Seiten des Dreiecks sind in der üblichen Weise mit a, b, c bezeichnet,
s_a, s_b, s_c Seitenhalbierende
d, e, f Mittellinien des Dreiecks (s.u.)

$S = a + b + c$
$s = s_a + s_b + s_c$

zu den Hilfslinien in der Skizze:

Dreieck ABC wird jeweils zu einem Parallelogramm ergänzt: ABEC, ABCF, ADBC

Diagonalen im Parallelogramm	ABEC: 2 s_a und a
	ABCF: 2 s_b und b
	ADBC: 2 s_c und c

Lösung:

Beweis der ersten Ungleichung: *s* < *S* (Variante 1) 6 Punkte

Der Satz über die Mittellinien im Dreieck ist bekannt:
Mittellinie eines Dreiecks heißt jede Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten des Dreiecks verbindet.
Jede Mittellinie eines Dreiecks ist zu einer Seite des Dreiecks parallel und halb so lang wie diese.

zu zeigen: $s = s_a + s_b + s_c < a + b + c = S$

Beweis erfolgt über Mittelliniensatz und Anwendung der Dreiecksungleichung

1) $\frac{c}{2} + \frac{a}{2} = d + \frac{a}{2} > s_b$

2) $\frac{b}{2} + \frac{c}{2} = f + \frac{c}{2} > s_a$

3) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = e + \frac{b}{2} > s_c$

$1) + 2) + 3):\quad \frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = a + b + c > s_a + s_b + s_c$

Beweis der ersten Ungleichung: *s* < *S* (Variante 2) 6 Punkte

zu zeigen: $s = s_a + s_b + s_c < a + b + c = S$

Beweis erfolgt über Anwendung der Dreiecksungleichung auf bestimmte Teildreiecke in den konstruierten Hilfsparallelogrammen:

im Parallelogramm ABEC: $2s_a < b + c$

im Parallelogramm ABCF: $2s_b < a + c$

im Parallelogramm ADBC: $2s_c < a + b$

$$2s_a + 2s_b + 2s_c = 2(s_a + s_b + s_c) < 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow \quad s_a + s_b + s_c < a + b + c$$

Beweis der 2. Ungleichung: $S < 2s$ (Variante 1) 4 Punkte

zu zeigen: $S = a + b + c < 2\,(s_a + s_b + s_c) = 2s$

Beweis erfolgt über Anwendung der Dreiecksungleichung in bestimmten Teildreiecken

im Dreieck AGC gilt: $b < s_a + \frac{a}{2}$

im Dreieck IBC gilt: $a < s_c + \frac{c}{2}$

im Dreieck ABH gilt: $c < s_b + \frac{b}{2}$

Addition aller drei Ungleichungen liefert:

$$a + b + c < s_a + s_b + s_c + \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c) < 2(s_a + s_b + s_c) + a + b + c$$

$$\Leftrightarrow a + b + c < 2(s_a + s_b + s_c)$$

Beweis der 2. Ungleichung: $S < 2s$ (Variante 2) 4 Punkte

zu zeigen: $S = a + b + c < 2\,(s_a + s_b + s_c) = 2s$

Es ist bekannt, dass sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden.

Beweis erfolgt über Anwendung der Dreiecksungleichung unter Berücksichtigung des o.g. Verhältnisses

im Dreieck SBC gilt: $a < \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_b$

im Dreieck ASC gilt: $b < \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_c$

im Dreieck ABS gilt: $c < \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_a$

$$a + b + c < \frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c = \frac{4}{3}(s_a + s_b + s_c) < 2(s_a + s_b + s_c)$$