Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 3

Schriftliche Abgabe: Dienstag 5. November 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 3.1 (4 + 4 Punkte)
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, so dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $F_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $F_t(\mathbf{x}) := F(t, \mathbf{x})$ Lipschitz-stetig ist. Wir bezeichnen mit $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ den Fluss des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t))$.

a) Angenommen, es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathcal{U}$, so dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Träger von $F_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ in K enthalten ist. Beweisen Sie: der Fluss $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ definiert, und für alle $\tau, t \in \mathbb{R}$ definiert $\varphi^{\tau,t} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ einen Homöomorphismus.[1]

b) Angenommen, es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathcal{U}$, so dass $F_t|_K \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: für jedes $\tau, t \in \mathbb{R}$ existiert eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von K, so dass $\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ definiert ist.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto F(t, x)$ eine Funktion von der Klasse C^1 mit $\partial_x F(t, x) \geq 0$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, und sei $y : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ eine Lösung zum Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0$$

für gegebene Konstanten $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $t_+ > t_0$. Beweisen Sie: ist $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und erfüllt sie die Ungleichung

$$x(t) \leq y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s)\big)\, ds$$

für alle $t \in [t_0, t_+)$, dann gilt auch $x(t) \leq y(t)$ für alle $t \in [t_0, t_+)$.
Hinweis: Der Spezialfall mit F in der Form $F(t, x) = f(t)x$ ist eine Version der Grönwall-Ungleichung.

Aufgabe 3.3 (3 + 3 + 6 + 3 Punkte)
Wir betrachten die sogenannte *Gradientenflussgleichung*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \tag{1}$$

für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2, die im Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Maximum annimmt. Wir bezeichnen mit $\mathbf{A} := Hf(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Hesse-Matrix von f im kritischen Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$, und nennen den kritischen Punkt **nicht entartet**, falls $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Beweisen Sie:

[1] Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein **Homöomorphismus**, falls f stetig und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig ist.

a) Es gibt eine stetige matrixwertige Funktion $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{B}(0) = 0$, so dass $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

b) Ist der kritische Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ nicht entartet, dann gilt

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle \le -\lambda \|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer Konstante $\lambda > 0$. Finden Sie den optimalen Wert für diese Konstante. *Hinweis: λ sollte etwas mit den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ zu tun haben.*

c) Sei $\mathbf{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung zur Gleichung (1) mit $0 \in (t_-, t_+)$. Ist der kritische Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ nicht entartet, dann gibt es für jedes $\epsilon \in (0, \lambda)$ eine Umgebung $\mathcal{U}_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ von 0 mit der folgenden Eigenschaft: liegt $\mathbf{x}(0)$ in $\mathcal{U}_\epsilon$, dann gilt auch $\mathbf{x}([0, t_+)) \subset \mathcal{U}_\epsilon$, $t_+ = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ und

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le C e^{-(\lambda-\epsilon)t} \quad \text{für alle} \quad t \ge 0 \tag{2}$$

mit einer Konstante $C > 0$.
Hinweis: Wenn $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$ klein ist, dann ist $z(t) := \|\mathbf{x}(t)\|^2$ eine Unterfunktion für die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = -2(\lambda - \epsilon)y(t)$. (Warum?)

d) Die Funktion $f(x, y) := -x^2 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$ hat ein lokales Maximum in $0 \in \mathbb{R}^2$, aber der kritische Punkt ist entartet. Finden Sie für diese Funktion eine Lösung $\mathbf{x} : (t_-, \infty) \to \mathbb{R}^2$ zur Gleichung (1), die bei $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert aber keine Abschätzung der Form (2) erfüllt.

Insgesamt: **27 Punkte**

Die folgende Aufgabe wird teilweise in den Übungen besprochen, ist aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 3.A
Die allgemeinste Form eines Differentialgleichungssystems k-ter Ordnung sieht so aus:

$$F(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)) = 0, \tag{3}$$

wobei $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene Funktion auf einer offenen Teilmenge

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k+1} \to \mathbb{R}^m$$

ist. Dieses System besteht aus m Gleichungen, die von n reellwertigen Funktionen (die Komponentenfunktionen von $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$) erfüllt werden sollen. Einfachheitshalber werden wir hier annehmen, dass F von Klasse C^1 ist. Die Jacobi-Matrix von F im Punkt $(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \in \mathcal{U}$ lässt sich dann in der Form

$$DF(t, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \partial_t F(t, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k) & D_0 F(t, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k) & \cdots & D_k F(t, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k) \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $D_j F(t, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k)$ für jedes $j = 0, \ldots, k$ eine $(m \times n)$-Matrix ist. Im Folgenden betrachten wir nur den Fall $m = n$.

a) Beweisen Sie: falls $(t_0, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k)$ in $F^{-1}(0)$ liegt und $D_k(t_0, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k)$ invertierbar ist, dann hat die Gleichung (3) für $\epsilon > 0$ hinreichend klein eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{x}_j$ für $j = 0, \ldots, k$.

b) Im Beispiel $F(t, x_0, x_1) := x_0 - x_1^2$ mit $m = n = k = 1$ kann die Annahme in Teil (a) über die Jacobi-Matrix nicht weggelassen werden: zeigen Sie, dass die Gleichung $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ mindestens zwei lokale Lösungen mit $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ hat.