Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 13: Musterlösung zur Aufgabe 13.2

Aufgabe 13.2 (2 + 4)
Auf der offenen Teilmenge $\mathcal{U} := \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) schreiben wir $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$ und definieren damit ein glattes Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{V}(x, y, z) := \left(-\frac{y}{\rho^2}, \frac{x}{\rho^2}, 0\right).$$

a) Berechnen Sie das Vektorfeld $\operatorname{rot}(\mathbf{V}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$.

Lösung:
Mit $\rho^2 = x^2 + y^2$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{V}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(0), \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathcal{U}$. Sie können die partiellen Ableitungen selber berechnen.

b) Sei $\mathcal{V} := \mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathcal{U}$. Finden Sie eine C^1-Funktion $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, die $\operatorname{grad} f = \mathbf{V}$ auf $\mathcal{V}$ erfüllt, aber zeigen Sie dabei, dass keine C^1-Funktion mit dieser Eigenschaft auf ganz $\mathcal{U}$ existiert.
Hinweis: Versuchen Sie, f als Funktion der zylindrischen Polarkoordinaten (ρ, θ, z) mit $x = \rho\cos\theta$ und $y = \rho\sin\theta$ hinzuschreiben. Was müssen $\partial_\rho f$ und $\partial_\theta f$ sein, wenn $\nabla f = \mathbf{V}$?

Lösung:
Wir werden die zylindrischen Polarkoordinaten mit (ρ, θ, ζ) bezeichnen; hier ist ζ eigentlich nur z, aber wir haben dieser Variablen einen neuen Namen für das zweite Koordinatensystem gegeben, um Verwirrung zu vermeiden. Auf $\mathcal{V}$ sind die Koordinaten (ρ, θ, ζ) wohl definiert mit Werten in $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Wenn $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und $\nabla f = \mathbf{V}$ erfüllt, dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Aber f könnte auch als Funktion der Variablen (ρ, θ, ζ) ausgedrückt werden, mit partiellen Ableitungen $\partial_\rho f$, $\partial_\theta f$ und $\partial_\zeta f$, die dann wegen der Kettenregel durch

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + 0 = -\frac{x}{\rho}\frac{y}{\rho^2} + \frac{y}{\rho}\frac{x}{\rho^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} + 0 = y\frac{y}{\rho^2} + x\frac{x}{\rho^2} = 1$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

gegeben sind. Es folgt, dass $f(\rho,\theta,\zeta)$ eine Funktion der Form

$$f(\rho,\theta,\zeta) = \theta + c \tag{1}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist. Jede Funktion von (ρ,θ,ζ) dieser Art ist glatt auf $(0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$, und so ist sie auch glatt als Funktion auf $\mathcal{V}$ von den Variablen (x,y,z) (oder genauer gesagt, die Verknüpfung der Funktion $f(\rho,\theta,\zeta)$ mit der glatten Transformation $(x,y,z) \mapsto (\rho,\theta,\zeta)$ von $\mathcal{V}$ nach $(0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$). Wenn es auch eine C^1-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{V}$ auf ganz $\mathcal{U}$ gibt, dann muss f auf $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ wieder die Form in (1) haben. Aber keine Funktion, die auf $\mathcal{V}$ so aussieht, kann in $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ stetig sein: z.B. findet man zwei Folgen $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathcal{V}$, die gegen $(1,0,0)$ konvergieren, so dass $f(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}$ zwei unterschiedliche Grenzwerte haben kann, nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(\cos(1/k), \sin(1/k), 0) &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} + c \right) = c \\ &\neq c + 2\pi = \lim_{k\to\infty} \left(2\pi - \frac{1}{k} + c \right) = \lim_{k\to\infty} f(\cos(-1/k), \sin(-1/k), 0). \end{aligned}$$