Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 7 (kommentiert)

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 6. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 7.1 (5 Punkte)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi - x\right\}$, und $f : A \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion $f(x, y) := \sin(x) + \sin(y) - \sin(x + y)$. Bestimmen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima der Funktion f. In welchen Punkten liegt ein globales Minumum bzw. globales Maximum vor?
Hinweis: Betrachten Sie zunächst f auf dem Inneren von A. (Auf dem Rand sind Extremwerte auch ohne kritische Punkte möglich!)

Kommentar: Im Inneren von A hat f nur einen kritischen Punkt, nämlich $(2\pi/3, 2\pi/3)$, und die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$Hf(2\pi/3, 2\pi/3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat positive Determinante und negative Spur, also hat sie zwei negative Eigenwerte und ist deswegen negativ definit; folglich ist $(2\pi/3, 2\pi/3)$ mit Wert $f(2\pi/3, 2\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ ein isoliertes lokales Maximum von f. Da A kompakt ist und f stetig, muss f auch irgendwo ein globales Minimum annehmen, aber dies kann kein innerer Punkt sein, weil es außer dem schon genannten lokalen Maximum keine weiteren kritischen Punkte gibt. Also muss f ein globales Minimum auf dem Rand von A annehmen. Eigentlich gilt $f(x, y) = 0$ für alle Randpunkte, also sind alle Rankpunkte globale Minima, und $(2\pi/3, 2\pi/3)$ ist ein globales Maximum.

Aufgabe 7.2 (3 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U}$ eine beliebige glatte Funktion mit $\gamma(0) = \mathbf{a}$ und $\gamma'(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, und $g := f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $\mathbf{a}$ ein kritischer Punkt von f, dann gilt

$$g'(0) = 0 \quad \text{und} \quad g''(0) = \langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v} \rangle.$$

Hier bezeichnet $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $Hf(\mathbf{a})$ die Hesse-Matrix von f in $\mathbf{a}$. Insbesondere hängt $g''(0)$ nur von $\gamma(0)$ und $\gamma'(0)$ und sonst nicht vom Pfad γ ab.

Kommentar: Laut Kettenregel gilt

$$g'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Da $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige bilineare Abbildung ist, kann man dann die verallgemeinerte Produktregel (Aufgabe 2.2) und dann nochmal die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(\nabla f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \right\rangle + \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma'(t) \right\rangle \\ &= \langle D(\nabla f)(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Bei $t = 0$ verschwindet der zweite Term, weil $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, und der Erste wird

$$\langle D(\nabla f)(\mathbf{a})\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle Hf(\mathbf{a})\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v}\rangle,$$

weil die Hesse-Matrix genau die Jacobi-Matrix von ∇f ist.

Aufgabe 7.3 (4 + 4 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Ein kritischer Punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ von f heißt *entartet*, wenn die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht invertierbar ist. Für einen gegebenen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein betrachten wir nun die Funktion $g_{\mathbf{v}} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, definiert durch $g_{\mathbf{v}}(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.

a) Sei $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein kritischer Punkt von f, der nicht entartet ist. Beweisen Sie: f hat in $\mathbf{a}$ ein lokales Minimum genau dann, wenn für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $g_{\mathbf{v}}(t)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum hat.
Hinweis: Was wissen Sie über die Eigenwerte von $Hf(\mathbf{a})$?

Kommentar: Eine Richtung ist klar, also besteht die Hauptaufgabe darin, zu zeigen, falls jedes $g_{\mathbf{v}}$ ein lokales Minimum in $t = 0$ hat, dann hat f auch ein lokales Minimum in $\mathbf{a}$. $Hf(\mathbf{a})$ invertierbar heißt, alle Eigenwerte von $Hf(\mathbf{a})$ sind nicht 0, also muss $Hf(\mathbf{a})$ entweder positiv definit, negative definit, oder indefinit sein. Wenn f kein lokales Minimum in $\mathbf{a}$ hat, folgt also, dass $Hf(\mathbf{a})$ einen Eigenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ hat mit Eigenwert $\lambda < 0$. Aus Aufgabe 7.2 folgt dann $g''_{\mathbf{v}}(0) = \langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v}\rangle = \lambda\|\mathbf{v}\|^2 < 0$, also hat $g_{\mathbf{v}}$ kein lokales Minimum in $t = 0$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) := y^2 - 3x^2y + 2x^4$ und sei $\mathbf{a} := (0, 0)$. Zeigen Sie: Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ hat $g_{\mathbf{v}}(t)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum, aber f hat in $\mathbf{a}$ trotzdem kein lokales Minimum.
Hinweis: Suchen Sie nach einem glatten Pfad $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U}$ mit $\gamma(0) = \mathbf{a}$, so dass $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ kein lokales Minimum in $t = 0$ hat. (Was müsste $\gamma'(0)$ angesichts Aufgabe 7.2 sein?)

Kommentar: Für einen beliebigen Pfad $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = \mathbf{a}$ und $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ erfüllt $g := f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ wegen Aufgabe 7.2

$$g''(0) = \langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v}\rangle.$$

In diesem Beispiel gilt

$$\nabla f(x, y) = (-6xy + 8x^3, 2y - 3x^2) \quad \text{und} \quad Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -6y + 24x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix},$$

also $Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist positiv semidefinit, und zwar sie erfüllt $\langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{a})\mathbf{v}\rangle > 0$ für alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ mit $v_2 \neq 0$. Das impliziert, dass $g_{\mathbf{v}}$ für $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ mit $v_2 \neq 0$ immer ein isoliertes lokales Minimum in $t = 0$ hat. Bei $\mathbf{v} = (v_1, 0)$ folgt das noch nicht, weil $g''_{\mathbf{v}}(0) = 0$. Aber hier können wir $g_{\mathbf{v}}(t)$ auch explizit ausrechnen: es gilt

$$g_{\mathbf{v}}(t) = f(tv_1, 0) = 2v_1^4 t^4,$$

und das hat ein isoliertes lokales Minimum in $t = 0$.

Da $g''(0) = 0$ im Fall $\mathbf{v} = (v_1, 0)$ gibt es im Allgemeinen die Möglichkeit, dsss g kein lokales Minimum in $t = 0$ hat, falls γ anders als $\gamma_{\mathbf{v}}$ (aber mit der selben Ableitung *bei $t = 0$) gewählt wird. Das einfachste interessante Beispiel, das man hier probieren kann, hat die Form*

$$\gamma(t) := (t, at^2),$$

mit einer Konstante $a \in \mathbb{R}$, die wir frei wählen dürfen. Im diesem Fall finden wir

$$g(t) = f(t, at^2) = a^2t^4 - 3t^2at^2 + 2t^4 = (a^2 - 3a + 2)t^4 = (a-1)(a-2)t^4.$$

Diese Funktion hat ein isoliertes lokales Maximum, falls wir a im Intervall $(1, 2)$ wählen. Damit ist bewiesen, dass f kein lokales Minimum in $\mathbf{a}$ haben kann.

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)
Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (x + y)^4 - 4xy$, und bestimmen Sie bei jedem kritischen Punkt, ob es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt[1] handelt.

Kommentar: Es gilt $\partial_x f = 4(x + y)^3 - 4y$ und $\partial_y f = 4(x + y)^3 - 4x$. Wenn beide verschwinden, dann gilt auch $x = y = (x + y)^3$, also $(2x)^3 - x = 8x^3 - x = x(8x^2 - 1) = 0$. So gibt es genau drei kritische Punkte,

$$\mathbf{a}_0 := (0, 0), \qquad \mathbf{a}_\pm := \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Die Hesse-Matrix ist

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x + y)^2 & 12(x + y)^2 - 4 \\ 12(x + y)^2 - 4 & 12(x + y)^2 \end{pmatrix},$$

also $Hf(\mathbf{a}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat negative Determinante und muss deswegen indefinit sein; folglich ist $\mathbf{a}_0$ ein Sattelpunkt. Bei den anderen kritischen Punkten gilt $Hf(\mathbf{a}_\pm) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; die Determinante und Spur sind dann beide positive, also ist die Hesse-Matrix positiv definit, also sind $\mathbf{a}_\pm$ beide isolierte lokale Minima.

Aufgabe 7.5 (5 Punkte)
Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ die Punkte $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}$ für $t \in [0, 1]$ alle in $\mathcal{U}$ liegen. Sei eine konvexe Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ heißt dann *konvex*, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, die Ungleichung

$$f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}) \le tf(\mathbf{x}) + (1 - t)f(\mathbf{y}) \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

erfüllt wird. Beweisen Sie: eine C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix $Hf(\mathbf{x})$ positiv semidefinit für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ist.

Kommentar: Konvexität hat die folgende geometrische Bedeutung. Man vergleiche für gegebene Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ die Strecke $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zwischen $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ und $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$ mit der Kurve $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die aus allen Punkten der Form $(\mathbf{z}, f(\mathbf{z})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ besteht, mit $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$ auf der Strecke in $\mathbb{R}^n$ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn ℓ immer “über” C ist, d.h. die x_{n+1}-Koordinate von jedem Punkt in ℓ ist $\ge$ der x_{n+1}-Koordinate

[1] Ein *Sattelpunkt* ist per Definition ein kritischer Punkt, der weder lokales Maximum noch lokales Minimum ist.

des eindeutigen Punktes in C, der die gleichen ersten n Koordinaten hat. Aus dieser Perspektive sollte folgendes klar sein. Gegeben zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ können wir die Funktion $g_{\mathbf{x},\mathbf{y}} : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y})$ betrachten; dies versteht man als die Einschränkung von f auch der Strecke zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Die Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist nun genau dann konvex, wenn $g_{\mathbf{x},\mathbf{y}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ konvex ist. Das könnte man auch direkt mit Formeln und Ungleichungen beweisen; dies ist nur die geometrische Idee.

Die Annahme $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ impliziert $g_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \in C^2([0,1], \mathbb{R})$, also folgt jetzt aus einem Satz von der Vorlesung, dass f genau dann konvex ist, wenn $g''_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(t) \geq 0$ immer gilt. Wenn wir $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ schreiben, ist nun mittels Kettenregel leicht zu zeigen, dass diese Bedingung $\langle \mathbf{v}, Hf(\mathbf{z})\mathbf{v} \rangle \geq 0$ bedeutet für alle Punkte $\mathbf{z}$ auf der Strecke zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Aufgabe 7.6 (4 Punkte)
Beweisen Sie: Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ ein nichtentarteter (s. Aufgabe 7.3) kritischer Punkt einer Funktion $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, dann gibt es eine Umgebung von $\mathbf{a}$, in der f keine weiteren kritischen Punkte hat.
Hinweis: Die Hesse-Matrix $Hf : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Jacobi-Matrix des Gradienten $\nabla f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

Kommentar: Man betrachte die Funktion $\nabla f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ und wende den Satz über den lokalen Diffeomorphismus an. Die Bedingungen dafür sind erfüllt, denn $\nabla f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ und $D(\nabla f)(\mathbf{a}) = Hf(\mathbf{a})$ ist invertierbar. So folgt, dass ∇f eine Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ von $\mathbf{a}$ bijektiv nach einer Umgebung von $\nabla f(\mathbf{a}) = 0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet; insb. ist $\mathbf{a}$ der einzige Punkt in dieser Umgebung, der nach $0 \in \mathbb{R}^n$ abgebildet wird.

Insgesamt: **30 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 7.Z (4 + 3 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ mit $k \geq 1$ und $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$. Für $m \in \{0, \ldots, k\}$ werden wir mit $Q_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Polynom

$$Q_m(\mathbf{x}) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha$$

bezeichnen. Das k-te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt $\mathbf{a}$ ist dann $P_k(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^k Q_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. Dies ist (wie wir in der Vorlesung gesehen haben) das eindeutige Polynom von Grad $\leq k$, das die Relation

$$\partial^\alpha P_k(\mathbf{a}) = \partial^\alpha f(\mathbf{a}) \quad \text{für alle} \quad |\alpha| \leq k$$

erfüllt. Für einen gegebenen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ wählen wir auch $\epsilon > 0$ hinreichend klein und definieren die Funktion $g_{\mathbf{v}} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ durch $g_{\mathbf{v}}(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.

a) Beweisen Sie, dass $g_{\mathbf{v}}^{(m)}(0) = m! Q_m(\mathbf{v})$ für alle $m = 0, \ldots, k$ gilt.
Hinweis 1: Betrachten Sie die ähnliche (aber einfachere) Funktion $h_{\mathbf{v}}(t) := P_k(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$.
Hinweis 2: Q_m ist ein homogenes Polynom von Grad m, d.h. $Q_m(t\mathbf{x}) = t^m Q_m(\mathbf{x})$.

Kommentar: Wegen Aufgabe 6.3(c) wissen wir, dass $h_{\mathbf{v}}$ und $g_{\mathbf{v}}$ die gleichen Ableitungen in $t = 0$ bis Ordnung k haben. Außerdem gilt

$$h_{\mathbf{v}}(t) = P_k(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = \sum_{m=0}^k Q_m(t\mathbf{v}) = \sum_{m=0}^k t^m Q_m(\mathbf{v}),$$

also

$$g_{\mathbf{v}}^{(m)}(0) = h_{\mathbf{v}}^{(m)}(0) = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{d^m}{dt^m} t^j \right)\Bigg|_{t=0} Q_j(\mathbf{v}) = m! Q_m(\mathbf{v}).$$

b) Unabhängig von Teil a), beweisen Sie durch direkte Anwendung der Kettenregel:

$$g_{\mathbf{v}}^{(m)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) v_{i_1} \ldots v_{i_m}, \qquad m = 0, \ldots, k.$$

Bemerkung: Durch das Verbinden der zwei Teile dieser Aufgabe mit Aufgabe 6.B(a) erhalten wir die Relation

$$Q_m(\mathbf{v}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!} \mathbf{v}^\alpha = \frac{1}{m!} D^m f(\mathbf{a})(\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}).$$

Wer nichts gegen Kombinatorik hat, kann diese Relation mit Hilfe von Aufgabe 6.B(a) auch direkter beweisen, aber ich persönlich finde den hier skizzierten Beweis schöner. Die Relation führt zu einer neuen Form der Taylorformel für Funktionen $f \in C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, *nämlich*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} D^m f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}) + \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}),$$

wobei wie immer $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \theta\mathbf{h}$ *für ein* $\theta \in (0, 1)$. *In dieser Form kann die Formel sogar für Funktionen auf beliebigen Banachräumen verallgemeinert werden.*

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 7.A

Finden Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen und bestimmen Sie in jedem Fall, ob es sich um ein lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt handelt.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = x^2 + y^3$

c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$

Aufgabe 7.B

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (\cosh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y))$.

a) Seien $\mathcal{U} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ und $\mathcal{U}_1 := \{(x, y) \in \mathcal{U} \mid 0 < y < 2\pi\}$. Bestimmen Sie die Mengen $\mathcal{V} := f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{V}_1 := f(\mathcal{U}_1) \subset \mathbb{R}^2$ (explizit).

b) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ kein C^1-Diffeomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ um jeden Punkt von $\mathcal{U}$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 7.C
Wir betrachten die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten, d.h. wir betrachten

$$\begin{aligned} F : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R}), \\ F(r,\phi,\theta) := (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)). \end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Koordinaten (r,ϕ,θ)

b) Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 7.D
Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\varphi(x,y) := (2e^x + x^3, x+y)$. Zeigen Sie, dass φ ein Diffeomorphismus ist, und berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung φ^{-1} im Punkt $(2,0)$.