Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 16

Ohne Abgabe

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.
Musterlösungen stehen auf der Website zur Verfügung.

Aufgabe 16.A

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, und $V^* := \Lambda^1 V^*$ sein Dualraum. Beweisen Sie:

a) Die Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in V^*$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k \neq 0 \in \Lambda^k V^*$.

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k} \to \Lambda^k V^*, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$$

antisymmetrisch.

c) Sei $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis und $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ ihre Dualbasis. Dann gilt für alle n-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \lambda_1(e_1) & \cdots & \lambda_1(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n(e_1) & \cdots & \lambda_n(e_n) \end{pmatrix} e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*. \tag{1}$$

Hinweis: Definieren Sie ein Element von $\omega \in \Lambda^n(V^*)^*$ *durch* $\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \frac{\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n}{e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*}$.

Jetzt betrachten wir eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand, mit lokalem Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^m$ und entsprechenden Koordinaten $x_1, \ldots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Es seien $f_1, \ldots, f_k : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen. Zeigen Sie:

d) Im Fall $k = n$ gilt $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Bemerkung: Als wichtiger Spezialfall nimmt man für $f_1, \ldots, f_n$ *ein zweites Koordinatensystem* $y = (y_1, \ldots, y_n) : \mathcal{O} \to \mathbb{H}^m$. *Dann sind beide Seiten in jedem Punkt* $p \in \mathcal{O}$ *garantiert nichttrivial, und die Matrix wird die Jacobimatrix des Kartenübergangs* $y \circ x^{-1}$ *im Punkt* $x(p) \in \mathcal{W}$.

e) Im Fall $M := \mathcal{U}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist ein Punkt $p \in \mathcal{U}$ ein kritischer Punkt von $f := (f_1, \ldots, f_k) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ genau dann, wenn die stetige k-Form $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \in \Omega_0^k(\mathcal{U})$ im Punkt p verschwindet.[1]

[1] Zur Erinnerung: $p \in \mathcal{U}$ heißt ein **kritischer Punkt** von $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$, falls das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ in diesem Punkt nicht surjektiv ist.

Aufgabe 16.B
Es seien $m \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $\omega \in \Omega_0^m(M)$ die von der Orientierung bestimmte Volumenform. Auf $\mathbb{R}^n$ selbst wählen wir die *kanonische* Orientierung, für die die Identitätsabbildung $(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Karte ist, und bezeichnen mit

$$\mu := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Standardvolumenform auf $\mathbb{R}^n$. Für einen Punkt $p \in M$ und eine Basis $X_1, \ldots X_m \in T_pM$ gilt immer $\omega(X_1, \ldots, X_m) \neq 0$; wir nennen diese Basis **positiv** bzw. **negativ orientiert**, falls $\omega(X_1, \ldots, X_m)$ positiv bzw. negativ ist. Wichtig zu beachten ist, dass diese Definition von der Reihenfolge der Basisvektoren abhängt, z.B. wenn $X_1, \ldots, X_m$ eine positiv orientierte Basis ist, dann ist $X_2, X_1, X_3, \ldots, X_m$ eine negativ orientierte Basis. Beweisen Sie:

a) Im Fall $m \geqslant 2$ betrachten wir ∂M mit der Randorientierung. Es sei $\nu \in T_pM \backslash T_p(\partial M)$ ein auswärts gerichteter Tangentialvektor in einem Punkt $p \in \partial M$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{m-1}$ von $T_p(\partial M)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu, X_1, \ldots, X_{m-1}$ eine positiv orientierte Basis von T_pM ist.

b) Wir betrachten den Fall $m := n - 1$ und $\omega = \iota_\nu \mu$ für ein Normalenvektorfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^n$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{n-1}$ von T_pM ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu(p), X_1, \ldots, X_{n-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathbb{R}^n$ ist.

c) Im Fall $n = 3$ mit $M := \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge ist für jeden Punkt $p \in \mathcal{U}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ das Tripel $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ immer eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 16.C
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ ein offener Quader und $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{div}(\mathbf{X}) = 0$. Aus einem in der Vorlesung bewiesenen Resultat folgt, dass $\mathbf{X} = \operatorname{rot}(\mathbf{V})$ für ein Vektorfeld $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$. Aber $\mathbf{V}$ ist in dieser Aussage nicht eindeutig. Angenommen, $\mathbf{V}' \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ist ein weiteres Vektorfeld mit $\operatorname{rot}(\mathbf{V}') = \mathbf{X}$. Was können Sie über $\mathbf{V} - \mathbf{V}'$ sagen? Können Sie die Menge $\{\mathbf{A} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U}) \mid \operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{X}\}$ genau beschreiben?

Aufgabe 16.D
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir versehen Ω mit der kanonischen Orientierung, für welche eine orientierte Karte um jeden inneren Punkt $p \in \Omega \backslash \partial\Omega$ durch die kartesischen Koordinaten $x, y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert wird, und versehen $\partial\Omega$ ebenfalls mit der entsprechenden Randorientierung.
Welche geometrische Bedeutung hat das Integral $I(\Omega) := \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$?

Aufgabe 16.E
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Funktion mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Drücken Sie das Integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ als Integral einer 1-Form auf einer 1-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ aus. Was ist die geometrische Bedeutung dieses Integrals?