1 Klassen 9-10

1.1 Ein Linienbusnetz

In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Buslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:
(a) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(b) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(c) Man kann von jeder Haltestelle aus jede andere ohne umzusteigen erreichen.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl der Buslinien eines solchen Netzes. (10 Punkte)
Lösung: Sei L_1 eine Linie, die die drei Haltestellen B,C und D enthält. Da es mindestens zwei Linen gibt, muss es wegen (b) eine weitere Haltestelle A geben. Von A kann man jede Haltestelle direkt erreichen, also gibt es drei weitere Linien L_2, L_3 und L_4, die A mit B, C bzw. D verbinden.
Jede weitere Haltestelle auf einer der Linien L_2, L_3 oder L_4 liegen. Angenommen es gäbe eine Haltestelle E, für die das nicht zutrifft. Dann müsste es eine Linie M durch A und E geben. Diese könnte dann K nicht treffen, weil sie L_i $(i = 2, 3, 4)$ schon in A trifft. Bezeichne mit E, F, G die weitere Haltestellen auf L_2, L_3 bzw. L_4. Es müssen nun z.B. noch B und F, D und F sowie C und E direkt verbunden werden wegen (c). Auf jeder dieser Linien L_5, L_6 bzw. L_7 muss dann notwendigerweise wegen (b) und der Nichtexistenz weiterer Haltestellen G, E bzw. G liegen. Nun kann keine weitere Linie hinzugefügt werden ohne (b) zu verletzen. Man überzeugt sich leicht, dass dieses Netz tatsächlich den Bedingungen genügt:

L_1		B	C	D			
L_2	A	B			E		
L_3	A		C			F	
L_4	A			D			G
L_5		B				F	G
L_6				D	E	F	
L_7			C		E		G

Somit besteht das Netz aus 7 Linien.

1.2 Dreiecklängen

Es seien Längen $L_1 < L_2 ... < L_5$ so gegeben, dass man aus je 3 verschiedenen Strecken dieser Längen ein Dreieck bilden kann. Man beweise, dass dann wenigstens eines der möglichen Dreiecke spitz ist. (10 Punkte)
Lösung:
Dreieck mit Längen $a \leq b \leq c$. Es gelten die Dreiecksungleichungen, $a + b > c, a + c > b$ $b + c > a$ automatisch. Das Dreieck ist spitz-, recht, bzw. stumpfwinklig, falls $a^2 + b^2 - c^2$ positiv, 0 oder negativ ist.

Man bilde die Dreiecke D_{123} , D_{234} , D_{345} aus den entsprechenden Längen. Angenommen, sie sind alle stumpf. Dann folgt wegen der Größenordnung der Längen:
$L_3^2 > L_1^2 + L_2^2, \qquad L_4^2 > L_2^2 + L_3^2 > L_1^2 + 2L_2^2,$
$L_5^2 > L_3^2 + L_4^2 > L_3^2 + (L_1^2 + 2L_2^2) > (L_1^2 + L_2^2) + (L_1^2 + 2L_2^2) = 2L_1^2 + 3L_2^2.$
Da es das Dreieck D_{512} nach Voraussetzung gibt, folgt

$$L_5 < L_1 + L_2.$$

Also ist $L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 > L_5^2 > 2L_1^2 + 3L_2^2$, d.h.

$$0 > -2L_1L_2 + L_1^2 + 2L_2^2 > 2L_1L_2 + L_1^2 + L_2^2 = (L_1 - L_2)^2,$$

was offenbar falsch ist.

1.3 4. Potenz

Man beweise: Für natürliche n und m (beide positiv) gilt stets

$$n(n+1)(n+2)...(n+7) \neq m^4.$$

(10 Punkte)
Lösung:
Die linke Seite ist

$$\begin{aligned} L &= [n(n+7)]\ [(n+1)(n+6)]\ [(n+2)(n+5)]\ [(n+3)(n+4)] \\ &= \ (n^2+7n)\ (n^2+7n\ +6)\ (n^2+7n\ +10)\ (n^2+7n\ +12). \end{aligned}$$

Man sieht so, dass m zwischen $n^2 + 7n$ und $n^2 + 7n + 12$ liegen müsste. Mit $a = n^2 + 7n + 6$ (ohne diesen Ansatz werden die Rechnungen wesentlich umständlicher) zeigt man genauer, dass $a < \sqrt[4]{L} < a + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} L &= \ (a-6)\ a\ (a+4)\ (a+6) = (a^2-36)(a^2+4a) \\ &= a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a \\ &= a^4 + 4a(a^2 - 9a - 36)\ = a^4 + 4a(a+3)(a-12). \end{aligned}$$

Wegen $a > 12$ folgt so $L > a^4$. Andererseits liefert
$L = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a$, dass $L < (a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$.
Also ist $a^4 < L < (a+1)^4$, was die Behauptung beweist.

1.4 Rationale Parabel

Durch $y = ax^2 + bx + c$ sei eine Parabel gegeben. Sie enthalte wenigstens drei verschiedene Punkte (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten. Warum sind dann a, b und c rational? (10 Punkte)
Lösung:
Seien dies die Paare $(x, y), (u, v), (p, q)$. Dann folgt

$y = ax^2 + bx + c, \;\; v = au^2 + bu + c \; , \;\; q = ap^2 + bp + c$
und
$y - v = a(x^2 - u^2) + b(x - u) = a(x - u)(x + u) + b(x - u)$
sowie

$$a(x + u) + b = (y - v)/(x - u).$$

Analog mit p statt x:

$$a(p + u) + b = (q - v)/(p - u).$$

Somit folgt weiter

$$a[(x + u) - (p + u)] = (y - v)/(x - u) - (q - v)/(p - u).$$

Da $(x + u) \neq (p + u)$ ist, folgt hiermit Rationalität von a.
Aus $y - v = a(x^2 - u^2) + b(x - u)$ ergibt sich dann Rationalität von b,
und aus $y = ax^2 + bx + c$ die Rationalität von c.