Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, M. Berghoff, A. Fauck,
C. Jurja, L. Kotan, M. Majchrzak

Analysis II*

SoSe 2019

Übungsblatt 9

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 20. Juni 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + Zeit)

Aufgabe 9.1 (2 + 3 Punkte)
Sei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8\}$.

a) Beweisen Sie: K ist eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.
b) Finden Sie die Punkte auf K, die den grössten bzw. den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

Aufgabe 9.2 (2 + 3 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Schnittmenge der Mengen $\{x + y + z = 0\}$ und $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.[1]
b) Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf M.

Aufgabe 9.3 (3 Punkte)
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle, symmetrische $(n \times n)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax}\rangle$. Wir betrachten die Einschränkung von f auf die kompakte Einheitssphäre $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf S^{n-1}, in denen $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ein globales Maximum bzw. ein globales Minimum annimmt. Was hat die Antwort mit Eigenvektoren und Eigenwerten zu tun?

Aufgabe 9.4 (2 + 2 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $g = (g_1, \dots, g_m) \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ Funktionen, $q \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von g mit Niveaufläche $M := g^{-1}(q)$, und $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine 2-fach stetig differenzierbare Abbildung mit $\gamma(t) \in M$ für alle t. Wir bezeichnen $p := \gamma(0) \in M$ und $X := \gamma'(0) \in T_pM$.

a) Beweisen Sie: Für alle $i = 1, \dots, m$ gilt $\langle \nabla g_i, \gamma''(0)\rangle = -\langle Hg_i(p)X, X\rangle$.[2]
Hinweis: Betrachten Sie zuerst eine beliebige Funktion $h \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und beweisen Sie eine allgemeine Formel für $(h \circ \gamma)''(0)$.
b) Aus der Vorlesung wissen wir: nimmt die eingeschränkte Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ im Punkt p ein lokales Maximum an, dann existieren eindeutige Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren, so dass die Gleichung
$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(p)$$
erfüllt wird. Beweisen Sie, dass in diesem Fall die Matrix $A := Hf(p) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hg_i(p)$ die Ungleichung $\langle AX, X\rangle \le 0$ für alle $X \in T_pM$ erfüllen muss.

[1] In der Sprache von Aufgabe 9.Z könnte man hier sagen: die Ebene $\{x + y + z = 0\}$ und die Sphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sind zwei 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, die sich transversal schneiden, also ist ihre Schnittmenge auch eine Untermannigfaltigkeit.

[2] Wie immer bezeichnen wir mit $Hf(p)$ die Hesse-Matrix einer reellwertigen Funktion f im Punkt p.

Aufgabe 9.5 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

c) $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ auf dem Intervall $(-r,r)$ für $r>0$

d) $\int \frac{2\,dx}{x^2+x-6}$

e) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$; *Hinweis: Nach einer Substitution wird die Funktion rational.*

Insgesamt: **27 Punkte**

Aufgabe 9.Z (2 + 2 + 1 Punkte)
Seien M und N zwei Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. Wir sagen: M und N schneiden sich *transversal*, falls für alle Punkte $p \in M \cap N$, $T_pM + T_pN = \mathbb{R}^n$, d.h. jeder Vektor $X \in \mathbb{R}^n$ kann (nicht unbedingt eindeutig) als $X = v + w$ für $v \in T_pM$ und $w \in T_pN$ geschrieben werden. Im Folgenden wird angenommen, dass M und N als Niveauflächen $M = f^{-1}(a)$ und $N = g^{-1}(b)$ gegeben sind, wobei

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad g = (g_1, \dots, g_\ell) \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^\ell)$$

Funktionen mit regulären Werten $a \in \mathbb{R}^m$ bzw. $b \in \mathbb{R}^\ell$ sind.

a) Beweisen Sie, dass die Bedingung $T_pM+T_pN = \mathbb{R}^n$ für einen Schnittpunkt $p \in M\cap N$ genau dann gilt, wenn die Vektoren $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p), \nabla g_1(p), \dots, \nabla g_\ell(p)$ linear unabhängig sind.

b) Beweisen Sie: Falls M und N sich transversal schneiden, dann ist auch $M \cap N$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Was ist die Dimension von $M \cap N$?

c) Welche Bedeutung hat das Resultat von Teilaufgabe b) im Fall $m + \ell > n$?

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 9.A
Seien $f, g : (0,\infty)^n \to \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \qquad g(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \ldots + x_n.$$

a) Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x_1, \dots, x_n) = 1$.

b) Beweisen Sie damit für alle $y_i > 0$ die *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*: $(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

Aufgabe 9.B
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: $\int x^2 e^x\,dx$; $\int x^2 4^x\,dx$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; $\int \frac{x\,dx}{x^2-4x+3}$; $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$; $\int \frac{x^7}{x^4+2}\,dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$; $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$.