HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 10: Musterlösung zu den Aufgaben 10.1–3 und 10.Z

Aufgabe 10.1 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert fast überall[1] durch $f(x,y) := \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$.
Bestimmen Sie für die gegebenen Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^2$, ob f auf E Lebesgue-integrierbar ist,[2] und wenn ja, berechnen Sie $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$.

a) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le x\}$

Lösung:
Auf der gegebenen Teilmenge ist f nichtnegativ. Wir betrachten die nichtnegative messbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{wenn } (x,y) \in E \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also gilt $\int_E |f|\,dm = \int_{\mathbb{R}^2} F\,dm$. Nun wenden wir den Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen an:

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y) \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx.$$

Mit x als konstanter Parameter betrachtet, substituieren wir $u = x+y$, $du = dy$ und berechnen

$$\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_x^{2x} \frac{2x-u}{u^3}\,du = 2x \int_x^{2x} \frac{du}{u^3} - \int_x^{2x} \frac{du}{u^2} = -\frac{x}{u^2}\bigg|_{u=x}^{u=2x} + \frac{1}{u}\bigg|_{u=x}^{u=2x}$$
$$= -\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4x}.$$

Da $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{4x} = \frac{1}{4} \ln x \bigg|_0^1 = \infty$, folgt jetzt, dass f auf E nicht Lebesgue-integrierbar ist.

b) $E := [1,\infty) \times [1,2]$

Lösung:
Auf dieser Teilmenge ist f manchmal positiv und manchmal negative, aber es gilt,

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x-y}{(x+y)^3} \right| = \frac{|x-y|}{(x+y)^3} \le \frac{x+y}{(x+y)^3} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Dann impliziert der Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen,

$$\int_E |f(x,y)|\,dx\,dy \le \int_E \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^\infty \frac{dx}{(x+y)^2} \right) dy.$$

[1] Da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist, ist es unwichtig, wie f auf dieser Teilmenge definiert wird.

[2] Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $E \subset X$ in einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **μ-integrierbar auf** E, falls die erweiterte Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F|_E \equiv f$ und $F|_{X \setminus E} \equiv 0$ μ-integrierbar ist.

Die Substitution $u = x + y$, $du = dx$ (mit y als konstanter Parameter betrachtet) gibt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+y)^2} = \int_{1+y}^\infty \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\bigg|_{1+y}^\infty = \frac{1}{1+y},$$

also

$$\int_E |f(x,y)|\,dx\,dy \le \int_1^2 \frac{dy}{1+y} = \ln(1+y)\big|_1^2 = \ln(3) - \ln(2) < \infty,$$

was beweist, dass f auf E Lebesgue-integrierbar ist. Daher dürfen wir den Satz von Fubini für integrierbare Funktionen jetzt anwenden, und durch die gleiche Substitution wie oben finden wir:

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)\,dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_{1+y}^\infty \frac{u-2y}{u^3}\,du \right) dy \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} \right)\bigg|_{u=1+y}^{u=\infty} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{1+y} - \frac{y}{(1+y)^2} \right) dy = \int_1^2 \frac{dy}{(1+y)^2} \\ &= -\frac{1}{1+y}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

c) $E := [1,\infty) \times [1,\infty)$

Lösung:
Die Funktion ist auf E nicht Lebesgue-integrierbar. Es gibt mindestens zwei mögliche Methoden, um das zu beweisen.
Methode 1:
Wir betrachten die Teilmenge

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \ge 1 \text{ und } y \le x \right\} \subset E,$$

auf der f eine nichtnegative Funktion ist. Das Integral $\int_A |f|\,dm = \int_A f\,dm$ kann deswegen durch den Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen berechnet werden:

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y) \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx = \int_1^\infty \left(\int_1^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx.$$

Mit der gleichen Substitution wie in Teilaufgabe (a) berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy &= \int_{1+x}^{2x} \frac{2x-u}{u^3}\,du = \left(-\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} \right)\bigg|_{u=1+x}^{u=2x} \\ &= -\frac{1}{4x} + \frac{1}{2x} + \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{(1+x)^2}.\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^\infty \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \left(\frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{1+x} \right)\bigg|_1^\infty = \infty,$$

und weil $A \subset E$, impliziert das

$$\int_E |f|\,dm \ge \int_A |f|\,dm = \int_A f\,dm = \infty.$$

Methode 2:
Man kann indirekt argumentieren: falls f auf E Lebesgue-integrierbar ist, dann ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{wenn } (x,y) \in E, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auch Lebesgue-integrierbar, und $\int_E f\,dm = \int_{\mathbb{R}^2} F\,dm$ kann durch den Satz von Fubini berechnet werden. Es folgt,

$$\begin{aligned} \int_E f(x,y)\,dx\,dy &= \int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy = \int_1^\infty \left(\int_{1+y}^\infty \frac{u-2y}{u^3}\,du \right) dy \\ &= \int_1^\infty \left(-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} \right)\Bigg|_{u=1+y}^{u=\infty} dy = \int_1^\infty \left(\frac{1}{y+1} - \frac{y}{(1+y)^2} \right) dy = \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} \\ &= -\frac{1}{1+y}\Bigg|_1^\infty = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aber wenn das richtig ist, dann müsste die gleiche Antwort auch rauskommen, wenn man bzgl. x und y in der anderen Reihenfolge integriert. Dass dies nicht so ist, kann man dadurch sehen, dass f die Relation $f(x,y) = -f(y,x)$ erfüllt:

$$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty f(x,y)\,dy \right) dx = \int_1^\infty \left(\int_1^\infty f(y,x)\,dx \right) dy = -\int_1^\infty \left(\int_1^\infty f(x,y)\,dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

Das gibt den Widerspruch $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, also kann f auf E doch nicht Lebesgue-integrierbar sein.

d) $E := [0,1] \times [0,1]$

Vorsicht: Bevor Sie den Satz von Fubini anwenden, müssen Sie in jedem Fall prüfen, ob die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Lösung:
Sei A die Menge von Teilaufgabe (a). Da $A \subset E$ und f auf A nicht Lebesgue-integrierbar ist, folgt

$$\int_E |f|\,dm \geq \int_A |f|\,dm = \infty,$$

also ist f auch auf E nicht Lebesgue-integrierbar.
Wer unbedingt etwas berechnen will, kann das auch mit dem folgenden indirekten Argument beweisen: es gilt,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_y^{1+y} \frac{u-2y}{u^3}\,du \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} \right)\Bigg|_{u=y}^{u=1+y} \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2} \right) dy = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} \\ &= \frac{1}{1+y}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

aber wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ folgt

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)\,dx \right) dy = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$
$$\neq \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Das würde den Satz von Fubini widersprechen, wäre f auf E Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)
Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Produktmaßes, d.h. sind $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $\Pi, \Pi' : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ zwei Maße auf $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, die

$$\Pi(A \times B) = \Pi'(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}$$

erfüllen, dann gilt $\Pi = \Pi'$.
Hinweis: Betrachten Sie das Mengensystem $\Omega := \big\{ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \;\big|\; \Pi(E) = \Pi'(E) \big\}$.

Lösung:
Wir nennen eine Menge $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ **elementar**, wenn E eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Produktmengen $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ist. Wie in der Vorlesung diskutiert, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset 2^{X \times Y}$ ist das kleinste monotone Mengensystem, das alle elementaren Mengen enthält. Unser Ziel ist grundsätzlich zu zeigen, dass das im Hinweis genannte Mengensystem $\Omega \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alle elementaren Mengen enthält und auch monoton ist; dann folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \Omega$. In der Praxis werden wir eigentlich eine leicht kompliziertere Aussage beweisen, die aber dieses Resultat impliziert. Die Argumentation folgt im Wesentlichen dem Beweis des "Hauptlemmas", das in der Vorlesung zur Begründung der Existenz des Produktmaßes verwendet wurde.

Behauptung 1*:* Alle elementaren Mengen sind in Ω.
Beweis: Sei $E \subset X \times Y$ eine disjunkte Vereinigung

$$E = \bigcup_{i=1}^N E_i, \qquad \text{wobei} \qquad E_i = A_i \times B_i \text{ für } A_i \in \mathcal{A},\ B_i \in \mathcal{B}.$$

Per Annahme gilt $\Pi(E_i) = \Pi'(E_i)$ für $i = 1, \ldots, N$. Da die Mengen $E_1, \ldots, E_N$ alle disjunkt und Π und Π' Maße sind, gilt dann auch

$$\Pi(E) = \sum_{i=1}^N \Pi(E_i) = \sum_{i=1}^N \Pi'(E_i) = \Pi'(E),$$

also $E \in \Omega$.

Behauptung 2*:* Für eine gegebene monoton wachsende Folge von Mengen $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E := \bigcup_{i=1}^\infty E_i \subset X \times Y$: gilt $E_i \in \Omega$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $E \in \Omega$.
Beweis: Per Annahme gilt $\Pi(E_i) = \Pi'(E_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also folgt wegen eines in der Vorlesung bewiesenen allgemeinen Resultats über Maße von wachsenden Folgen von Mengen,

$$\Pi(E) = \lim_{i \to \infty} \Pi(E_i) = \lim_{i \to \infty} \Pi'(E_i) = \Pi'(E),$$

also $E \in \Omega$.

Behauptung 3*:* Für eine gegebene monoton fallende Folge von Mengen $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E := \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \subset A \times B$ für ein $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A), \nu(B) < \infty$: gilt $E_i \in \Omega$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $E \in \Omega$.
Beweis: Per Annahme gilt $\Pi(E_i) = \Pi'(E_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und diese Maße sind auch immer endlich, denn $E_i \subset E_1 \subset A \times B$ impliziert

$$\Pi'(E_i) = \Pi(E_i) \leq \Pi(E_1) \leq \Pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) < \infty.$$

Dann folgt wegen noch eines in der Vorlesung bewiesenen allgemeinen Resultats über Maße von monotonen Folgen von Mengen,

$$\Pi(E) = \lim_{i\to\infty} \Pi(E_i) = \lim_{i\to\infty} \Pi'(E_i) = \Pi'(E),$$

also $E \in \Omega$.

Die Bedingung $E_1 \subset A \times B$ in Behauptung 3 verhindert uns, jetzt sofort zu folgern, dass Ω ein monotones System ist. Stattdessen müssen wir uns jetzt auf die σ-Endlichkeit von $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ berufen: wir schreiben

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \qquad \mu(X_i) < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$
$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \qquad \nu(Y_i) < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ und $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \ldots$.
Sei $\mathcal{M} \subset 2^{X\times Y}$ das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \left\{ E \subset X \times Y \;\middle|\; E \cap (X_i \times Y_i) \in \Omega \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jetzt folgen drei weitere Behauptungen:

Behauptung 1′*:* Alle elementaren Mengen sind in $\mathcal{M}$.
Beweis: Ist $E \subset X \times Y$ elementar, dann ist $E \cap (X_i \times Y_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch elementar, denn $X_i \times Y_i$ ist elementar und die elementaren Mengen bilden eine Algebra in $2^{X\times Y}$ (Letzteres wurde in der Vorlesung bewiesen). Die Behauptung folgt dann sofort von Behauptung 1.

Behauptung 2′*:* Für eine gegebene monoton wachsende Folge von Mengen $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset X \times Y$: gilt $E_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $E \in \mathcal{M}$.
Beweis: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist

$$E_1 \cap (X_i \times Y_i) \subset E_2 \cap (X_i \times Y_i) \subset E_3 \cap (X_i \times Y_i) \subset \ldots$$

eine monoton wachsende Folge von Mengen in Ω, also folgt von Behauptung 2, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap (X_i \times Y_i)) = E \cap (X_i \times Y_i)$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch in Ω ist.

Behauptung 3′: Für eine gegebene monoton fallende Folge von Mengen $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E := \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \subset X \times Y$: gilt $E_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $E \in \mathcal{M}$.
Beweis: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist

$$E_1 \cap (X_i \times Y_i) \supset E_2 \cap (X_i \times Y_i) \supset E_3 \cap (X_i \times Y_i) \supset \ldots$$

eine monoton fallende Folge von Mengen in Ω, und außerdem gilt

$$E_1 \cap (X_i \times Y_i) \subset X_i \times Y_i, \qquad \text{wobei} \quad \mu(X_i), \nu(Y_i) < \infty,$$

also folgt von Behauptung 3, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap (X_i \times Y_i)) = E \cap (X_i \times Y_i)$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch in Ω ist.

Diese letzten zwei Behauptungen implizieren, dass $\mathcal{M} \subset 2^{X \times Y}$ ein monotones Mengensystem ist, und weil $\mathcal{M}$ auch die Algebra der elementaren Mengen enthält, folgt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Es gibt nur noch eine Behauptung.

Behauptung 4: $\mathcal{M} \subset \Omega$.
Beweis: Sei $E \in \mathcal{M}$, also gilt per Annahme $E \cap (X_i \times Y_i) \in \Omega$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir betrachten dann die monoton wachsende Folge von Mengen

$$E \cap (X_1 \times Y_1) \subset E \cap (X_2 \times Y_2) \subset E \cap (X_3 \times Y_3) \subset \ldots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap (X_i \times Y_i)) = E \cap (X \times Y) = E,$$

und folgern von Behauptung 2, dass $E \in \Omega$.

Wir haben bewiesen:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \Omega.$$

Aufgabe 10.3 (2 + 4 Punkte)
Sei $X := Y := [0,1]$ und $\mathcal{A} := \mathcal{B} := 2^{[0,1]}$. Man betrachte das Zählmaß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ (s. Aufgabe 6.3(a)) und ein Maß $\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu(E) := \begin{cases} 0 & \text{falls } E \subset [0,1] \text{ endlich oder abzählbar unendlich ist,} \\ \infty & \text{falls } E \subset [0,1] \text{ überabzählbar ist.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass beide Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ nicht σ-endlich sind.

Lösung:
Der Beweis ist indirekt. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich, dann gibt es abzählbar viele Teilmengen $X_1, X_2, X_3, \ldots \subset X$ mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $\mu(X_n) < \infty$. Für das Zählmaß impliziert $\mu(X_n) < \infty$, dass jedes X_n eine endliche Menge ist, aber dann muss X entweder endlich oder abzählbar unendlich sein, und das ist ein Widerspruch, denn $[0,1]$ ist überabzählbar. Bei $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ geht es analog: ist dieser Maßraum σ-endlich, dann ist Y eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen $Y_n \subset Y$, die alle entweder endlich oder abzählbar unendlich sind, also müsste Y auch abzählbar sein, und das ist ein Widerspruch.

b) Sei $\Delta := \{(t,t) \in [0,1]^2 \mid t \in [0,1]\} \subset X \times Y$. Definieren Sie zwei Maße Π, Π' auf $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, die (wie in Aufgabe 10.2) auf allen Produktmengen $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gleich sind aber $\Pi(\Delta) \neq \Pi'(\Delta)$ erfüllen.
Hinweis: Π *und* Π' *können durch zwei Integrale definiert werden, die gleich wären, wenn* μ *und* ν *beide* σ*-endlich wären.*

Lösung:
Für $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definieren wir die Mengen $E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \subset Y$ für jedes $x \in X$ und $E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\} \subset X$ für jedes $y \in Y$. Dann definieren wir die zwei Maße $\Pi, \Pi' : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0,\infty]$ durch

$$\Pi(E) := \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x), \qquad \Pi'(E) := \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y). \tag{1}$$

Zuerst sei bemerkt, dass beide Integrale wohl definiert sind: in der Tat, die Funktionen

$$X \to [0,\infty] : x \mapsto \nu(E_x), \qquad Y \to [0,\infty] : y \mapsto \mu(E^y)$$

sind beide wohl definiert, denn E_x ist immer in $\mathcal{B} = 2^{[0,1]}$ und E^y ist immer in $\mathcal{A} = 2^{[0,1]}$, und aus ähnlichen Gründen sind beide Funktionen messbar, d.h. *alle* Funktionen auf $[0,1]$ sind bzgl. der σ-Algebra $2^{[0,1]}$ messbar. Es ist jetzt nicht schwierig, zu zeigen, dass Π und Π' Maße sind: für Π gilt

$$\Pi(\emptyset) = \int_X \nu(\emptyset)\, d\mu = 0,$$

und für eine abzählbare disjunkte Vereinigung $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset X \times Y$,

$$\begin{aligned}\Pi(E) &= \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\Big)\, d\mu(x) = \int_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\left((E_n)_x\right)\Big)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \nu\left((E_n)_x\right)\, d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi(E_n),\end{aligned}$$

denn $E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x$ ist auch eine disjunkte Vereinigung, und der Schritt von der Ersten zur zweiten Zeile erfolgt wegen des Satzes über monotone Konvergenz. Das beweist, dass Π ein Maß ist, und bei Π' geht das Argument analog. Für $A \subset X$ und $B \subset Y$ gilt außerdem

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{falls } x \in A, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad (A \times B)^y = \begin{cases} A & \text{falls } y \in B, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases},$$

also $\nu((A \times B)_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ und $\mu((A \times B)^y) = \chi_B(y)\mu(A)$, wobei wir als Konvention $0\cdot\infty := 0$ definieren müssen, damit beide Formeln im Fall $x \notin A$ mit $\nu(B) = \infty$ bzw. $y \notin B$ mit $\mu(A) = \infty$ richtig sind. Es folgt,

$$\begin{aligned}\Pi(A \times B) &= \int_X \nu(B)\chi_A\, d\mu = \nu(B) \int_X \chi_A\, d\mu = \nu(B)\mu(A) \\ &= \mu(A)\nu(B) = \mu(A) \int_Y \chi_B\, d\nu = \int_Y \mu(A)\chi_B\, d\nu = \Pi'(A \times B).\end{aligned}$$

Aber bei $\Delta \subset X \times Y$ sieht die Lage anders aus, denn für alle $x, y \in [0,1]$ bestehen die Mengen $\Delta_x, \Delta^y \subset [0,1]$ aus genau einem Element, also $\nu(\Delta_x) = 0$ und $\mu(\Delta^y) = 1$, daher,

$$\begin{aligned}\Pi(\Delta) &= \int_X \nu(\Delta_x)\, d\mu(x) = \int_X 0\, d\mu = 0 \\ &\neq \infty = \nu(Y) = \int_Y 1\, d\nu = \int_Y \mu(\Delta^y)\, d\nu(y) = \Pi'(\Delta).\end{aligned}$$

Bemerkung: dieses Beispiel von der Nichteindeutigkeit des Produktmaßes ist nur möglich, weil die Maßräume nicht σ-endlich sind. Wären beide σ-endlich, würde aus dem in der Vorlesung bewiesenen "Hauptlemma" über Produktmaße folgen, dass die zwei Integrale in (1) *für alle $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ nicht nur wohl definiert sondern auch gleich sind.*

Insgesamt: **20 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 10.Z (5 Punkte)
Die Funktion $\dfrac{\sin x}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, hat aber trotzdem ein wohl definiertes *uneigentliches* Integral, d.h. die Funktion ist auf $[0, N]$ für jedes $N > 0$ Lebesgue-integrierbar,[3] und der Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx := \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{\sin x}{x}\, dx$$

existiert. Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert $\dfrac{\pi}{2}$ ist.
Hinweis: Wegen Aufgabe 7.3(c) gilt $\int_0^N \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^N \frac{\sin x}{x}\, dx$. Ersetzen Sie $1/x$ in diesem Integrand mit $\int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ für $x > 0$.

Lösung:
Da $\int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$ gilt, können wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx := \lim_{N\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^N (\sin x) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-xt}\, dt \right) dx \tag{2}$$

schreiben. Die Idee ist nun, das doppelte Integral auf der rechten Seite als Lebesgue-Integral einer Funktion auf $\mathbb{R}^2$ zu betrachten, damit der Satz von Fubini angewendet werden kann. Wir definieren die stetige (und daher Lebesgue-messbare) Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(t, x) := e^{-xt} \sin x.$$

Es gilt,

$$|f(t, x)| \le e^{-\epsilon t} \quad \text{für} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [\epsilon, N],$$

und laut dem Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen gilt

$$\int_{[0,\infty)\times[\epsilon,N]} e^{-\epsilon t}\, dt\, dx = \int_\epsilon^N \left(\int_0^\infty e^{-\epsilon t}\, dt \right) dx = \frac{N - \epsilon}{\epsilon} < \infty,$$

also f ist auf $[0, \infty) \times [\epsilon, N] \subset \mathbb{R}^2$ für jedes $\epsilon > 0$ und $N > 0$ Lebesgue-integrierbar. (Dies ist übrigens der Grund, warum wir den zusätzlichen Grenzwert bei $\epsilon \to 0^+$ eingeführt haben—es ist nicht so klar, ob f auf $[0, \infty) \times [0, N]$ Lebesgue-integrierbar ist.) Jetzt können wir den Satz von Fubini für Lebesgue-integrierbare Funktionen anwenden, der impliziert,

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)\times[\epsilon,N]} e^{-xt} \sin x\, dx\, dt &= \int_\epsilon^N \left(\int_0^\infty e^{-xt} \sin x\, dt \right) dx = \int_\epsilon^N (\sin x) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-xt}\, dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\epsilon^N e^{-xt} \sin x\, dx \right) dt.\end{aligned}$$

[3] Der Punkt $x = 0$ ist unproblematisch, weil $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ existiert, also lässt sich $\frac{\sin x}{x}$ als stetige Funktion auf $[0, N]$ fortsetzen.

Am Ende der ersten Zeile sehen wir das gleiche doppelte Integral, das in (2) auf der rechten Seite steht, also folgt,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^\infty \left(\int_\epsilon^N e^{-xt}\sin x\,dx\right)\,dt. \tag{3}$$

Das Integral in Klammern kann durch zweifaches Anwenden von partieller Integration berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^N e^{-xt}\sin x\,dx &= -\int_\epsilon^N e^{-xt}\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\,dx = -e^{-xt}\cos x\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} + \int_\epsilon^N \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\right)\cos x\,dx \\ &= -e^{-xt}\cos x\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} - t\int_\epsilon^N e^{-xt}\cos x\,dx \\ &= -e^{-xt}\cos x\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} - t\int_\epsilon^N e^{-xt}\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\,dx \\ &= -e^{-xt}\cos x\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} - te^{-xt}\sin x\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} + t\int_\epsilon^N \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\right)\sin x\,dx \\ &= -e^{-xt}(\cos x + t\sin x)\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} - t^2\int_\epsilon^N e^{-xt}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^N e^{-xt}\sin x\,dx &= -\frac{1}{1+t^2}e^{-xt}(\cos x + t\sin x)\Big|_{x=\epsilon}^{x=N} \\ &= \frac{1}{1+t^2}\left[e^{-\epsilon t}(\cos\epsilon + t\sin\epsilon) - e^{-Nt}(\cos N + t\sin N)\right] =: F_\epsilon^N(t).\end{aligned} \tag{4}$$

Wir möchten jetzt verstehen, was aus dem Integral $\int_0^\infty F_\epsilon^N(t)\,dt$ wird, wenn $\epsilon\to 0^+$ und $N\to\infty$. Für festes $t>0$ gilt offenbar

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+} F_\epsilon^N(t) = \frac{1}{1+t^2} =: F_0^\infty(t),$$

und F_0^∞ ist auf $[0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar, und zwar gilt

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Es folgt, dass für jede Folge $(\epsilon_n, N_n) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$ mit $\epsilon_n\to 0$ und $N_n\to\infty$, die Funktionenfolge $F_n := F_{\epsilon_n}^{N_n} : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ fast überall punktweise gegen F_0^∞ konvergiert. Wir behaupten, dass dann auch

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty F_n(t)\,dt = \int_0^\infty F_0^\infty(t)\,dt,$$

also ist $\pi/2 = \int_0^\infty F_0^\infty(t)\,dt$ auch der Grenzwert in (3). Dies ist eine Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes angesichts der folgenden Behauptung: es gibt eine Konstante $C>0$, so dass

$$\left|e^{-\epsilon t}(\cos\epsilon + t\sin\epsilon) - e^{-Nt}(\cos N + t\sin N)\right| \le C$$

für alle $t\ge 0$ und alle $\epsilon, N>0$ gilt. Es ist klar, dass diese Funktion von $t\in[0,\infty)$ für jedes festes $\epsilon, C>0$ beschränkt ist, zumal $\lim_{\to\infty} e^{-\alpha t}t = 0$ für jede Konstante $\alpha>0$. Es muss aber auch gezeigt werden, dass die Funktion $t \mapsto e^{-\alpha t} t |\sin \alpha|$ eine *gleichmäßige* Schranke für alle $\alpha > 0$ erfüllt. Falls $\sin \alpha = 0$ gibt es hier nichts zu beweisen, also betrachten wir den Fall $\sin \alpha \neq 0$: durch Differenzieren der Funktion $t \mapsto e^{-\alpha t} t \sin \alpha$ finden wir dann, dass das Maximum bei $t = 1/\alpha$ angenommen wird, also

$$\max_{t \geq 0} e^{-\alpha t} t |\sin \alpha| = \frac{1}{e} \frac{|\sin \alpha|}{\alpha}.$$

Da $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ ist diese als Funktion von $\alpha > 0$ beschränkt, und das beweist die Behauptung.

Die Behauptung impliziert

$$|F_\epsilon^N(t)| \leq \frac{C}{1+t^2},$$

and weil die rechte Seite nun eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0, \infty)$ ist, sind die Bedingungen für den Lebesgueschen Konvergenzsatz erfüllt. Zusammengefasst sieht das Resultat jetzt so aus:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{N \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^\infty F_\epsilon^N(t)\, dt = \int_0^\infty F_0^\infty(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$