Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 11

Schriftliche Abgabe: Dienstag 14. Januar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 11.1 (3 + 3 Punkte)
Man definiert **Kugelkoordinaten** (r, θ, ϕ) im 3-dimensionalen Euklidischen Raum durch die Transformation[1]

$$(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z), \qquad \begin{cases} x := r \cos\theta \cos\phi, \\ y := r \sin\theta \cos\phi, \\ z := r \sin\phi. \end{cases} \tag{1}$$

a) Finden Sie ein offenenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^3$, so dass (1) einen C^1-Diffeomorphismus $(0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 \setminus N$ definiert.

b) Für eine gegebene messbare Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, sei $F : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ definiert durch $F(x, y, z) := f\big(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\big)$. Drücken Sie mit Hilfe von f das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ als ein Integral über $[0, \infty)$ aus.

Aufgabe 11.2 (5 + 3 Punkte)
Sei B_R^n die Kugel von Radius $R > 0$ in $\mathbb{R}^n$. In der Vorlesung haben wir die Formel

$$m(B_R^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} R^n \tag{2}$$

für das Lebesgue-Maß dieser Kugel bewiesen.

a) Ohne die Formel (2) zu verwenden, beweisen Sie per vollständige Induktion die Existenz einer Konstante $C_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$m(B_R^n) = C_n R^n \qquad \text{und} \qquad C_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2} C_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Sie dürfen die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ als schon bekannt betrachten.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini mit $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ an, und integrieren Sie auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten.

b) Leiten Sie aus (3) und Aufgabe 8.4 einen neuen Beweis der Formel (2) her.

Aufgabe 11.3 (3 + 2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert in Polarkoordinaten (r, θ) durch $(r, \theta) \mapsto (r, 2\theta)$, d.h. für $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ sind $(r, 2\theta)$ die Polarkoordinaten des Punktes $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

a) Beweisen Sie: φ ist stetig differenzierbar und $\operatorname{Det} D\varphi(x, y) = 2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Hinweis: Kettenregel.

[1] Achtung: für die Definition der Transformation (1) gibt es verschiedene Konventionen. Besonders unter Physikern wird die Variante $x := r \cos\phi \sin\theta$, $y := r \sin\phi \sin\theta$, $z := r \cos\theta$ mit $\theta \in (0, \pi)$ oft verwendet.

b) Finden Sie eine integrierbare Funktion f auf der offenen Menge $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|\mathbf{x}\| < 1\}$, für die die Formel $\int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi)\,|\mathrm{Det}\, D\varphi|\; dm = \int_{\varphi(\mathcal{U})} f\, dm$ falsch ist. Welche Voraussetzung in der gewöhnlichen Transformationsformel wird hier nicht erfüllt?

Aufgabe 11.4 (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm = 1$, und für $\epsilon > 0$, definiere $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch $f_\epsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\epsilon^n} f(\mathbf{x}/\epsilon)$. Zeigen Sie: für jede stetige und beschränkte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon \varphi\, dm = \varphi(0).$$

Hinweis: Transformieren Sie das Integral durch $\mathbf{x} \mapsto \epsilon \mathbf{x}$.

Insgesamt: **25 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 11.A
Eine n-dimensionale Verallgemeinerung der Kugelkoordinaten in Aufgabe 11.1 ist die Transformation

$$(r, \theta, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n), \qquad \begin{cases} x_1 & = r \cos\theta \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_2 & = r \sin\theta \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_3 & = r \sin\phi_1 \cos\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ x_4 & = r \sin\phi_2 \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{n-2}, \\ & \vdots \\ x_{n-2} & = r \sin\phi_{n-4} \cos\phi_{n-3} \cos\phi_{n-2}, \\ x_{n-1} & = r \sin\phi_{n-3} \cos\phi_{n-2}, \\ x_n & = r \sin\phi_{n-2}. \end{cases} \tag{4}$$

a) Zeigen Sie per vollständige Induktion: für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit Länge 2π definiert (4) einen C^1-Diffeomorphismus

$$(0, \infty) \times I \times (-\pi/2, \pi/2) \times \ldots \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^n \setminus N,$$

für eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Was ist die geometrische Bedeutung der Koordinate ϕ_{n-2}*?*

b) Für eine gegebene messbare Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, sei $F : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definiert durch $F(\mathbf{x}) := f\big(\|\mathbf{x}\|\big)$. Zeigen Sie: es gibt eine Konstante $C > 0$, die nicht von der Funktion f abhängt, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = C \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr$.

Aufgabe 11.B
Die Relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dm = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\, dm$$

für $j = 1, \ldots, n$ ist eine n-dimensionale Version von partieller Integration, die unter bestimmten Voraussetzungen durch den Satz von Fubini bewiesen werden kann. Was für Voraussetzungen für f und g reichen, damit diese Relation stimmt? Zeigen Sie insb., dass die Formel immer gilt, falls f stetig differenzierbar und g glatt mit kompaktem Träger ist.