Dr. Holger Stephan

WIAS Berlin

Der kürzeste Weg in Geometrie und Analysis.
Einfachste Variationsprobleme.

Die Grundaufgabe der Variationsrechnung ist etwa: Finde eine Kurve, die sich gegenüber allen anderen Kurven in besonderer Weise auszeichnet. Eine einfach zu formulierende Aufgabe dieser Art ist die Suche nach dem kürzesten Weg: Finde unter allen Kurven, die zwei Punkte einer Fläche verbinden, diejenige mit der geringsten Länge. Das ist in der Ebene natürlich die Strecke. Andere Aufgaben, die so ähnlich klingen, können viel schwieriger sein: Was ist der kürzeste Weg in einer Hügellandschaft, auf einem Polyeder oder wenn Hindernisse im Weg stehen? Was ist der kürzeste Weg zwischen drei oder mehr Punkten?

Analytisch bedeuten solche Fragen: Finde das Minimum einer Funktion, die die Länge der verschiedenen Wege beschreibt.

Diese Grundaufgabe lässt sich auf mehrdimensionale Objekte ausdehnen, etwa auf die Suche nach der sogenannten Minimalfläche: Welche Fläche im Raum hat den kleinsten Flächeninhalt, wenn der Rand der Fläche vorgegebene ist?

Von tieferliegender Bedeutung ist die Suche nach dem kürzesten Weg, weil die Natur offenbar so verfährt. Zum Beispiel hat es das Licht besonders eilig und schlägt stets den Weg ein, der die kürzeste Zeit in Anspruch nimmt. Das Mut keine Gerade sein, wenn verschiedene Materialien, Hindernisse oder Spiegel im Wege stehen. Hieraus folgen das Reflexions- und das Brechungsgesetz des Lichtes. Das scheint kein Zufall zu sein. Auch andere physikalische Objekte, Planeten oder Pendel bewegen sich auf dem kürzesten Weg – man Mut nur den Abstand geeignet definieren. Heute glaubt man, ein physikalisches Problem am tiefgründigsten verstanden zu haben, wenn man es auf eine Variationsaufgabe zurückführen kann. Die grundlegenden Gleichungen der Physik sind Folgerungen aus solchen Variationsproblemen.

Wenn man alle physikalischen Probleme auf Variationsprobleme zurückgeführt hat, bleiben eigentlich nur noch philosophische Fragen: Woher weiß das Licht, welcher Weg der kürzeste ist? Warum braucht der Mensch mit den besten Computern lange Zeit, um eine Minimalfläche zu finden, während es eine Seifenhaut augenblicklich schafft?