Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 6 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 23. Mai 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y+2}$, im Punkt $a = (0,0)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung.

Antwort: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2$

Aufgabe 6.2 (2 + 2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_i f(x)$ für $i = 1, \dots, n$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ existieren und $\partial_i f(x) = 0$ erfüllen, dann ist f auf $\mathbb{R}^n$ konstant.

Kommentar: Hier wurde nicht gesagt, dass f differenzierbar ist, aber es folgt von den anderen Annahmen, denn die partiellen Ableitungen sind offensichtlich stetig (Satz aus der Vorlesung). Außerdem ist $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend, also kann man noch einen Satz aus der Vorlesung dann einfach zitieren: differenzierbare Funktionen mit verschwindenden Ableitungen auf einer zusammenhängenden offenen Menge sind konstant.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x f(x,y) = x$ und $\partial_y f(x,y) = y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Kommentar: Ein Beispiel einer Funktion mit beiden Eigenschaften ist $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$. Wenn $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist und beide Eigenschaften hat, dann gilt $\partial_x(f-g) = \partial_y(f-g) = 0$, also laut Teil a) ist $f-g$ konstant, d.h. g ist in der Form $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie: Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $V(x,y) = (-y,x)$ ist nicht der Gradient ∇f einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Kommentar: Falls $V(x,y) = \nabla f(x,y)$, dann erfüllt f die Gleichungen

$$\partial_x f(x,y) = -y \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = x.$$

Ein Beispiel einer Funktion, die die erste Gleichung erfüllt, ist $g(x,y) := -xy$, und $h := f - g$ muss dann $\partial_x h(x,y) = 0$ erfüllen. Letzteres impliziert: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto h(x,y_0)$ konstant, also gibt es eine Funktion $\hat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $h(x,y) = \hat{h}(y)$, und es folgt

$$f(x,y) = -xy + \hat{h}(y).$$

Die zweite Gleichung impliziert dann $\partial_y f(x,y) = -x + \hat{h}'(y) = x$, also muss $\hat{h}'(y) = 2x$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten. Das ist unmöglich, denn die Ableitung $\hat{h}'(y)$, wenn sie existiert, ist nur eine Funktion von y und nicht von x abhängig. Konkreter könnte man hier z.B. wie folgt argumenieren: falls $\hat{h}'(y) = 2x$ für alle x und y gilt, dann gilt *es insb. für $x = 0$ und $x = 1$, was heißt, die Gleichungen $\hat{h}'(y) = 0$ und $\hat{h}'(y) = 2$ müssen beide erfüllt werden. Das führt zum Widerspruch $0 = 2$.*

Eine etwas elegantere Argumentation geht aber so: Wenn $\nabla f(x, y) = V(x, y)$ gilt, dann ist f in $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, da $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\partial_x\partial_y f(x, y) = \partial_y\partial_x f(x, y)$ dann gelten muss. Aber es gilt nicht, denn $\nabla f(x, y) = V(x, y)$ bedeutet $\partial_x f(x, y) = -y$ und $\partial_y f(x, y) = x$, also

$$\partial_x\partial_y f(x, y) = \partial_x x = 1 \neq -1 = \partial_y(-y) = \partial_y\partial_x f(x, y).$$

Aufgabe 6.3 (2 + 3 + 3 Punkte)
Seien $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ q-fach stetig differenzierbare Funktionen, $q \geq 1$, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen mit $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ sind. Beweisen Sie:

a) $\partial_i(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_j g)(f(x)) \cdot \partial_i f_j(x)$ für $i = 1, \dots, n$.

Hinweis: In der Vorlesung haben wir die Kettenregel für Differentiale bewiesen aber keine allgemeine Schlussfolgerung für partielle Ableitungen gezogen.

Kommentar: In der Vorlesung wurde im Fall $m = 2$ gezeigt, wie eine solche Formel durch Multiplizieren von Jacobi-Matrizen als Korollar der Kettenregel für Differentiale folgt. Der allgemeine Fall wird eigentlich im Skript von Helga Baum gemacht (Satz 6.10, Seite 196).

b) Falls $q \geq 2$, dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$,

$$\partial_i\partial_j(g \circ f)(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} (\partial_k\partial_\ell g)(f(x)) \cdot \partial_i f_k(x) \cdot \partial_j f_\ell(x) + \sum_{k=1}^{m} (\partial_k g)(f(x)) \cdot \partial_i\partial_j f_k(x).$$

c) Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq q$ ist die Ableitung $\partial^\alpha(g \circ f)(x) := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}(g \circ f)(x)$ eine endliche Summe von Produkten von Ableitungen $(\partial^\beta g)(f(x))$ and $\partial^\gamma f_k(x)$ für $k \in \{1, \dots, m\}$ und Multiindizes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit $|\beta|, |\gamma| \leq |\alpha|$.

Kommentar: Gegeben $q \geq 2$ nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass die Behauptung für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq q - 1$ stimmt. (Der Fall $q = 1$ folgt von Teil a).) Für einen gegebenen Multiindex α mit $|\alpha| = q$ können wir dann $\partial^\alpha = \partial_i\partial^\beta$ schreiben, wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ und β ein Multiindex mit $|\beta| = q - 1$ ist. Laut Induktionsvoraussetzung ist $\partial^\beta(g \circ f)(x)$ eine endliche Summe von Produkten der Form

$$P(x) = P_1(x) \cdot \ldots \cdot P_\ell(x),$$

wobei jede Funktion $P_j(x)$ entweder die Form $(\partial^\gamma g)(f(x))$ oder $\partial^\gamma f_k(x)$ hat, für $k \in \{1, \dots, m\}$ und Multiindizes γ mit $|\gamma| \leq q - 1$. Laut der Produktregel gilt dann

$$\partial_i P(x) = \partial_i P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_\ell(x) + P_1(x) \cdot \partial_i P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_\ell(x) + \\ \ldots + P_1(x) \cdot \ldots \cdot P_{\ell-1}(x) \cdot \partial_i P_\ell(x).$$

Hier gilt wegen Teil a)

$$\partial_i\left[(\partial^\gamma g)(f(x))\right] = \partial_i((\partial^\gamma g) \circ f)(x) = \sum_{j=1}^{m} (\partial_j\partial^\gamma g)(f(x)) \cdot \partial_i f_j(x),$$

und der Operator $\partial_j \partial^\gamma$ kann als ∂^δ für einen Multiindex δ mit $|\delta| \leq q$ verstanden werden. Ebenfalls kann $\partial_i \partial^\gamma f_k(x)$ als $\partial^\delta f_k(x)$ für einen Multiindex δ mit $|\delta| \leq q$ geschrieben werden. Wir sehen also, dass $\partial_i P(x)$ eine endliche Summe von Produkten solcher Terme ist, daher ist $\partial^\alpha(g \circ f)(x) = \partial_i \partial^\beta (g \circ f)(x)$ ebenfalls eine endliche Summe dieser Art.

Aufgabe 6.4 (4 + 2 Punkte)
Sei E ein normierter Vektorraum und $f : \mathbb{R}^n \to E$ eine Funktion gegeben durch $f(x) = \mu_k(x, \dots, x)$, wobei $\mu_k : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to E$ eine k-fach multilineare Abbildung ist.

a) Beweisen Sie, dass f in jedem Punkt differenzierbar ist, mit Ableitung $Df : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ gegeben durch $Df(x) = \mu_{k-1}(x, \dots, x)$ für eine $(k-1)$-fach multilineare Abbildung $\mu_{k-1} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$.

Kommentar: Hier hat man die Wahl, entweder Beispiel 3 auf Seite 186 im Skript von Helga Baum zu zitieren, oder die etwas allgemeinere Version aus der Vorlesung anzuwenden, d.h. dass die Ableitung einer Funktion der Form $f(x) = \mu_k(f_1(x), \dots, f_k(x))$ mit μ_k stetig[1] *und linear durch*

$$\begin{aligned} Df(x)h = {} & \mu_k(Df_1(x)h, f_2(x), \dots, f_k(x)) + \mu_k(f_1(x), Df_2(x)h, \dots, f_k(x)) + \dots \\ & + \mu_k(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), Df_k(x)h) \end{aligned}$$

gegeben ist. In diesem Fall ist das anwendbar mit $f_j := \mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \dots, k$, und weil die Identitätsabbildung $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear ist, gilt $Df_j(x) = \mathrm{Id} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Der Satz von der Vorlesung gibt also

$$Df(x)h = \mu_k(h, x, \dots, x) + \mu_k(x, h, \dots, x) + \dots \mu_k(x, \dots, x, h).$$

Nun definieren wir eine $(k-1)$-fach multilineare Abbildung $\mu_{k-1} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ durch

$$\begin{aligned} \mu_{k-1}(v_1, \dots, v_{k-1})h := {} & \mu_k(h, v_1, \dots, v_{k-1}) + \mu_k(v_1, h, v_2, \dots, v_{k-1}) + \dots \\ & + \mu_k(v_1, \dots, v_{k-1}, h). \end{aligned}$$

Man muss dann nachprüfen, dass μ_{k-1} tatsächlich multilinear ist, aber offensichtlich gilt $Df(x) = \mu_{k-1}(x, \dots, x)$ wie gewünscht.

b) Beweisen Sie: f ist glatt und es gilt $D^{k+1} f(x) = 0$.

Kommentar: Die Behauptung stimmt für $k = 1$, denn $f(x) = \mu_1(x)$ ist dann eine lineare Funktion $\mathbb{R}^n \to E$, und in dem Fall wurde in der Vorlesung die Formel $Df(x) = \mu_1 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ bewiesen, d.h. $Df : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ ist die konstante Funktion mit Wert μ_1 und erfüllt deswegen $D(Df) = 0$. Man beweist jetzt den allgemeinen Fall per Induktion, mit $k = 1$ als Induktionsanfang. Das heißt: als Induktionsvoraussetzung wird für eine gegebene ganze Zahl $k \geq 2$ angenommen, dass $D^{q+1} f = 0$ für alle Funktionen der Form $f(x) := \mu_q(x, \dots, x)$ mit μ_q q-fach multilinear und $q \leq k-1$ gilt. Wegen Teil a) gilt es dann insb. für $Df(x) = \mu_{k-1}(x, \dots, x)$,

[1] Wie bei linearen Abbildungen ist es bei einer multilinearen Abbildung $\mu : E_1 \times \dots \times E_k \to E$ automatisch, dass μ stetig ist, falls die Vektorräume $E_1, \dots, E_k$ alle endlich dimensional sind. Da diese alle im jetzigen Kontext $\mathbb{R}^n$ sind, wird deswegen die Stetigkeit von μ_k bzw. μ_{k-1} in dieser Diskussion sonst gar nicht erwähnt.

wenn f gegeben ist durch $f(x) = \mu_k(x, \dots, x)$ mit μ_k k-fach multilinear. Laut Induktionsvoraussetzung impliziert das

$$D^{k+1} f(x) = D^k(Df)(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Beliebte Beispiele von multilinearen Abbildungen sind durch Polynome gegeben, z.B. kann $f(x) := x^k$ als $f(x) = \mu_k(x, \dots, x)$ mit $\mu_k(x_1, \dots, x_k) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$ geschrieben werden. Wir haben also die bekannte Tatsache gerade verallgemeinert, dass ein Polynom von Grad k nichttriviale höhere Ableitungen nur bis zu Ordnung k hat.

Insgesamt: **24 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 6.Z (3 + 2 Punkte)

a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, E ein normierter Vektorraum und $f : \mathcal{U} \to E$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung gegeben ist durch $Df(x)h = \mu_2(f(x), f(x))h$ für eine stetige bilineare Abbildung $\mu_2 : E \times E \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Zeigen Sie: Gegeben ein normierter Vektorraum E' und eine stetige k-fach multilineare Abbildung $\mu_k : E \times \ldots \times E \to E'$, die Funktion

$$g : \mathcal{U} \to E' : x \mapsto \mu_k(f(x), \dots, f(x))$$

ist auch differenzierbar, mit Ableitung in der Form

$$Dg(x)h = \mu_{k+1}(f(x), \dots, f(x))h$$

für eine stetige $(k+1)$-fach multilineare Abbildung $\mu_{k+1} : E \times \ldots \times E \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E')$.

Kommentar: Hier muss man wieder den Satz aus der Vorlesung zitieren, der die Ableitung von $f(x) = \mu_k(f_1(x), \dots, f_k(x))$ berechnet. (Alternativ könnte man Beispiel 3 auf Seite 186 im Skript in Verbindung mit der Kettenregel anwenden, aber das reicht nur für den Fall $E = \mathbb{R}^n$ aus.) Dann geht es so:

$$\begin{aligned} Dg(x)h &= \mu_k(Df(x)h, f(x), \dots, f(x)) + \ldots + \mu_k(f(x), \dots, f(x), Df(x)h) \\ &= \mu_k(\mu_2(f(x), f(x))h, f(x), \dots, f(x)) + \ldots + \mu_k(f(x), \dots, f(x), \mu_2(f(x), f(x))h), \end{aligned}$$

also muss man dann sehen, dass

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}(v_1, \dots, v_{k+1})h :=& \mu_k(\mu_2(v_1, v_2)h, v_3, \dots, v_k) + \mu_k(v_1, \mu_2(v_2, v_3)h, v_4, \dots, v_k) + \\ & \ldots + \mu_k(v_1, \dots, v_{k-1}, \mu_2(v_k, v_{k+1})h) \end{aligned}$$

eine multilineare Funktion $\mu_{k+1} : E \times \ldots \times E \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E')$ definiert.

b) Beweisen Sie, dass die Funktion $\iota : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ in Aufgabe 5.5(c) glatt ist.

Kommentar: Dies war der eigentliche Sinn der Aufgabe, und man kann jetzt Teil a) als Verallgeimerung davon verstehen, dass sich die k-te Ableitung von $1/x$ als $\mu_{k+1}(1/x, \dots, 1/x)$ für eine $(k+1)$-fach multilineare Abbildung μ_{k+1} darstellen lässt. Man muss nur die Formel $D\iota(\mathbf{A})\boldsymbol{H} = -\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{H}\mathbf{A}^{-1}$ von Aufgabe 5.5(c) als $\mu_2(\iota(\mathbf{A}), \iota(\mathbf{A}))\mathbf{H}$ interpretieren, indem man die bilineare Abbildung

$$\begin{gathered} \mu_2 : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}), \\ \mu_2(\mathbf{B}, \mathbf{C})\mathbf{H} := -\mathbf{BHC}. \end{gathered}$$

definiert. Der Rest geht per Induktion.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 6.A
Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung für

$$f(x,y) = xy^2 + \sin(x^6) \quad \text{und} \quad g(x,y) = \left(x + \cos y, \frac{x}{1+y}\right).$$

Aufgabe 6.B
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, E ein beliebiger normierter Vektorraum, und bezeichne mit $\mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, E)$ der Vektorraum von k-fach multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to E.$$

Für Funktionen $f : \mathcal{U} \to E$ wurden Ableitungen höherer Ordnung in der Vorlesung durch die folgende induktive Regel definiert: falls $D^{k-1}f : \mathcal{U} \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ differenzierbar ist, dann ist f k-fach differenzierbar und ihre k-te Ableitung ist die Funktion

$$D^k f : \mathcal{U} \to \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, E) \text{ gegeben durch } D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) := \left[D(D^{k-1}f)(x)v_1\right](v_2, \ldots, v_k),$$

wobei $D(D^{k-1}f)(x)$ als lineare Abblidung $\mathbb{R}^n \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ zu verstehen ist, also ist $D(D^{k-1}f)(x)v_1$ eine $(k-1)$-fache multilineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to E$. Beweisen Sie:

a) Für k Vektoren $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n) \in \mathbb{R}^n$ mit $i = 1, \ldots, k$ gilt die Formel

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x).$$

b) Falls $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$, dann ist die multilineare Abbildung $D^k f(x) \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ symmetrisch, d.h. der Wert von $D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k)$ ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ beliebig permutiert wird.

Kommentar: In der Vorlesung wurde der Fall $k = 2$ dieser Aufgabe ausgeführt, und ich wiederhole hier kurz, wie das ging:

$$\begin{aligned}
D^2 f(x)(v_1, v_2) &= \left[D(Df)(x)v_1\right] v_2 = \left[\sum_{i=1}^n v_1^i \partial_i (Df)(x)\right] v_2 = \sum_{i=1}^n v_1^i \partial_i \left[Df(x)v_2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n v_1^i \partial_i \left[\sum_{j=1}^n v_2^j \partial_j f(x)\right] = \sum_{i,j=1}^n v_1^i v_2^j \partial_i \partial_j f(x).
\end{aligned}$$

Hier werden v_1 und v_2 als konstante Funktionen von x betrachtet, die man differenzieren kann, und am Ende der ersten Zeile benutzt man $\partial_i \left[Df(x)v_2\right] = \left[\partial_i (Df)(x)\right] v_2$, was von der verallgemeinerten Produktregel (Aufgabe 2.2(a)) folgt, weil die Auswertung von $Df(x)$ auf v_2 als stetige bilineare Abbildung

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E) \times \mathbb{R}^n \to E : (L, v) \mapsto Lv$$

betrachtet werden kann.
Jetzt der allgemeine Fall: nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass die Formel

$$D^{k-1}f(x)(v_1,\ldots,v_{k-1}) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} v_1^{i_1}\ldots v_{k-1}^{i_{k-1}} \frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{k-1}}}(x)$$

für eine gegebene ganze Zahl $k \geq 2$ gilt. Eine kurze Bemerkung zu dieser Notation: mit der Abkürzung "$i_1,\ldots,i_{k-1}=1$" unter dem Summierungssymbol ist eigentlich eine Kombination aus $k-1$ Summierungen gemeint, d.h. die rechte Seite bedeutet in der Wirklichkeit

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} v_1^{i_1}\ldots v_{k-1}^{i_{k-1}} \frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{k-1}}}(x).$$

Die Ableitung der Funktion $D^{k-1}f : \mathcal{U} \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ ist per Definition $D^k f$, d.h. für jedes $x \in \mathcal{U}$ ist $D(D^{k-1}f)(x)$ eine lineare Abbdildung $\mathbb{R}^n \to \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$, und die k-fach multilineare Abbildung $D^k f(x) \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, E)$ wird dann als

$$D^k f(x)(v_1,\ldots,v_k) := \left[D(D^{k-1}f)(x)v_1\right](v_2,\ldots,v_k)$$

definiert. Wie bei allen differenzierbaren Funktionen mit Werten in einem normierten Vektorraum gilt für $D^{k-1}f$ die Formel

$$D(D^{k-1}f)(x)v_1 = \sum_{i=1}^{n} v_1^i \partial_i (D^{k-1}f)(x).$$

Da die Funktion $D^{k-1}f$ Werte im Vektorraum $\mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E)$ hat, sind die partiellen Ableitungen $\partial_i(D^{k-1}f)(x)$ auch Elemente in diesem Vektorraum, und sind also $(k-1)$-fach multilineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to E$; in diesem Sinn kann die letzte Formel auch als

$$(D^k f)(x)(v_1,\ldots,v_k) = \left[D(D^{k-1}f)(x)v_1\right](v_2,\ldots,v_k) = \sum_{i=1}^{n} v_1^i \partial_i (D^{k-1}f)(x)(v_2,\ldots,v_k) \tag{1}$$

geschrieben werden. Aber wenn wir die Vektoren $v_2,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$ als konstante Funktionen von $x \in \mathcal{U}$ betrachten, dann definiert

$$x \mapsto D^{k-1}f(x)(v_2,\ldots,v_n) =: \mu(D^{k-1}f(x), v_2,\ldots,v_n) \in E$$

eine differenzierbare Funktion $\mathcal{U} \to E$, wobei wir die stetige k-fach multilineare Abbildung

$$\mu : \mathscr{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n, E) \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to E : (L, w_1,\ldots,w_{k-1}) \mapsto L(w_1,\ldots,w_{k-1})$$

definieren. Nach dem Satz aus der Vorlesung über Ableitungen von multilinearen Abbildungen gilt also

$$\partial_i \left(D^{k-1}f(x)(v_2,\ldots,v_k)\right) = \partial_i(D^{k-1}f)(x)(v_2,\ldots,v_n),$$

wobei die Ableitungen der Vektoren $v_2,\ldots,v_k$ nicht erscheinen, weil sie als konstante Funktionen von x betrachtet werden. Laut Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$\begin{aligned}\partial_i(D^{k-1}f)(x)(v_2,\ldots,v_k) &= \partial_i \left(\sum_{i_2,\ldots,i_k=1}^{n} v_2^{i_2}\ldots v_k^{i_k} \frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} \right)(x) \\ &= \sum_{i_2,\ldots,i_k=1}^{n} v_2^{i_2}\ldots v_k^{i_k} \frac{\partial^{k}f}{\partial x_i \partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(x).\end{aligned}$$

In Kombination mit der Gleichung (1) *impliziert dies genau die Formel, die in Teil a) behauptet wurde.*
Die Formel impliziert wegen der Vertauschbarkeit von gemischten partiellen Ableitungen, dass $D^k f(x) \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *für* $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ *symmetrisch ist—der Fall* $k = 2$ *wurde in der Vorlesung ausgeführt, und der allgemeine Fall geht analog.*