Musterlösung zu Problem Set 4, Aufgabe 4

Felix Schmäschke

Der Homöomorphismus wird induziert durch die Inklusion $X \times [0,1] \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$. Man überzeugt sich leicht, dass dies eine wohldefinierte stetige Abbildung auf den Quotienten liefert, welche injektiv, surjektiv und offen ist.

Im Beweis von Theorem 32.5 wird die Abbildung von Paaren $q : (X \times I, X \times \partial I) \to (X_f, X)$ betrachtet. Dies liefert das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen (alle Homologiegruppen sind mit Koeffizienten $\mathbb{Z}$ zu verstehen)

$$\begin{tikzcd}
 & & \ker \alpha_* \cong H_{*-1}(X) \arrow[d, "\subset"] & \\
H_*(X \times I) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "q_*"] & H_*(X \times I, X \times \partial I) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "q_*", "\cong"'] \arrow[ur, "\partial_*"] & H_{*-1}(X \times \partial I) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "q_*"] & H_{*-1}(X \times I) \arrow[d, "q_*"] \\
H_*(X_f) \arrow[r, "i_*"] \arrow[uurr, bend right] & H_*(X_f, X) \arrow[r] & H_{*-1}(X) \arrow[r] & H_{*-1}(X_f)
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\phi : H_*(X_f) \to H_{*-1}(X)$ in der langen exakten Sequenz ist durch den gekrümmten Pfeil gekennzeichnet. Sei nun $* = 1$ und $a = [\gamma] \in H_1(X_f)$ gegeben durch eine geschlossene Kurve $\gamma : S^1 \to X_f$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = [x_0, 0]$. Wähle einen Pfad $\mu_0 : [0,1] \to X$ so dass $\mu_0(0) = x_0$ und $\mu_0(1) = f(x_0)$. Die Kurve $\mu : S^1 \to X_f$, $t \mapsto [\mu_0(t), t]$ ist eine geschlossene Kurve in X_f. Die Überlagerung $p : X \times \mathbb{R} \to X_f$ ist reglär. In der Tat werden die Decktransformationen erzeugt durch $(x,t) \mapsto (f(x), t{+}1)$ und wirken transitiv auf der Faser. Nach Theorem 16.14 ist γ homotop zu $\gamma_0 \mu^m$ wobei γ_0 das Bild einer geschlossenen Kurve in $X \times \mathbb{R}$ ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass γ_0 komplett in $X \hookrightarrow X_f$ liegt. Für die Homologieklassen gilt $[\gamma] = [\gamma_0] + m[\mu]$. Da $i_*[\gamma_0] = 0$, reicht es $[\mu]$ zu betrachten. Die Kurve μ hat den Lift $\tilde{\mu} : [0,1] \to X \times I$, $t \mapsto (\mu_0(t), t)$ und definiert eine relative Homologieklasse, so dass $q_*[\tilde{\mu}] = i_*[\mu]$. Wir berrechnen $\partial_*[\tilde{\mu}] = [(f(x_0), 1)] \oplus -[(x_0, 0)] \cong (1, -1)$, welches durch die Identifikation $\ker \alpha_* \cong H_0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ entweder auf $+1$ oder -1 abgebildet wird. Zusammengefasst $\phi([\gamma]) = \pm m$. Die zeigt Teil (a) und (b) da wir gezeigt haben, dass $\pm 1 = \phi([\mu]) \in \mathbb{Z}$ im Bild von ϕ ist und somit ϕ surjektiv ist.