1 Klassen 7-8

1.1 61 Kugeln

Unter 61 Kugeln befinde sich genau eine, die schwerer oder leichter als die übrigen ist. Durch höchstens dreimaliges Wägen mit einer Balkenwaage soll festgestellt werden, ob sie leichter ist. Wie muss man vorgehen? Begründet, warum Euer Vorschlag in jedem möglichen Fall die richtige Antwort liefert. (10 Punkte)
Lösung:
Wir bilden 3 Gruppen A, B, C von 20 Kugeln, eine Kugel legen wir beiseite.
1. Wir vergleichen A und B.

Fall 1: $A > B$ (A schwerer als B)
2. Wir vergleichen A und C.

Wenn $A = C$, so muss in B die leichtere Kugel sein. Wenn $A < C$, so liefert $B < A < C$ einen Widerspruch, der Fall tritt nicht auf. Wenn $A > C$, so muss in A die schwerere Kugel sein.

Fall 2: $B > A$ analog zu Fall 1.

Fall 3: $A = B$
2. Wir vergleichen A und C.

Wenn $A < C$, so muss in C die schwerere Kugel sein. Wenn $A > C$, so muss in A die schwerere Kugel sein. Wenn $A = C$, so ist die herausgenommen Kugel die Exotin. Dann vergleicht man sie (3.) mit irgendeiner anderen und weiss Bescheid.
Das Team 38 vom Alexander-von-Humboldt-Gymnasium fand zu unserer großen Überraschung eine Lösung, die mit zwei Wägungen auskommt! Man nimmt zwei Gruppen A, B von je 30 Kugeln und wiegt sie gegeneinander.
Fall 1: $A = B$. Dann ist die verbleibende Kugel die Exotin sein. und man wiegt sie nun einfach gegen eine der gewählten 60 Kugeln ab.
Fall2: Die Gruppen sind unterschiedlich schwer: $A < B$. Die Exotin ist unter A oder B. Man teilt A in zwei Gruppen zu je 15 Kugeln auf und wiegt sie gegeneinander ab. Bleibt die Waage im Gleichstand, so muss die Exotin sich in B befinden, und ist damit schwerer. zeigt die Waage einen Unterschied, so ist die Exotin in A und ist damit leichter.

1.2 Seitenhalbierende

In einem Dreieck seien S die Summe der Seitenlängen und s die Summe der Längen der Seitenhalbierenden. Man beweise, dass $s < S < 2s$. (10 Punkte)

Lösung: Die Ecken seien mit A, B, C bezeichnet, die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten mit D, E bzw. F. Mit Strahlensatz und Parallelität entsprechender Seiten erkennt man, dass
$S = AB + BC + CA$ (Summe der Seiten)
$s = AD + BE + CF$ (Summe der Seitenhalbierenden)

$AB/2 + BC/2 = ED + DB > EB$
$AC/2 + AB/2 = DF + FA > DA$
$CB/2 + AC/2 = FE + EC > FC \quad \Rightarrow \; S > s$

$AC < AD + DC$
$CB < CF + FB$
$BA < BE + EA \quad \Rightarrow \; S < s + S/2, \quad S < 2s$

1.3 Frage

Ein Fallschirmspringer landet in einem von 2 Dörfern, er weiss nicht in welchem. Die Einwohner aus Wahrstein sagen immer die Wahrheit, die aus Lügenscheid lügen stets. Dummerweise ist gerade Markttag, so dass er Leute aus beiden Dörfern treffen kann. Der Mann stellt genau einem Marktbesucher eine Frage, auf die dieser nur mit "Ja" oder "Nein" antworten kann. Daraufhin weiß er sicher, ob er in Wahrstein oder Lügenscheid ist. Was hat er den Marktbesucher gefragt? (5 Punkte)
Lösung:
1. Möglichkeit: Bist Du von hier ?
2. Möglichkeit: Was würde jemand aus Deinem Dorf auf die Frage antworten, ob wir hier in Wahrstein sind?
3. Möglichkeit: ???

1.4 Summe = Produkt

Für welche drei positiven natürlichen Zahlen ist ihre Summe gleich ihrem Produkt? (5 Punkte)
Lösung:
Angenommen $1 \leq a \leq b \leq c$ besitzen diese Eigenschaft.
Dann ist $s = a + b + c \leq 3c$ und $p = abc = s \leq 3c$. Also muss

$$ab \leq 3$$

gelten. Damit kommt nur $a = 1$ zusammen mit $1 \leq b \leq 3$ in Frage.
$b = 1$ führt zur unlösbaren Gleichungen $2 + c = abc = c$, scheidet also aus.
$b = 2$ führt zu $3 + c = abc = 2c$ und liefert einen möglichen Fall: $c = 3$.
$b = 3$ führt zu $4 + c = abc = 3c$ und liefert mit $c = 2$ keinen neuen möglichen Fall, da $c = 2 < b$.
Es gibt also, bis auf Vertauschung, nur die Lösung $1, 2, 3$.

1.5 Summe = 100

Für welche $k \geq 1$ gibt es k aufeinander folgende natürliche Zahlen, deren Summe 100 ist? (10 Punkte)
Lösung:
Es gelte mit $m+1$ Summanden $100 = s = n + (n+1) + ... + (n+m),\ m \geq 1$.
Pärchen aus grössten und kleinsten Summanden bilden und addieren liefert die Gleichungen

$$2s = (m+1)\ [2n+m] = m(m+1) + 2n(m+1) \quad \text{und} \quad n = \frac{s}{m+1} - \frac{m}{2}.$$

Damit sind also die Lösungen von

$$n = \frac{2*2*5*5}{m+1} - \frac{m}{2} \tag{1}$$

interessant.

(1) Ist m gerade, muss die ungerade Zahl $m+1$ Teiler von s sein (und rechte Seite positiv). Das ist auch hinreichend und geht mit
$m = 4$, woraus $n = 20-2 = 18$ folgt. Also Lösung 1: $\quad 18+19+20+21+22 = 100$.
Die zweite Möglichkeit $m = 24$ scheidet aus, weil dann $n = 4 - 12 < 0$ wäre.

(2) Ist m ungerade, so ist $m+1 = 2k$ gerade, und es muss $s/(m+1) = \frac{s}{2k}$ den Rest 1/2 lassen, also

$$\frac{100}{2k} = p + \frac{1}{2}; \qquad 2*2*5*5 = k\ (2p+1),\ p \in N.$$

Nun muss $2p+1 = 5$ und $2p+1 = 25$ untersucht werden.
Im ersten Fall wird $k = 20,\ m+1 = 40$ und $n = 100/40 - 39/2 < 0$.
Im zweiten Fall wird
$k = 4,\ m+1 = 8$ und $n = 100/8 - 7/2 = 25/2 - 7/2 = 9$. Das liefert die zweite und letzte nichttriviale Lösung $\quad 9 + 10 + 11 + ... + 16 = 100$.

(3) Es war völlig in Ordnung, wenn man auch noch die Lösung $k = 1$ und $n = 100$ angegeben hatte.