HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*
SoSe 2019

Übungsblatt 6

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 23. Mai 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y+2}$, im Punkt $a = (0,0)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung.

Aufgabe 6.2 (2 + 2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_i f(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ existieren und $\partial_i f(x) = 0$ erfüllen, dann ist f auf $\mathbb{R}^n$ konstant.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x f(x,y) = x$ und $\partial_y f(x,y) = y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Zeigen Sie: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $V(x,y) = (-y,x)$ ist nicht der Gradient ∇f einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.3 (2 + 3 + 3 Punkte)
Seien $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ q-fach stetig differenzierbare Funktionen, $q \geq 1$, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen mit $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ sind. Beweisen Sie:

a) $\partial_i (g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_j g)(f(x)) \cdot \partial_i f_j(x)$ für $i = 1, \ldots, n$.
Hinweis: In der Vorlesung haben wir die Kettenregel für Differentiale bewiesen aber keine allgemeine Schlussfolgerung für partielle Ableitungen gezogen.

b) Falls $q \geq 2$, dann gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\partial_i \partial_j (g \circ f)(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} (\partial_k \partial_\ell g)(f(x)) \cdot \partial_i f_k(x) \cdot \partial_j f_\ell(x) + \sum_{k=1}^{m} (\partial_k g)(f(x)) \cdot \partial_i \partial_j f_k(x).$$

c) Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq q$ ist die Ableitung $\partial^\alpha (g \circ f)(x) := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} (g \circ f)(x)$ eine endliche Summe von Produkten von Ableitungen $(\partial^\beta g)(f(x))$ and $\partial^\gamma f_k(x)$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$ und Multiindizes $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ mit $|\beta|, |\gamma| \leq |\alpha|$.

Aufgabe 6.4 (4 + 2 Punkte)
Sei E ein normierter Vektorraum und $f : \mathbb{R}^n \to E$ eine Funktion gegeben durch $f(x) = \mu_k(x, \ldots, x)$, wobei $\mu_k : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to E$ eine k-fach multilineare Abbildung ist.

a) Beweisen Sie, dass f in jedem Punkt differenzierbar ist, mit Ableitung $Df : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ gegeben durch $Df(x) = \mu_{k-1}(x, \ldots, x)$ für eine $(k-1)$-fach multilineare Abbildung $\mu_{k-1} : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$.

b) Beweisen Sie: f ist glatt und es gilt $D^{k+1}f(x) = 0$.

Insgesamt: **24 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 6.Z (3 + 2 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, E ein normierter Vektorraum und $f : \mathcal{U} \to E$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung gegeben ist durch $Df(x)h = \mu_2(f(x), f(x))h$ für eine stetige bilineare Abbildung $\mu_2 : E \times E \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Zeigen Sie: Gegeben ein normierter Vektorraum E' und eine stetige k-fach multilineare Abbildung $\mu_k : E \times \ldots \times E \to E'$, die Funktion
$$g : \mathcal{U} \to E' : x \mapsto \mu_k(f(x), \ldots, f(x))$$
ist auch differenzierbar, mit Ableitung in der Form
$$Dg(x)h = \mu_{k+1}(f(x), \ldots, f(x))h$$
für eine stetige $(k+1)$-fach multilineare Abbildung $\mu_{k+1} : E \times \ldots \times E \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E')$.

b) Beweisen Sie, dass die Funktion $\iota : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ in Aufgabe 5.5(c) glatt ist.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 6.A
Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung für
$$f(x, y) = xy^2 + \sin(x^6) \quad \text{und} \quad g(x, y) = \left(x + \cos y, \frac{x}{1 + y}\right).$$

Aufgabe 6.B
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, E ein beliebiger normierter Vektorraum, und bezeichne mit $\mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, E)$ der Vektorraum von k-fach multilinearen Abbildungen
$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to E.$$
Für Funktionen $f : \mathcal{U} \to E$ wurden Ableitungen höherer Ordnung in der Vorlesung durch die folgende induktive Regel definiert: falls $D^{k-1}f : \mathcal{U} \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ differenzierbar ist, dann ist f k-fach differenzierbar und ihre k-te Ableitung ist die Funktion

$D^k f : \mathcal{U} \to \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, E)$ gegeben durch $D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) := \left[D(D^{k-1}f)(x)v_1\right](v_2, \ldots, v_k)$,

wobei $D(D^{k-1}f)(x)$ als lineare Abblidung $\mathbb{R}^n \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ zu verstehen ist, also ist $D(D^{k-1}f)(x)v_1$ eine $(k-1)$-fache multilineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to E$. Beweisen Sie:

a) Für k Vektoren $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n) \in \mathbb{R}^n$ mit $i = 1, \ldots, k$ gilt die Formel
$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x).$$

b) Falls $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$, dann ist die multilineare Abbildung $D^k f(x) \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ symmetrisch, d.h. der Wert von $D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k)$ ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ beliebig permutiert wird.