Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 4: Musterlösung zur Aufgabe 4.4

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)
Wir bezeichnen mit $(\tau, t, x) \mapsto \varphi^{\tau,t}(x)$ den Fluss der nichtlinearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = e^{tx}x(t)$. Geben Sie explizite Formeln für $\varphi^{\tau,t}(0)$ und $\partial_x \varphi^{\tau,t}(x)\big|_{x=0}$ für alle $\tau, t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Welches Anfangswertproblem wird von der Funktion $t \mapsto \partial_x \varphi^{\tau,t}(x)\big|_{x=0}$ erfüllt?

Lösung:
Per Definition gilt $\varphi^{\tau,t}(0) = x(t)$ wenn $x(t)$ die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = e^{tx(t)}x(t)$ und Anfangsbedingung $x(\tau) = 0$ erfüllt. Bevor man versucht, die Differentialgleichung explizit zu lösen, sollte man sich hier fragen, ob es für den gegebenen Anfangswert vielleicht eine offensichtliche Lösung gibt, die man einfach erraten könnte. Wir bemerken z.B. dass für jede Lösung x dieser Differentialgleichung, falls $x(t_1) = 0$ in einem gegebenen Zeitpunkt t_1 gilt, dann gilt auch

$$\dot{x}(t_1) = e^{t_1 \cdot 0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Es folgt, dass die *konstante* Funktion $x(t) = 0$ tatsächlich eine Lösung ist, und da sie auch $x(\tau) = 0$ für den gegebenen Anfangszeitpunkt τ erfüllt, so ist der Fluss $\varphi^{\tau,t}(0)$ für alle $\tau, t \in \mathbb{R}$ definiert, und es gilt

$$\varphi^{\tau,t}(0) = 0.$$

Um $\partial_x \varphi^{\tau,t}(x)\big|_{x=0}$ zu finden, gibt es mindestens zwei Möglichkeiten.

Methode 1:
Da die Funktion $F(t, x) := e^{tx}x$ glatt ist, wissen wir aus dem Satz über differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten, dass die Flusabbildung

$$(\tau, t, x) \mapsto \varphi(\tau, t, x) = \varphi^{\tau,t}(x)$$

auch glatt ist; insb. ist diese Abbildung von der Klasse C^2, und daher gilt $\partial_t \partial_x \varphi(\tau, t, x) = \partial_x \partial_t \varphi(\tau, t, x)$. Da $\varphi(\tau, t, x)$ per Definition die Differentialgleichung

$$\partial_t \varphi(\tau, t, x) = e^{t\varphi(\tau,t,x)} \varphi(\tau, t, x)$$

erfüllt, folgt wegen $\varphi(\tau, t, 0) = \varphi^{\tau,t}(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_x \varphi(\tau, t, x)|_{x=0} &= \partial_x \partial_t \varphi(\tau, t, x)|_{x=0} = \partial_x \left[e^{t\varphi(\tau,t,x)} \varphi(\tau, t, x) \right]\Big|_{x=0} \\
&= e^{t\varphi(\tau,t,0)} \left[\partial_x \varphi(\tau, t, x) \right]\Big|_{x=0} \cdot \varphi(\tau, t, 0) + e^{t\varphi(\tau,t,0)}\, \partial_x \varphi(\tau, t, x)|_{x=0} \\
&= \partial_x \varphi(\tau, t, x)|_{x=0}\,.
\end{aligned}$$

In anderen Worten, die Funktion $\Phi(t) := \partial_x \varphi(\tau, t, 0)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}(t) = \Phi(t). \tag{1}$$

Eine Anfangsbedingung kann aus der Eigenschaft $\varphi^{\tau,\tau}(x) = x$ der Flussabbildung gefolgert werden, denn das impliziert $\partial_x \varphi(\tau, \tau, x) = \partial_x x = 1$, also

$$\Phi(\tau) = 1. \tag{2}$$

Die eindeutige Funktion, die (1) und (2) erfüllt, ist

$$\partial_x \varphi^{\tau,t}(x)\big|_{x=0} = \Phi(t) = e^{t-\tau}.$$

Methode 2:
Statt die Differentialgleichung (1) für $\partial_x \varphi^{\tau,t}(x)\big|_{x=0}$ aus der Differentialgleichung für $\varphi(\tau, t, x)$ herzuleiten, könnte man diese auch aus dem Satz über differenzierbare Abhängigkeit (oder genauer gesagt aus Lemma 8.2 im Skript) direkt ablesen. Betrachten wir τ als feste Konstante und schreiben die sogenannte “vereinfachte” Flussabbildung als $\varphi^t(x) := \varphi^{\tau,t}(x)$, dann ist das Differential $D\varphi^t(x) \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$ laut Lemma 8.2 gegeben durch

$$D\varphi^t(x) = \Phi_x(t),$$

wobei $\Phi_x(t) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eindeutig durch das Anfangswertproblem

$$\dot{\Phi}_x(t) = D_x F(t, \varphi^t(x))\Phi_x(t), \qquad \Phi_x(\tau) = 1$$

bestimmt wird. In unserer Situation gilt $F(t, x) = e^{tx}x$, und die lineare Abbildung $D_x F(t, \varphi^t(x))) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch Multiplikation mit der partiellen Ableitung von $F(t, x)$ nach x im Punkt $(t, \varphi^t(x))$, also schreiben wir $\partial_x F(t, x) = te^{tx}x + e^{tx} = e^{tx}(tx + 1)$ und folgern

$$D_x F(t, \varphi^t(x))\Phi_x(t) = e^{t\varphi^t(x)} \left[t\varphi^t(x) + 1\right] \cdot \Phi_x(t).$$

Im Fall $x = 0$ gilt $\varphi^t(0) = 0$, also wird diese Differentialgleichung jetzt

$$\dot{\Phi}_0(t) = \Phi_0(t),$$

genau wie (1), und die eindeutige Lösung mit $\Phi_0(\tau) = 1$ ist wieder $\Phi_0(t) = e^{t-\tau}$.