Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 10 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 27. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 10.1 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^x e^{\sqrt{3t+9}}\,dt, \qquad x \in (-2,\infty)$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt, \qquad x \in (0,\infty)$

Antworten:

a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_{-2}^x e^{\sqrt{3t+9}}\,dt = \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{3x+9}-1\right)e^{\sqrt{3x+9}} - (\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}}\right]$

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt = \frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \frac{1}{2}$

Dies geht in zwei Schritten: zuerst beweist man durch die Substitution $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t} = \frac{dt}{e^u}$ die Formel

$$\int_1^x \sin(\ln t)\,dt = \int_0^{\ln x} e^u \sin u\,du.$$

Im zweiten Schritt muss man partielle Integration zweimal anwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln x} e^u\sin u\,du &= \int_0^{\ln x}\left(\frac{d}{du}e^u\right)\sin u\,du = e^u\sin u\Big|_0^{\ln x} - \int_0^{\ln x} e^u\cos u\,du \\ &= e^u\sin u\Big|_0^{\ln x} - \int_0^{\ln x}\left(\frac{d}{du}e^u\right)\cos u\,du \\ &= e^u\sin u\Big|_0^{\ln x} - e^u\cos u\Big|_0^{\ln x} - \int_0^{\ln x} e^u\sin u\,du.\end{aligned}$$

Wegen des geänderten Vorzeichens auf der rechten Seite kann man jetzt eine Formel für $\int_0^{\ln x} e^u\sin u\,du$ herleiten.

Aufgabe 10.2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte) Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$, und E ein Banachraum. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Riemann-Integrals:

a) Hat $f : I \to E$ den Wert $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele Punkte $x \in I$, dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Kommentar: Angenommen $f(t_j) = y_j$ für $j = 1, \ldots, N$ und $f(x) = 0$ für alle $x \notin \{t_1, \ldots, t_N\}$. Gegeben $\epsilon > 0$ gibt es dann eine Zerlegung $\mathcal{P}_\epsilon$ von I mit den folgenden Eigenschaften: jedes Teilintervall in der Zerlegung enthält höchstens einen der Punkte $t_1, \ldots, t_N$, und für jedes $j = 1, \ldots, N$ haben alle Teilintervalle $I' \subset I$ der Zerlegung, die t_j enthalten, Länge kleiner als $\epsilon/2N\|y_j\|$. Jede Verfeinerung $\mathcal{P} \geqslant \mathcal{P}_\epsilon$ wird dann auch diese Eigenschaften haben, und für jedes $j = 1, \ldots, N$ gibt es immer höchstens zwei Teilintervalle von $\mathcal{P}$, die t_j enthalten; auf so einem Teilintervall gilt für eine beliebige Stützstelle ξ, $\|f(\xi)\| \leqslant \|y_j\|$, da entweder $f(\xi) = y_j$ oder $f(\xi) = 0$, das Erste nur im Fall $\xi = t_j$. Unter diesen Annahmen folgt also für beliebige Stüztstellen ξ, dass die entsprechende Riemannsche Summe

$$\|S(f, \mathcal{P}, \xi)\| < \epsilon$$

erfüllt. Die Definition von Riemann-Integrierbarkeit ist deswegen mit $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ erfüllt.

b) Sei $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I mit Teilintervallen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$. Wenn die Einschränkungen $f|_{I_k} : I_k \to E$ einer Funktion $f : I \to E$ für alle $k = 1, \ldots, n$ Riemann-integrierbar sind, dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$.
Hinweis: Zerlegungen der verschiedenen I_k für $k = 1, \ldots, n$ können vereinigt werden, um eine feinere Zerlegung von I zu definieren.

Kommentar: Die Riemann-Integrierbarkeit von $f|_{I_k}$ für jedes $k = 1, \ldots, n$ heißt, gegeben $\epsilon > 0$ existieren Zerlegungen $\mathcal{P}_\epsilon^k$ von I_k, so dass für beliebige Verfeinerungen $\mathcal{P}^k \geqslant \mathcal{P}_\epsilon^k$ und entsprechende Stützstellen ξ^k erfüllen die Riemannschen Summen $S(f, \mathcal{P}^k, \xi^k)$ die Ungleichungen

$$\left\| S(f, \mathcal{P}^k, \xi^k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right\| < \frac{\epsilon}{n} \quad \text{für jedes } k = 1, \ldots, n.$$

Die Vereinigung der endlichen Mengen $\mathcal{P}_\epsilon^k \subset I_k$ für $k = 1, \ldots, n$ definiert dann noch eine endliche Menge $\mathcal{P}_\epsilon \subset I$, die als Zerlegung von I betrachtet werden kann. Beliebige Verfeinerungen $\mathcal{P}'$ von $\mathcal{P}_\epsilon$ sind dann auch als Vereinigungen von Verfeinerungen $\mathcal{P}^k$ von $\mathcal{P}_\epsilon^k$ für $k = 1, \ldots, n$ gegeben. Eine Wahl von Stützstellen ξ für $\mathcal{P}'$ bestimmt jetzt Stützstellen ξ^k für jedes $\mathcal{P}^k$, so dass die entsprechenden Riemannschen Summe

$$S(f, \mathcal{P}', \xi) = \sum_{k=1}^n S(f|_{I_k}, \mathcal{P}^k, \xi^k)$$

erfüllt. Es folgt,

$$\begin{aligned}
\left\| S(f, \mathcal{P}', \xi) - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \left(S(f|_{I_k}, \mathcal{P}^k, \xi^k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right) \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \left\| S(f|_{I_k}, \mathcal{P}^k, \xi^k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right\| < n\frac{\epsilon}{n} = \epsilon.
\end{aligned}$$

c) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in I$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Kommentar: Für alle Zerlegungen $\mathcal{P}$ mit Stützstellen ξ gilt $S(f, \mathcal{P}, \xi) \geqslant S(g, \mathcal{P}, \xi)$, was im Fall $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ zu einem Widerspruch in der Definition des Riemann-Integrals führen würde.

d) Ist $f : I \to E$ Riemann-integrierbar, dann ist $f|_{I'} : I' \to E$ für jedes Teilintervall $I' \subset I$ auch Riemann-integrierbar. *Hinweis: Cauchy-Kriterium.*

Kommentar: Laut dem Cauchyschen Integrierbarkeitskriterium gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{P}_\epsilon$ von I, so dass für alle Verfeinerungen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \geqslant \mathcal{P}_\epsilon$ mit entsprechenden Stützstellen ξ bzw. ξ', die dazugehörenden Riemannschen Summen die Ungleichung

$$\|S(f, \mathcal{P}, \xi) - S(f, \mathcal{P}', \xi')\| < \epsilon$$

erfüllen. In dieser Aussage darf $\mathcal{P}_\epsilon$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer mit einer Verfeinerung von $\mathcal{P}_\epsilon$ ersetzt werden. Gegeben $I' = [\alpha, \beta] \subset I$, dürfen wir insbesondere (wenn nötig) $\mathcal{P}_\epsilon$ durch das Hinzufügen der Punkte α und β verfeinern, so dass diese o.B.d.A. zu $\mathcal{P}_\epsilon$ gehören. Dann hat jede Verfeinerung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{P}_\epsilon$ die Form einer Vereinigung

$$\mathcal{P} = \check{\mathcal{P}} \cup \bar{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{P}},$$

wobei $\check{\mathcal{P}}$, $\bar{\mathcal{P}}$ und $\widehat{\mathcal{P}}$ jeweils Zerlegungen von den Intervallen $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ und $[\beta, b]$ sind. (Falls $\alpha = a$ oder $\beta = b$ sollten wir das Intervall $[a, \alpha]$ bzw. $[\beta, b]$ hier weglassen.) So wie in Teilaufgabe b) können jetzt alle Riemannschen Summen bzgl. $\mathcal{P}$ als Summen von drei Riemannschen Summen für Funktionen eingeschränkt auf diesen drei Intervallen geschrieben werden. Betrachten wir nun die Zerlegung $\bar{\mathcal{P}}_\epsilon$ von I', die auf diese Weise von $\mathcal{P}_\epsilon$ bestimmt wird. Aus beliebigen Verfeinerungen $\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{P}}' \geqslant \bar{\mathcal{P}}_\epsilon$ können jetzt Verfeinerungen von $\mathcal{P}_\epsilon$ in der Form

$$\mathcal{P} := \check{\mathcal{P}}_\epsilon \cup \bar{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{P}}_\epsilon, \qquad \mathcal{P}' := \check{\mathcal{P}}_\epsilon \cup \bar{\mathcal{P}}' \cup \widehat{\mathcal{P}}_\epsilon,$$

definiert werden. Wichtig in dieser Definition ist, dass $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ auf den Teilintervallen $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ übereinstimmen. Jede Wahl von Stützstellen $\bar{\xi}$ bzw. $\bar{\xi}'$ für $\bar{\mathcal{P}}$ und $\bar{\mathcal{P}}'$ kann dann auf die weiteren Teilintervalle erweitert werden, um Stützstellen ξ bzw. ξ' für $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{P}'$ zu definieren, wobei wir diese Erweiterung so wählen dürfen, dass auf $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ die Punkte in ξ und ξ' übereinstimmen. Die Erweiterung ist also dafür definiert, dass die Teile der Riemannschen Summen $S(f, \mathcal{P}, \xi)$ und $S(f, \mathcal{P}', \xi')$, die auf $I \backslash I'$ berechnet werden, genau gleich sind. Es folgt,

$$\left\|S(f|_{I'}, \bar{\mathcal{P}}, \bar{\xi}) - S(f|_{I'}, \bar{\mathcal{P}}', \bar{\xi}')\right\| = \left\|S(f, \mathcal{P}, \xi) - S(f, \mathcal{P}', \xi')\right\| < \epsilon,$$

also erfüllt auch $f|_{I'} : I' \to E$ das Cauchysche Integrierbarkeitskriterium.

e) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$, dann gilt $\int_a^b f(x)\, dx > 0$. *Hinweis: Wenden Sie Teilaufgaben b), c) und d) an.*

Kommentar: Da f stetig ist und $f(x_0) > 0$ erfüllt, gibt es eine Konstante $c > 0$ und ein kompaktes Intervall $I' = [\alpha, \beta] \subset I$ von positiver Länge, so dass $x_0 \in I'$ und $f|_{I'} \geqslant c$. Aus Teilaufgabe d) wissen wir, dass f auf sowohl I' als auch die zu $\overline{I \backslash I'}$ gehörenden kompakten Intervallen $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ Riemann-integrierbar ist. Es ist leicht zu zeigen, dass die konstanten Funktion mit Werten c und 0 auch Riemann-integrierbar sind und diese Integralle auszurechnen; laut Teilaufgaben b) und c) gilt dann

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^\alpha f(x)\, dx + \int_\alpha^\beta f(x)\, dx + \int_\beta^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^\alpha 0\, dx + \int_\alpha^\beta c\, dx + \int_\beta^b 0\, dx \\ &= c(\beta - \alpha) > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 (3 + 2 Punkte)

a) Sei E ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \to E$ eine auf jedem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktion, die auch eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to E$ besitzt, und die auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ aber *nicht unbedingt in* $x = 0$ stetig ist. Beweisen Sie, dass $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ dann eine Stammfunktion von f ist.

Kommentar: Laut dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist g überall stetig und für alle $x \neq 0$ auch differenzierbar, mit $g'(x) = f(x)$. Vom Hauptsatz ist aber nicht klar, ob g auch in $x = 0$ differenzierbar ist, oder ob in diesem Fall $g'(0) = f(0)$. Aber wenn angenomennen wird, dass $f : \mathbb{R} \to E$ eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to E$ besitzt, dann gilt $(F - g)'(x) = 0$ für alle $x \neq 0$, also ist $F - g$ auf jedem der Intervalle $(0, \infty)$ und $(-\infty, 0)$ konstant. Hier wäre im Prinzip möglich, dass $g(x) = F(x) + b$ für $x > 0$ und $g(x) = F(x) + a$ für $x < 0$ mit verschiedenen Konstanten $a, b \in E$. Aber da F überall differenzierbar ist, ist F auch überall stetig, und wir wissen auch, dass g überall stetig ist, also gilt

$$g(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = F(0) + a = \lim_{x \to 0^+} g(x) = F(0) + b,$$

woraus $a = b$ folgt. Jetzt haben wir überall $g(x) = F(x) + a$ für eine Konstante $a \in E$, und es folgt, dass g auch in $x = 0$ differenzierbar ist, mit $g'(0) = F'(0) = f(0)$.

b) Finden Sie eine auf jedem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die Funktion $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ aber nicht in $x = 0$ differenzierbar ist, und folgern Sie, dass f keine Stammfunktion besitzt.

Kommentar: Für die stückweise stetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

hat $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ die Form $g(x) = |x|$, ist also nicht in $x = 0$ differenzierbar. Laut Teilaufgabe a) folgt, dass f keine Stammfunktion haben kann.

Achtung: In der Vorlesung wurde vom Mittelwertsatz ein Resultat über Riemann-integrierbare Funktionen $I \to \mathbb{R}^m$ mit Stammfunktionen hergeleitet, das aber in Teilaufgabe a) nicht gilt, weil E nicht $\mathbb{R}^m$ sondern ein beliebiger Banachraum ist. Es wurde aber auch eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen, die nicht voraussetzt, dass f überall stetig ist.

Aufgabe 10.4 (3 Punkte) Beweisen Sie direkt von der Definition der Integrierbarkeit,[1] dass die folgende Funktion nicht Riemann-integrierbar ist:

$$\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad \delta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational}, \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational}, \end{cases}$$

Kommentar: Für jede Zerlegung $\mathcal{P}$ von $[0, 1]$ kann man die Stützstellen ξ_k alle rational wählen, damit $\delta(\xi_k) = 1$ für alle k gilt, und die entsprechende Riemannsche Summe ist dann 1. Aber man kann genau so gut ξ_k alle irrational wählen, damit die Riemannsche Summe 0 ist.

Insgesamt: **26 Punkte**

[1] Im Skript von Helga Baum wird dieses Resultat als Konsequenz des Lebesgueschen Integrierbarkeitskriteriums hergeleitet, aber dies wurde in unserer Vorlesung nicht bewiesen, also dürfen Sie es hier nicht anwenden.

Aufgabe 10.Z (3 + 3 Punkte)
Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, und bezeichne mit $C^k(I)$ der Vektorraum von k-fach stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. In Aufgabe 3.Z wurde für jede ganze Zahl $k \geqslant 0$ eine Norm $\|\cdot\|_{C^k}$ auf $C^k(I)$ definiert, so dass $C^k(I)$ ein Banachraum und $C^k(I) \to C^0(I) : f \mapsto f^{(k)}$ eine stetige lineare Abbildung wird. In dieser Aufgabe betrachten wir die Teilmenge

$$X^k := \{f \in C^k(I) \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

Dies ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $C^k(I)$, und daher auch ein Banachraum mit der gleichen Norm. Beweisen Sie:

a) Die stetige lineare Abbildung $\mathbf{T} : X^2 \to C^0(I) : f \mapsto f''$ ist bijektiv.

Kommentar: $f \in \ker \mathbf{T}$ impliziert $f''(x) = 0$ für alle x, also ist f eine affine Funktion $f(x) = Ax + B$, mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$, Eine solche Funktion erfüllt $f(a) = f(b) = 0$ genau dann, wenn $A = B = 0$, also ist $\mathbf{T}$ injectiv. Für Surjektivität, sei $h \in C^0(I)$ eine beliebige stetige Funktion, und konstruiere eine Stammfunktion davon in der Form $g(x) := \int_0^1 f(t)\,dt$. Dieses Verfahren können wir dann wiederholen, um eine Stammfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ von g zu konstruieren, die dann in $C^2(I)$ ist und $f'' = h$ erfüllt, aber nicht unbedingt die Randbedingung $f(a) = f(b) = 0$. Für beliebige Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllt aber $F(x) := f(x) + Ax + B$ auch $F'' = h$, und die Konstanten können so gewählt werden, dass auch $F(a) = F(b) = 0$ gilt.

b) Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für jedes $f \in X^2$, gilt $\|f\|_{C^0} \leqslant c\|f'\|_{C^0}$ und $\|f'\|_{C^0} \leqslant c\|f''\|_{C^0}$, und $\mathbf{T}^{-1} : C^0(I) \to X^2$ ist daher stetig.
Hinweis: Diese Ungleichungen sind falsch für $f \in C^2(I)$ im Allgemeinen—sie hängen also wesentlich von der Randbedingung $f(a) = f(b) = 0$ ab, die unter Anderem impliziert, dass auch f' irgendwo in (a,b) verschwinden muss. (Warum?)

Kommentar: für jedes $f \in X^2$ gilt $f(a) = f(b) = 0$, und f ist außerdem 2-fach stetig differenzierbar. Für jedes $x \in [a,b]$ impliziert der Mittelwertsatz die Existenz eines Punktes $\xi \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} = f'(\xi),$$

also $\|f(x)\| = \|(x-a)f'(\xi)\| \leqslant (x-a)\cdot\|f'(\xi)\| \leqslant (b-a)\cdot\|f'\|_{C^0}$, womit die Abschätzung $\|f\|_{C^0} \leqslant c\|f'\|_{C^0}$ mit $c := b-a > 0$ bewiesen ist. Ein alternatives Argument für diese Abschätzung verwendet statt des Mittelwertsatzes den Hauptsatz der Differential- und Integralrechung: wegen $f' \in C^0(I)$ und $f(a) = 0$ gilt nämlich

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt,$$

and daher

$$\|f(x)\| = \left\|\int_a^x f'(t)\,dt\right\| \leqslant (x-a)\max_{t\in[a,x]}\|f'(t)\| \leqslant (b-a)\|f'\|_{C^0}.$$

Für die zweite Abschätzung $\|f'\|_{C^0} \leqslant c\|f''\|_{C^0}$ ist nützlich, zu bemerken, dass der Satz von Rolle wegen der Randbedingungen $f(a) = f(b) = 0$ einen Punkt $\xi_1 \in (a,b)$ mit $f'(\xi_1) = 0$ liefert. Da f' auch differenzierbar ist, folgt dann wieder vom Mittelwertsatz, dass für alle $x \in [a,b]$, ein Punkt ξ_2 zwischen ξ_1 und x existiert, so dass

$$\frac{f'(x) - f'(\xi_1)}{x - \xi_1} = \frac{f'(x)}{x - \xi_1} = f''(\xi_2) \quad\Rightarrow\quad \|f'(x)\| \leqslant |x-\xi_1|\cdot\|f''(\xi_2)\| \leqslant (b-a)\|f''\|_{C^2},$$

also $\|f'\|_{C^0} \leqslant (b-a)\|f''\|_{C^0}$. Auch hier hätten wir die Option, statt des Mittelwertsatzes den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden, denn

$$f'(x) = f'(x) - f'(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{x} f''(t)\,dt$$

impliziert

$$\|f'(x)\| = \left\| \int_{\xi_1}^{x} f''(t)\,dt \right\| \leqslant |x - \xi_1| \cdot \max_{t\in[a,b]} \|f''(t)\| \leqslant (b-a)\|f''\|_{C^0}.$$

Als letztes folgern wir von den zwei Abschätzungen $\|f\|_{C^0} \leqslant c\|f'\|_{C^0}$ und $\|f'\|_{C^0} \leqslant c\|f''\|_{C^0}$, dass $\mathbf{T}^{-1} : C^0(I) \to X^2$ stetig ist. Sei $h_n \in C^0(I)$ eine konvergente Folge mit $h_n \to h \in C^0(I)$, und sei $f_n := \mathbf{T}^{-1}(h_n) \in X^2$ und $f := \mathbf{T}^{-1}(h) \in X^2$. Wir müssen zeigen, dass die Folge $f_n \in C^2(I)$ gegen $f \in C^2(I)$ konvergiert, was bedeuten würde, dass die Normen

$$\|f - f_n\|_{C^2} := \|f - f_n\|_{C^0} + \|(f - f_n)'\|_{C^0} + \|(f - f_n)''\|_{C^0}$$

bei $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Das ist genau dann so, wenn es gleichmässige Konvergenz für die drei Funktionenfolgen $f_n \to f$, $f_n' \to f'$ und $f_n'' \to f''$ gibt. Per Annahme konvergiert $h_n \to h$ gleichmässig, und es gilt $\mathbf{T}(f_n) = f_n'' = h_n$ und $\mathbf{T}(f) = f'' = h$, also konvergiert $f_n'' \to f''$ tatsächlich gleichmässig. Da $f - f_n$ für jedes n in X^2 liegt, implizieren unsere zwei Abschätzungen dann

$$\|f' - f_n'\|_{C^0} \leqslant c\|f'' - f_n''\|_{C^0} \to 0, \quad \text{und daher} \quad \|f - f_n\|_{C^0} \leqslant c\|f' - f_n'\|_{C^0} \to 0.$$

Dies beweist die Konvergenz $f_n \to f$ in $C^2(I)$ und folglich die Stetigkeit der Abbildung $\mathbf{T}^{-1} : C^0(I) \to X^2$.

Abschweifung: Hier eine Anwendung des Resultats von Aufgabe 10.Z. In der Physik begegnet man oft sogenannten Randwertproblemen*: man sucht nach einer Funktion auf einem gegebenen Definitionsbereich, deren Werte auf dem Rand des Bereiches gegeben sind, und die im Inneren wegen physikalischer Gesetze eine bestimmte Differentialgleichung erfüllen soll. Ein Beispiel ist folgendes: es seien $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen, und wir suchen nach einer 2-mal differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die die Bedingungen*

$$\begin{cases} f''(x) + g(x)f(x) = h(x) \text{ für alle } x, \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt. Wir haben in Aufgabe 10.Z(a) gezeigt, dass im Fall $g = 0$ immer eine eindeutige Lösung $f := \mathbf{T}^{-1}(h)$ existiert. Das ist der leichte Fall, denn man kann die Lösung mehr oder weniger explizit hinschreiben, in dem man h zweimal integriert und dann geeignete Konstanten findet, damit die Randbegingungen erfüllt sind. Im Fall $g \neq 0$ ist es bei weitem nicht mehr klar, wie man eine Lösung finden soll, oder ob eine überhaupt existiert. Hier kann die abstrakte Analysis helfen. Wir behaupten:

Theorem: *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass das Randwertproblem (1) für alle Funktionen $g, h \in C^0(I)$ mit $\|g\|_{C^0} < c$ eine eindeutige Lösung $f \in C^2(I)$ hat.*

Die grobe Idee hinter diesem Resultat ist, dass das Problem (1) für eine gegebene kleine Funktion $g \in C^0(I)$ durch eine stetige lineare Abbildung $\mathbf{T}_g : X^2 \to C^0(I)$ beschrieben werden kann, die nur eine kleine Störung von $\mathbf{T}$ ist und deswegen auch invertierbar *sein muss. Hierfür brauchen wir ein paar allgemeine Begriffe. Erstens, für gegebene Banachräume E und F ist der Raum $\mathscr{L}(E,F)$ von stetigen linearen Abbildungen $\mathbf{A}: E \to F$ ein Vektorraum, und er hat eine natürliche Norm, definiert genau so wie im endlichdimensionalen Fall (vgl. Aufgabe 2.2(b)) durch*

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{A}v\|}{\|v\|}.$$

Dass dieses Supremum immer endlich ist, folgt von der Annahme, dass $\mathbf{A}: E \to F$ stetig sei. Es ist leicht zu zeigen, dass für zwei stetige lineare Abbildungen, die verknüpft werden können, die Ungleichung

$$\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

immer gilt. Weiter, der Vektorraum $\mathscr{L}(E,F)$ mit dieser Norm ist vollständig, d.h. er ist ein Banachraum. Das ist nicht ganz offensichtlich, aber auch nicht besonders schwierig—der Beweis dauert etwa eine Seite und kommt in jeder Vorlesung über Funktionalanalysis irgendwann vor. Wenn Sie bereit sind, dies zu glauben, dann kann man jetzt die ganze Argumentation von Aufgabe 5.5 in diesem Kontext wiederholen, um zu beweisen, dass für jede $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(E,E)$ mit $\|\mathbf{A}\| < 1$, die Abbildung $\mathbb{1} + \mathbf{A} \in \mathscr{L}(E,E)$ eine stetige Inverse der Form

$$(\mathbb{1} + \mathbf{A})^{-1} = \mathbb{1} + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{A}^k \in \mathscr{L}(E,E)$$

hat. Dieses Resultat kann dann für eine invertierbare Abbildung zwischen zwei verschiedenen Banachräumen adaptiert werden: wenn $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(E,F)$ eine stetige Inverse $\mathbf{A}^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ hat und $\mathbf{B} \in \mathscr{L}(E,F)$ klein genug ist, so dass $\|\mathbf{B}\| < 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$, dann gilt $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\| < 1$, und folglich hat $\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ eine stetige Inverse, also hat auch $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ eine stetige Inverse in der Form

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = (\mathbb{1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1} \in \mathscr{L}(F,E).$$

Um diese Überlegungen für unser Randwertproblem anzuwenden, definieren wir für jede Funktion $g \in C^0(I)$ eine lineare Abbildung $\mathbf{T}_g : X^2 \to C^0(I)$ durch

$$\mathbf{T}_g f := f'' + gf.$$

Für jedes $f \in X^2$ gilt $\|\mathbf{T}_g f\|_{C^0} \leqslant \|f''\|_{C^0} + \|gf\|_{C^0} \leqslant \|f''\|_{C^0} + \|g\|_{C^0} \cdot \|f\|_{C^0} \leqslant c(\|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0} + \|f''\|_{C^0}) = c\|f\|_{C^2}$ für eine durch $\|g\|_{C^0}$ bestimmte Konstante $c > 0$, und folglich ist $\mathbf{T}_g : X^2 \to C^0(I)$ stetig. Weiter, es gilt

$$\|(\mathbf{T}_g - \mathbf{T})f\|_{C^0} = \|gf\|_{C^0} \leqslant \|g\|_{C^0} \cdot \|f\|_{C^0} \leqslant \|g\|_{C^0} \cdot \|f\|_{C^2},$$

also $\|\mathbf{T}_g - \mathbf{T}\| \leqslant \|g\|_{C^0}$. Da $\mathbf{T}$ eine stetige Inverse hat, folgt dann, dass für $\|g\|_{C^0}$ klein genug, $\mathbf{T}_g$ auch invertierbar ist, und die eindeutige Lösung zu (1) für eine beliebig gegebene $h \in C^0(I)$ ist dann $f := \mathbf{T}_g^{-1}(h)$.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 10.A Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^t \sin \pi t \, dt$ und $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} \, dx$.

Aufgabe 10.B Beweisen Sie die folgenden weiteren Eigenschaften des Riemann-Integrals für Funktionen $I := [a,b] \to E$, wobei E ein Banachraum ist über den Körper $\mathbb{K}$:

a) Integration ist linear, d.h. für gegebene Riemann-integrierbare Funktionen $f, g : I \to E$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g : I \to E$ auch Riemann-integrierbar, mit $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$.

Kommentar: Dies folgt im Wesentlichen davon, dass die Riemannschen Summen für eine beliebige Zerlegung mit beliebigen Stützstellen auch diese Eigenschaft haben.

b) Gegeben ein zweiter Banachraum F, eine lineare Abbildung $\mathbf{L} : E \to F$ heißt *beschränkt*, falls existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|\mathbf{L}v\| \leqslant c\|v\|$ für alle $v \in E$ gilt.[2] Falls $f : I \to E$ Riemann-integrierbar und $\mathbf{L} \in \mathscr{L}(E, F)$ beschränkt ist, dann ist $\mathbf{L} \circ f : I \to F$ auch Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \mathbf{L}(f(x))\, dx = \mathbf{L}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right).$$

Beweisen Sie damit die Formeln $\int_a^b \overline{f(x)}\, dx = \overline{\int_a^b f(x)\, dx}$ und $\int_a^b (f_1(x), f_2(x))\, dx = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx, \int_a^b f_2(x)\, dx\right)$ für komplex- bzw. vektorwertige Funktionen.

Kommentar: Zu zeigen ist: wenn $f : I \to E$ Riemann-integrierbar ist, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{P}_\epsilon$ von I, so dass für beliebige Verfeinerungen $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $\mathcal{P}_\epsilon$ mit beliebigen Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \mathbf{L}(f(\xi_k)) - \mathbf{L}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \right\| < \epsilon.$$

Angesichts der Linearität von $\mathbf{L}$ und der Schranke $\|\mathbf{L}v\| \leqslant c\|v\|$, erfüllt die linke Seite dieser Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \mathbf{L}(f(\xi_k)) - \mathbf{L}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \right\| &= \left\| \mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) - \int_a^b f(x)\, dx \right) \right\| \\ &\leqslant c \left\| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) - \int_a^b f(x)\, dx \right\|. \end{aligned}$$

Wegen der Riemann-Intergrierbarkeit von f kann jetzt $\mathcal{P}_\epsilon$ so gewählt werden, dass die Norm auf der rechten Seite in dieser Relation immer kleiner als ϵ/c ist, und das Resultat folgt.

Ein Beispiel für dieses Resultat ist der Fall $E = F = \mathbb{C}$, mit $\mathbf{L} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z}$. Hier ist $\mathbf{L}$ wegen der Relation $\mathbf{L}(\lambda z) = \bar{\lambda}\mathbf{L}z$ keine komplex-lineare Abbildung, aber wir müssen $\mathbb{C}$ nicht zwingend als komplexer Vektorraum betrachten; $\mathbb{C}$ hat auch auf natürliche Weise die Struktur eines (2-dimensionalen) reellen Vektorraum, und $\mathbf{L}$ ist in dieser Hinsicht eine reell-lineare Abbildung. Dies liefert die Formel

$$\int_a^b \overline{f(x)}\, dx = \overline{\int_a^b f(x)\, dx}$$

für integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Zwei eng damit verbundene Beispiele sind die reell-lineare Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definiert durch den reellen Teil $\mathbf{L}(z) := \Re z$ bzw. imaginären Teil $\mathbf{L}(z) := \Im z$; diese liefern die Formeln

$$\Re \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \Re f(x)\, dx, \qquad \Im \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \Im f(x)\, dx.$$

[2] Folgendes lässt sich eher leicht beweisen: eine lineare Abbildung $\mathbf{L} : E \to F$ ist beschränkt genau dann, wenn sie stetig ist. Wir wissen insb., dass $\mathbf{L}$ immer beschränkt ist, falls $\dim E < \infty$.

Für eine beliebige endliche Liste von endlich-dimensionalen Vektorräume $E_1, \ldots, E_m$ kann man auch die Projektionen

$$\mathbf{L} := \pi_j : E_1 \times \ldots \times E_m \to E_j : (v_1, \ldots, v_m) \mapsto v_j$$

für jedes $j = 1, \ldots, m$ betrachten. Screiben wir eine Funktion $f : [a, b] \to E_1 \times \ldots \times E_m$ als $f = (f_1, \ldots, f_m)$ mit Komponentenfunktionen $f_j := \pi_j \circ f : [a, b] \to E_j$ für $j = 1, \ldots, m$, dann impliziert dies die Formel

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx, \ldots, \int_a^b f_m(x)\, dx \right) \in E_1 \times \ldots \times E_m.$$

Hier noch ein letztes Beispiel, weil es vor Kurzem in der Vorlesung aufgetreten ist: für einen gegebenen Banachraum E und einen gegebenen Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathbf{L} : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E) \to E : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{Ah}$$

eine stetige lineare Abbildung. Linearität ist klar; Stetigkeit folgt, denn eine konvergente Folge $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$ in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ bestimmt eine konvergente Folge $\mathbf{A}_k\mathbf{h} \to \mathbf{Ah}$ in E wegen der Abschätzung

$$\|\mathbf{Ah} - \mathbf{A}_k\mathbf{h}\| = \|(\mathbf{A} - \mathbf{A}_k)\mathbf{h}\| \leqslant \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\| \cdot \|\mathbf{h}\| \to 0.$$

Dieses Beispiel wird eingesetzt im Beweis der Integralform des Mittelwertsatzes für eine Funktion $f \in C^1(\mathcal{U}, E)$ auf eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: für gegebene Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathcal{U}$ mit $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \mathcal{U}$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\Big|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, dt = \int_0^1 Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\mathbf{h}\, dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{L}\big(Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\big)\, dt = \mathbf{L}\left(\int_0^1 Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, dt \right) = \left(\int_0^1 Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\, dt \right) \mathbf{h}. \end{aligned}$$