Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 14: Musterlösung zu den Aufgaben 14.1(a), 14.1(d), 14.2 und 14.3

Aufgabe 14.1 (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)
Bestimmen Sie für jeden der folgenden Diffeomorphismen, unter welchen Bedingungen er orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) := (x_2, \dots, x_n, x_1)$

Lösung:
Die Abbildung ist linear und gegeben durch eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also gilt $Df(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{A}$ für alle $(x_1, \dots, x_n)$. Außerdem ist f die Verknüpfung von $n-1$ linearen Abbildungen der Form

$$(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n). \tag{1}$$

Die Matrix dieser Transformation unterscheidet sich nur durch die Vertauschung von zwei nebeneinander stehenden Spalten von der Einheitsmatrix, hat also Determinante -1. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist daher das Produkt von $n-1$ Matrizen mit Determinante -1, hat also Determinante $(-1)^{n-1}$. Fazit: f ist orientierungserhaltend, falls n ungerade ist, und orientierungsumkehrend, falls n gerade ist.
Bemerkung: f ist ein Beispiel einer sogenannten zyklischen Permutation. Es lohnt sich insb., sich das Resultat im Fall $n = 3$ zu merken, denn alle Permutationen von drei Elementen sind entweder Vertauschungen oder zyklisch, wobei die Vertauschungen orientierungsumkehrend und die zyklischen Permutationen orientierungserhaltend sind.

d) Der Fluss $\varphi^{\tau,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = F(t, \mathbf{x})$ für feste Zeitpunkte $\tau, t \in \mathbb{R}$ und eine beliebige beschränkte[1] und stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Hinweis: $D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hängt stetig von τ, t und $\mathbf{x}$ ab.

Lösung:
Per Definition der Flussabbildung gilt $\varphi^{\tau,\tau} = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also $D\varphi^{\tau,\tau}(\mathbf{x}) = \mathbb{1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Da F eine C^1-Funktion ist, folgt aus dem Satz über differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten, dass $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ auch eine C^1-Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, woraus folgt, dass die Jacobimatrix $D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig von τ, t und $\mathbf{x}$ abhängt. Außerdem ist $D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ immer invertierbar, denn $\varphi^{t,\tau} \circ \varphi^{\tau,t} = \mathrm{Id} = \varphi^{\tau,t} \circ \varphi^{t,\tau}$, was wegen der Kettenregel impliziert, dass die Matrizen $D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ und $D\varphi^{t,\tau}(\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x}))$ immer Inverse sind. Folglich definiert

$$\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \qquad t \mapsto D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$$

eine stetige Familie von Matrizen, deren Determinanten nie verschwinden, und wegen Stetigkeit also immer entweder positiv oder negativ sein müssen. Im Fall $t = \tau$ ist die Determinante 1, also folgt, dass diese Determinanten immer positiv sind, und die Flussabbildung $\varphi^{\tau,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist daher immer orientierungserhaltend.

[1] Dass F beschränkt ist, ist für diese Aufgabe nur insofern relevant, dass es die Existernz der Flussabbildung für alle $\tau, t \in \mathbb{R}$ garantiert (siehe Beispiel 4.2 im Skript über gewöhnliche Differentialgleichungen). Hierfür wären andere Bedingungen auch möglich.

Aufgabe 14.2 (6 Punkte)
Beispiel 3.8 im aktuellen Skript für diese Vorlesung[2] beschreibt einen expliziten Atlas für die Sphäre S^2, der aus genau vier Karten $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ besteht. Schreiben Sie alle Kartenübergänge für die Karten in diesem Atlas hin, und zeigen Sie, dass der Atlas orientiert ist.
Lösung:
Vollständigkeitshalber zitieren wir zuerst aus Beispiel 3.8 im Skript, wo die relevante Notation eingeführt wird:

Die ersten zwei Karten $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2)$ werden aus den Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) von Aufgabe 11.1 (Übungsblatt 11) gebaut, die durch

$$x = r\cos\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\phi$$

mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) auf $\mathbb{R}^3$ verwandt sind. In Kugelkoordinaten ist $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Teilmenge $\{r = 1\}$; um die Bedingung $\mathcal{U}_i \cap S^2 = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ zu erfüllen, ersetzen wir $r \in (0, \infty)$ also mit $\rho := r - 1 \in (-1, \infty)$ und definieren $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_1 := (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \mathcal{U}_1, \qquad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)\cos\theta\cos\phi \\ (\rho+1)\sin\theta\cos\phi \\ (\rho+1)\sin\phi \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^3$ als das Komplement der Teilmenge $\{x \geq 0,\ y = 0\}$ definiert wird. Das durch φ_1 definierte Koordinatensystem auf $\mathcal{O}_1 := \mathcal{U}_1 \cap S^2$ ist $(\theta, \phi) : \mathcal{O}_1 \to (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, wobei θ und ϕ ihre gewöhnliche Bedeutung als Kugelkoordinaten haben.
Für die zweite Karte nehmen wir die gleiche Formel für φ_2^{-1}, aber mit Definitionsbereich

$$\mathcal{V}_2 := (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, \infty),$$

und $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^3$ ist dann das Komplement von $\{x \leq 0,\ y = 0\}$. Das entsprechende Koordinatensystem auf $\mathcal{O}_2 := \mathcal{U}_2 \cap S^2$ werden wir mit $(\theta', \phi') : \mathcal{O}_2 \to (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ bezeichnen.
Nur zwei Punkte in S^2 sind nicht in $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, nämlich $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$. Wir definieren jetzt zwei weitere Karten, die genau diese zwei Punkte im Zentrum ihrer Definitionsbereiche haben: die Idee in beiden Fällen ist, dass wir die kartesischen Koordinaten (x, y) als Koordinaten auf Teilmengen von S^2 betrachten und z entsprechend als Funktion von (x, y) definieren. Um den "Nordpol" $(0, 0, 1)$ zu erfassen, definieren wir $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \to \mathcal{V}_3$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_3 := B_1^2 \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} \mathcal{U}_3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)x \\ (\rho+1)y \\ (\rho+1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix},$$

wobei $B_1^2 \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskugel bezeichnet und $\mathcal{U}_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Das entsprechende Koordinatensystem auf der "nördlichen" Hemisphäre $\mathcal{O}_3 := \mathcal{U}_3 \cap S^2$ ist $(x, y) : \mathcal{O}_3 \to B_1^2$.

[2] *Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten*, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_DifferentialFormen.pdf`

Für den Südpol machen wir etwas Ähnliches, aber aus Orientierungsgründen vertauschen wir die Rollen der x- und y-Koordinaten: um Verwirrung zu vermeiden, geben wir beiden neue Namen und definieren $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \to \mathcal{V}_4$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_4 := B_1^2 \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_4^{-1}} \mathcal{U}_4, \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)\eta \\ (\rho+1)\xi \\ -(\rho+1)\sqrt{1-\xi^2-\eta^2} \end{pmatrix},$$

mit $\mathcal{U}_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$. Das entsprechende Koordinatensystem auf der "südlichen" Hemispäre $\mathcal{O}_4 := \mathcal{U}_4 \cap S^2$ ist $(\xi, \eta) : \mathcal{O}_4 \to B_1^2$.

Hier eine zeitsparende Vorbemerkung: für einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus φ ist die Umkehrabbildung φ^{-1} immer auch orientierungserhaltend. Dies sieht man von der Kettenregel, denn für jeden Punkt $\mathbf{x}$ in Definitionsbereich von φ sind die Jacobimatrizen $D\varphi(\mathbf{x})$ und $D\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{x}))$ Inverse; wenn eine davon positive Determinante hat, folgt es für die Andere auch. Wenn wir also für zwei Koordinatensysteme $x : \mathcal{O}_x \to \mathbb{R}^m$ und $y : \mathcal{O}_y \to \mathbb{R}^m$ bewiesen haben, dass der Kartenübergang $y \circ x^{-1} : x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \to y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$ orientierungserhaltend ist, dann wissen wir das auch sofort für einen zweiten Kartenübergang, nämlich $x \circ y^{-1} : y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \to x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$, der ja nur die Umkehrabbildung des Ersten ist. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden nur die Hälfte der Gesamtmenge der Kartenübergänge explizit hinschreiben; die Reste sind die Umkehrabbbildungen von diesen.
Wir fangen mit den Karten φ_1 und φ_2 an, die mit den Koordinatensystemen (θ, ϕ) auf $\mathcal{O}_1$ und (θ', ϕ') auf $\mathcal{O}_2$ verbunden sind. Ihr gemeinsamer Definitionsbereich $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ ist die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in S^2$ mit $y \neq 0$, d.h. er besteht aus den zwei Komponenten

$$\mathcal{O}_{12}^+ := \{y > 0\} \subset S^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_{12}^- := \{y < 0\} \subset S^2.$$

Das Bild $(\theta, \phi)(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) \subset \mathbb{R}^2$ besteht dann auch aus zwei Komponenten und ist nämlich $((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times (-\pi/2, \pi/2)$; das Bild $(\theta', \phi')(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist analog $((-\pi, 0) \cup (0, \pi)) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Die Funktionen ϕ und ϕ' sind auf $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ identisch, und θ und θ' sind auf $\mathcal{O}_{12}^+$ auch identisch, wo beide Werte in $(0, \pi)$ haben, aber auf $\mathcal{O}_{12}^-$ unterscheiden sie sich durch $\theta' = \theta - 2\pi$, da θ Werte in $(\pi, 2\pi)$ aber θ' Werte in $(-\pi, 0)$ hat. Der Kartenübergang $(\theta', \phi') \circ (\theta, \phi)^{-1}$ ist also die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \supset ((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to ((-\pi, 0) \cap (0, \pi)) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2,$$
$$(\theta, \phi) \mapsto \begin{cases} (\theta, \phi) & \text{für } 0 < \theta < \pi, \\ (\theta - 2\pi, \phi) & \text{für } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Die Jacobimatrix dieser Transformation ist in jedem Punkt die Einheitsmatrix, also ist die Transformation orientierungserhaltend.
Als Nächstes betrachten wir die Karten φ_1 und φ_3; Letzteres ist mit dem Koordinatensystem (x, y) auf $\mathcal{O}_3 := \{z > 0\} \subset S^2$ verbunden. Der gemeinsame Definitionsbereich ist nun

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_3 = \left\{(x, y, z) \in S^2 \;\middle|\; z > 0\right\} \setminus \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\},$$

der von (θ, ϕ) nach $(0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ und von (x, y) nach $B_1^2 \setminus \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\}$ abgebildet wird. Wegen der Relationen $x = r \cos\theta \cos\phi$ und $y = r \sin\theta \cos\phi$ ist der Kartenübergang $(x, y) \circ (\theta, \phi)^{-1}$ leicht hinzuschreiben: er ist nämlich

$$\mathbb{R}^2 \supset (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to B_1^2 \setminus \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$(\theta, \phi) \mapsto (\cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\phi).$$

Die Jacobimatrix dieser Transformation in einem beliebigen Punkt $(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ ist

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix},$$

die Determinante davon ist also $\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi = \sin\phi\cos\phi > 0$, da ϕ auf diesem Bereich Werte in $(0, \pi/2)$ hat.
Die Geschichte der Karten φ_2 und φ_3 ist fast genau gleich: wir haben jetzt

$$\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 = \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; z > 0\right\} \setminus \{x \leq 0 \text{ und } y = 0\},$$

der von (θ', ϕ') nach $(-\pi, \pi) \times (0, \pi/2)$ und von (x, y) nach $B_1^2 \setminus \{x \leq 0 \text{ und } y = 0\}$ abgebildet wird. Die Formel für den Kartenübergang $(x, y) \circ (\theta', \phi')^{-1}$ ist sonst gleich, nur der Definitionsbereich und Zielraum sind anders:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \supset (-\pi,\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\to B_1^2 \setminus \{x \leq 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathbb{R}^2, \\ (\theta', \phi') &\mapsto (\cos\theta'\cos\phi', \sin\theta'\cos\phi'). \end{aligned}$$

Die Determinante der Jacobimatrix dieser Transformation ist wieder $\sin\phi'\cos\phi'$, die positiv ist, weil ϕ' Werte in $(0, \pi/2)$ hat.
Jetzt betrachten wir die Karten φ_1 und φ_4; Letzteres ist mit dem Koordinatensystem (ξ, η) auf $\mathcal{O}_4 := \{z < 0\} \subset S^2$ verbunden. Der gemeinsame Definitionsbereich ist

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_4 = \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; z < 0\right\} \setminus \{x \geq 0 \text{ und } y = 0\},$$

der von (θ, ϕ) nach $(0, 2\pi) \times (-\pi/2, 0)$ und von (ξ, η) nach $B_1^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ und } x = 0\}$ abgebildet wird. Sie dürfen hier nicht vergessen, dass bei den Koordinaten ξ und η die gewöhnlichen Rollen von x und y vertauscht sind. Deswegen sind ξ und η mit θ und ϕ auf ihrem gemainsamen Definitionsbereich durch die Relationen $\eta = \cos\theta\cos\phi$ und $\xi = \sin\theta\cos\phi$ verwandt; der Kartenübergang $(\xi, \eta) \circ (\theta, \phi)^{-1}$ ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \supset (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) &\to B_1^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ und } x = 0\right\} \subset \mathbb{R}^2, \\ (\theta, \phi) &\mapsto (\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi). \end{aligned}$$

Die Jacobimatrix dieser Transformation in einem beliebigen Punkt $(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, 0)$ ist

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \eta}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix},$$

und die Determinante davon ist $-\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi - \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi = -\sin\phi\cos\phi > 0$, da ϕ auf diesem Bereich Werte in $(-\pi/2, 0)$ hat, also ist $\cos\phi$ positiv und $\sin\phi$ negativ.
Bei den Karten φ_2 und φ_4 ist die Geschichte wieder ähnlich mit nur minimalen Unterschieden: es gilt,

$$\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 = \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; z < 0\right\} \setminus \{x \leq 0 \text{ und } y = 0\},$$

der von (θ', ϕ') nach $(-\pi, \pi) \times (-\pi/2, 0)$ und von (ξ, η) nach $B_1^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ und } x = 0\}$ abgebildet wird. Der Kartenübergang ist dann gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \supset (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \to B_1^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ und } x = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$(\theta', \phi') \mapsto (\sin\theta' \cos\phi', \cos\theta' \cos\phi'),$$

und die Jacobimatrix dieser Transformation hat Determinante $-\sin\phi' \cos\phi'$, die wieder positiv ist, weil ϕ' Werte in $(-\pi/2, 0)$ hat.
Jetzt bleibt nur ein Vergleich der Karten φ_3 und φ_4, aber in diesem Fall ist der gemeinsame Definitionsbereich $\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{O}_4$ die leere Menge. Der entsprechende Kartenübergang ist also die triviale Abbildung $\emptyset \to \emptyset$, die aus trivialen Gründen orientierungserhaltend ist. Damit ist bewiesen, dass alle Karteinübergänge zwischen diesen vier Karten orientierungserhaltend sind.

Aufgabe 14.3 (3 + 5 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir durch Integration einer Differentialform den Flächeninhalt der Sphäre $S^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$ berechnen. Wir definieren $\omega \in \Omega^2(S^2)$ durch

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix},$$

wobei die Vektoren $\mathbf{x} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}S^2 = \mathbf{x}^\perp \subset \mathbb{R}^3$ als Spalten einer 3-mal-3 Matrix betrachtet werden. Diese 2-Form hat die passende geometrische Bedeutung, denn $|\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$ ist das Volumen des von $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannten Parallelipipeds; da $\mathbf{x}$ ein Einheitsvektor orthogonal zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist, ist $|\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$ dann auch der Flächeninhalt des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelogramms.
Sei $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i\}_{i=1}^4$ der in Aufgabe 14.2 (und Beispiel 3.8 im Skript) erwähnte orientierte Atlas auf S^2, mit entsprechenden lokalen Koordinatensystemem $S^2 \supset \mathcal{O}_i \xrightarrow{x_i} \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R}^2$ und Parametrisierungen $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{W}_i \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}_i \subset S^2$. Insbesondere ist ψ_1 gegeben durch die Kugelkoordinaten $(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, d.h.

$$\mathcal{W}_1 := (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{O}_1 \subset S^2, \qquad \psi_1(\theta, \phi) = (\cos\theta \cos\phi, \sin\theta \cos\phi, \sin\phi).$$

Wir berechnen $\int_{S^2} \omega$ in den folgenden Schritten:

a) Zeigen Sie: für $E := S^2 \setminus \mathcal{O}_1$ und $i = 2, 3, 4$ ist $x_i(\mathcal{O}_i \cap E) \subset \mathcal{W}_i$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

Lösung:
Die Menge $E = S^2 \setminus \mathcal{O}_1$ ist der Halbkreis $\{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0 \text{ und } y = 0\}$. Für das Koordinatensystem $x_2 = (\theta', \phi') : \mathcal{O}_2 \to \mathbb{R}^2$ ist ihr Bild

$$x_2(E \cap \mathcal{O}_2) = \{0\} \times (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{R}^2,$$

das als Teilmenge des 1-dimensionalen Unterraums $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist. Für $x_3 = (x, y) : \mathcal{O}_3 \to \mathbb{R}^2$ ist das Bild

$$x_3(E \cap \mathcal{O}_3) = \left\{(x, y) \in B_1^2 \;\middle|\; x \geq 0 \text{ und } y = 0\right\},$$

das als Teilmenge des 1-dimensionalen Unterraums $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ebenfalls eine Nullmenge ist. Für $x_4 = (\xi, \eta) : \mathcal{O}_4 \to \mathbb{R}^2$ ist das Bild

$$x_4(E \cap \mathcal{O}_4) = \left\{(x, y) \in B_1^2 \;\middle|\; y \geq 0 \text{ und } x = 0\right\},$$

und das ist aus dem gleichen Grund eine Nullmenge.

b) Laut Satz 3.18 im Skript gilt wegen Teilaufgabe (a) jetzt

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\mathcal{W}_1} \omega_{\psi_1(\theta,\phi)}\big(\partial_\theta \psi_1(\theta,\phi), \partial_\phi \psi_1(\theta,\phi)\big)\, d\theta\, d\phi.$$

Berechnen Sie dieses Integral.

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_{\psi_1(\theta,\phi)}\big(\partial_\theta \psi_1(\theta,\phi), \partial_\phi \psi_1(\theta,\phi)\big) &= \operatorname{Det}\big(\psi_1(\theta,\phi) \quad \partial_\theta\psi_1(\theta,\phi) \quad \partial_\phi\psi_1(\theta,\phi)\big) = \\
&= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\theta\cos^3\phi + \sin^2\theta\cos\phi\sin^2\phi + \cos^2\theta\cos\phi\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^3\phi \\
&= \cos\phi\left(\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi\right) \\
&= \cos\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \cos\phi,
\end{aligned}$$

also mit dem Satz von Fubini,

$$\int_{S^2} \omega = \int_{(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)} \cos\phi\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi = 2\pi \sin\phi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi.$$