1 Klassen 11-13

1.1 Strahlen durch ein Ziffernblatt

(20 Punkte) Durch jede der 12 Ziffern eines Ziffernblattes werde vom Mittelpunkt aus ein Strahl gelegt, so dass alle Winkel zwischen benachbarten Strahlen gleich sind. Vom Punkt P_1 in der "1" fälle man das Lot auf den Strahl S_2 durch die "2". Vom erhaltenen Punkt P_2 fälle man das Lot auf den Strahl S_3 durch die "3" usw. Am Ende fälle man vom erhaltenen Punkt P_{12} auf dem Strahl S_{12} wieder das Lot auf den Strahl S_1, um $X = P_{13}$ zu erhalten.

(a) Wie groß ist (ungefähr) die Entfernung des Punktes X vom Zentrum, wenn der entsprechende Abstand von P_1 mit 1 angenommen wird ? (4 Punkte)

(b) Es mögen jetzt die Ziffern (bis auf die "1") ein wenig falsch auf dem Ziffernblatt angebracht sein, so dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Strahlen immer kleiner als 90^o ist.
Man zeige: In Bezug auf solche Strahlen S_k ist der Endabstand von X zum Zentrum *nur dann* maximal, wenn die oben beschriebene symmetrische Ausgangssituation vorliegt.
(6 Punkte)

(c) Man zeige: Der Endabstand von X zum Zentrum ist *tatsächlich* maximal, wenn die symmetrische Ausgangssituation vorliegt. (10 Punkte)
Lösung: Sei F der Abstand von X zum Zentrum.
(a) Der Winkel zwischen benachbarten Strahlen ist gerade $\alpha = \pi/6$ bzw. 30^o Grad. Die Entfernung von P_2 zum Zentrum wird dann $r_2 = r_1 \cos(\pi/6) = r_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$ und bei 12-maliger Wiederholung $F = r_{13} = r_1(\frac{\sqrt{3}}{2})^{12} = \frac{3^6}{2^{12}} = r^* := \frac{729}{4096}$, das ist etwa 0.178.

(b) Angenommen, feste Winkel machen den Endabstand

$$F = \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) \ \dots \ \cos(\alpha_{11})\cos(\alpha_{12})$$

(lokal) maximal und zwei Winkel sind verschieden. Dann liegt ein Strahl nicht genau in der Mitte zwischen seinen Nachbarn, z.B., S_2; und $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Mit festen übrigen Strahlen verdrehen wir S_2. Dann ändern sich nur die Winkel α_1 und α_2 wobei die Summe

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2$$

konstant bleibt. Weiter ist (Add. theoreme con cos benutzen) $\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2))$ mit offensichtlichem Maximum für $\alpha_1 = \alpha_2$. Ebenso kann man z.B. $\alpha_1 = y, \alpha_2 = \beta - y$ setzen und das Maximum von $g(y) = \cos(y)\cos(\beta - y)$ mittels 1. und 2.Ableitung bestimmen. Es wird unter der Voraussetzung $\beta < 180^o$ und $0 < y < \beta$ nur in $y = \beta/2$ angenommen. Der Schluss gilt in bezug auf *jedes*

der Produkte $\cos(\alpha_{k-1})\cos(\alpha_k)$ und Variation von S_k allein (wobei dann wieder die Summe beider Winkel konstant ist), was die Behauptung beweist.
(c) Seien jetzt α_i die kleinen Änderungen der Originalwinkel $\pi/6$, $\sum \alpha_i = 0$. Dann wird

$$\begin{array}{l} F = \Pi_{i=1}^{12}\ \cos(\frac{\pi}{6} + \alpha_i) \\ = \quad \Pi_{i=1}^{12}\ [\cos(\frac{\pi}{6})\cos(\alpha_i) - \sin(\frac{\pi}{6})\sin(\alpha_i)] \\ = \quad \Pi_{i=1}^{12}\ [\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\alpha_i)\ - \frac{1}{2}\sin(\alpha_i)] \\ = \ (\frac{1}{2})^{12}\quad \Pi_{i=1}^{12}\ [\sqrt{3}\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i)]. \end{array} \tag{1}$$

Für die positiven Faktoren der Gestalt

$$f(\alpha) = \sqrt{3}\cos(\alpha) - \sin(\alpha)$$

folgt nach Differenzieren

$$f'(\alpha)\ = -\sqrt{3}\sin(\alpha) - \cos(\alpha),\ f''(\alpha) = -\sqrt{3}\cos(\alpha) + \sin(\alpha).$$

Damit gilt $f'(0) = -1, f''(0) = -\sqrt{3}$, und folglich hat $f(\alpha) + \alpha$ im Nullpunkt ein lokales Maximum.
Das liefert

$$f(\alpha) + \alpha \leq f(0) + 0 = \sqrt{3}$$

und somit

$$\sqrt{3}\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) = f(\alpha_i) \leq \sqrt{3} - \alpha_i. \tag{2}$$

Hiermit folgt schließlich

$$F \leq (\tfrac{1}{2})^{12}\ (\sqrt{3} - \alpha_1)\ ..\ (\sqrt{3} - \alpha_{12}). \tag{3}$$

Das Produkt hat wegen $\sum \alpha_i = 0$ sein Maximum in $\alpha_i = 0\ \forall i$. Also realisiert die symmetrische Version ein lokales Maximum für F.

Alternative ((b) und (c) elementar): Offensichtlich hängt F nicht von der *Reihenfolge* der zwölf Winkel ab. Angenommen nicht alle Winkel sind gleich 30^o. Dann gibt es einen, der echt größer und einen, der echt kleiner ist. O.B.d.A. seien dies α_1 und α_2 (nach evtl. Vertauschen der Reihenfolge). Der Wert des Produkts $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2))$ ist aber bei konstanter Summe $\alpha_1 + \alpha_2$ offenbar nicht optimal. Damit ist $\alpha_1 = ...\alpha_{12} = 30^o$ notwendig. Verdreht man jetzt den Strahl, der die beiden Winkel trennt, in Richtung Winkelhalbierende des Winkels, den diese gemeinsam bilden, vergrößert man offenbar $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$, ohne weder $\cos(\alpha_1+\alpha_2)$ noch $\cos\alpha_3 ... \cos\alpha_{12}$ zu verändern. Somit erhält man eine Konfiguration mit größerem Abstand F und einem 30^o-Winkel mehr, als ursprünglich. Damit ist gezeigt, dass F für jede andere Konfiguration kleiner ist, als für die gleichmäßige.

1.2 Leiter im Kirchturm

Die Tür in einem Kirchturm sei p Meter hoch, und die gegenüber liegende Rückwand von der Türwand nur q Meter entfernt. Dagegen sei die Höhe des Turms vergleichsweise sehr groß. Wie lang ist die längste Leiter, die man (ohne sie zu verkanten) in den Turm (der senkrecht auf einer Ebene steht) hineinbringen kann? (10 Punkte)

Lösung:
Man denke sich eine Leiter, die den oberen Türrahmen und die Rückwand in Höhe $p + x$ berührt. Ihr Aufsetzpunkt (außerhalb des Turms) habe die Entfernung $q + y$ von der Rückwand. Dann gilt für die Länge L

$$L^2 = (p + x)^2 + (q + y)^2 \quad \text{und} \quad \frac{x}{q} = \frac{p}{y}$$

Damit erfüllt die Länge L

$$L^2 = (p + q\tfrac{p}{y})^2 + (q + y)^2 = p^2 + 2q\tfrac{p^2}{y} + q^2\tfrac{p^2}{y^2} + q^2 + 2qy + y^2.$$

Minimales L bzw. $f = L^2$ ist offenbar entscheidend. Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f' &= -2q\frac{p^2}{y^2} - 2q^2\frac{p^2}{y^3} + 2q + 2y, \\ f'' &= \ \ 4q\frac{p^2}{y^3} + 6q^2\frac{p^2}{y^4} + 2 > 0 \end{aligned}$$

Die erste Ableitung verschwindet, wenn $y^3 f' = 0$, d.h.,

$$\begin{aligned} &-p^2qy \ - q^2p^2 + qy^3 + y^4 = 0 \qquad \text{bzw.} \\ &-p^2q\ (y + q)\ +\ y^3\ (y + q)\ = 0. \end{aligned}$$

Wegen $y + q > 0$ kann man dividieren, und es folgt so

$$y = \sqrt[3]{p^2q}.$$

Damit wird $x = p\ q/y = p\ q/\sqrt[3]{p^2q}$, $\quad L^2 = (p +\ p\ q/\sqrt[3]{p^2q}\ )^2 + (q + \sqrt[3]{p^2q})^2$.

1.3 Überdeckung eines Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$

(10 P) Aus einem Schachbrett mit $2^n \times 2^n$ Feldern $(n > 0)$ werde ein Eckfeld herausgeschnitten. Wieso lässt sich das reduzierte Schachbrett mit Teilen in Winkelform (=reduziertes Schachbrett der Größe 2×2), die man auch drehen darf, überlappungsfrei und vollständig überdecken? (10 Punkte)
Lösung:
Für n=1 trivial. n →n+1:
Man legt ein Teil derart in die Mitte, dass genau vier "Schachbretter" der Größe $2^n \times 2^n$ ohne Eckfeld entstehen. Da jedes der vier kleineren "Schachbretter" wie verlangt überdeckt werden kann, bleibt dies auch für das große richtig.