Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 7: Musterlösung zu den Aufgaben 7.2, 7.3 und 7.Z

Aufgabe 7.2 (2 + 3 + 4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Beweisen Sie:

a) Gilt $|f| \le C$ für eine Konstante $C > 0$ und hat die Menge $A := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ Maß $\mu(A) < \infty$, dann ist f μ-integrierbar, und es gilt $\left|\int_X f\, d\mu\right| \le C\mu(A)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Relation $|\int_X f\, d\mu| \le \int_X |f|\, d\mu$.

Lösung:
Per Annahme verschwindet f auch der Teilmenge $X \setminus A$, also gilt wegen $|f| \le C$ die Abschätzung

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_A |f|\, d\mu + \int_{X\setminus A} |f|\, d\mu = \int_A |f|\, d\mu \le \int_A C\, d\mu = \int_X C\chi_A\, d\mu = C\mu(A) < \infty,$$

wobei die in der Vorlesung bewiesenen Eigenschaften $\int_{E_1\cup E_2} f\, d\mu = \int_{E_1} f\, d\mu + \int_{E_2} f\, d\mu$ (falls $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), $\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu$ (falls $f \le g$) und $\int_E f\, d\mu = \int_X \chi_E f\, d\mu$ angewendet werden, und die Berechnung von $\int_X C\chi_A\, d\mu$ direkt aus der Definition des Integrals für nichtnegative Treppenfunktionen folgt. Dies beweist, dass f μ-integrierbar ist, und dann folgt

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \le \int_X |f|\, d\mu \le C\mu(A).$$

b) Sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$. Gilt $\mu(X) < \infty$ und ist f μ-integrierbar, dann ist f_n für alle n hinreichend groß auch μ-integrierbar, und es gilt $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Lösung
Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $x \in X$ gilt. Es folgt $|f_n(x)| < |f(x)| + \epsilon$ und daher

$$\int_X |f_n|\, d\mu \le \int_X (|f| + \epsilon)\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu + \int_X \epsilon\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu + \epsilon\mu(X) < \infty,$$

da $\mu(X)$ endlich und f μ-integrierbar ist, also f_n ist für alle $n \ge N$ auch μ-integrierbar. Es folgt außerdem für $n \ge N$,

$$\left|\int_X f\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu\right| \le \int_X |f - f_n|\, d\mu \le \int_X \epsilon\, d\mu = \epsilon\mu(X),$$

und da $\mu(X) < \infty$ wird dies beliebig klein, wenn $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt wird. Das beweist die Konvergenz $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Für die nächste Teilaufgabe betrachten wir ein Intervall $X := [x_0, c) \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $-\infty < x_0 < c \le \infty$, die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{B}([x_0, c))$, eine stetige Funktion $f : [x_0, c) \to \mathbb{R}$ und ein Maß $\mu : \mathcal{B}([x_0, c)) \to [0, \infty]$, das für alle Teilintervalle $(a, b) \subset [x_0, c)$ endlicher Länge $\mu\big((a, b)\big) = b - a$ erfüllt (s. Aufgabe 6.2). Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass f auf jedem kompakten Teilintervall $[x_0, x] \subset [x_0, c)$ μ-integrierbar ist, da f auf diesem Intervall stetig und daher beschränkt ist.

c) Die Funktion $F : [x_0, c) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := \int_{[x_0,x]} f \, d\mu$ ist differenzierbar und erfüllt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, c)$.

Lösung

Für $x \in [x_0, c)$ und $h > 0$ hinreichend klein gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{[x_0,x+h]} f \, d\mu - \int_{[x_0,x]} f \, d\mu\right) = \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} f \, d\mu,$$

weil $[x_0, x + h]$ die disjunkte Vereinigung von $[x_0, x]$ und $(x, x + h]$ ist. Da f stetig ist, kann das letztere Integral mit $\frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} f(x) \, d\mu$ verglichen werden, wobei $f(x) \in \mathbb{R}$ als Konstante betrachtet wird, also dies ist eigentlich das Integral einer Treppenfunktion auf $(x, x + h]$ und ist daher

$$\frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} f(x) \, d\mu = \frac{1}{h} f(x)\mu\big((x, x + h]\big) = \frac{1}{h} f(x)\mu\big((x, x + h)\big) = f(x);$$

hier haben wir das Resultat von Aufgabe 6.2(b) angewendet, um $(x, x+h]$ mit dem offenen Intervall $(x, x + h)$ zur Berechnung des Maßes zu ersetzen. Es folgt,

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} f(x) \, d\mu + \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} [f - f(x)] \, d\mu \\ &= f(x) + \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} [f - f(x)] \, d\mu.\end{aligned}$$

Der Integrand in der letzten Zeile kann für kleines $h > 0$ als beliebig klein angenommen werden, denn f ist stetig: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nämlich ein δ, so dass die Funktion $f - f(x)$ auf $[x, x + \delta]$ immer Betrag kleiner als ϵ hat. Teilaufgabe (a) gibt dann,

$$h \in (0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} [f - f(x)] \, d\mu\right| \leq \frac{1}{h}\epsilon\mu\big((x, x + h]\big) = \epsilon,$$

und es folgt, $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

Im Fall $x > x_0$ müssen wir auch $\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ betrachten: der Hauptunterschied ist dann, dass $[x_0, x]$ jetzt die disjunkte Vereinigung von $[x_0, x + h]$ mit $(x + h, x]$ ist, also

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{[x_0,x+h]} f \, d\mu - \int_{[x_0,x]} f \, d\mu\right) = -\frac{1}{h}\int_{(x+h,x]} f \, d\mu \\ &= \frac{1}{|h|}\int_{(x-|h|,x]} f \, d\mu.\end{aligned}$$

Analog zum obigen Argument kann man wegen der Stetigkeit von f zeigen, dass dieses Integral für $|h|$ hinreichend klein beliebig nahe an $f(x)$ ist.

Bemerkung: Im Wesentlichen ist dieser Beweis das Gleiche wie beim Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Riemann-Integral. Es hat fast nichts mit der genauen Definition des Lebesgue-Integrals zu tun, sondern basiert prinzipiell auf der einfachen Tatsache, dass das Lebesgue-Integral einer Funktion mit konstantem Wert $c \in \mathbb{R}$ auf einem Intervall mit Länge $h > 0$ genau ch ist, und ansonsten auf der grundlegenden Abschätzung $\left|\int_E f \, d\mu\right| \leq \int_E |f| \, d\mu$, die ja auch für das Riemann-Integral gültig ist.

Aufgabe 7.3 (5 + 4 + 3 Punkte)
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede nichtnegative messbare Funktion $f : X \to [0,\infty]$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein neues Maß $\mu_f : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ durch $\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu$ definiert. Beweisen Sie:

a) Für zwei gegebene messbare Funktionen $f : X \to [0,\infty)$ und $g : X \to \mathbb{R}$ ist g genau dann μ_f-integrierbar, wenn gf μ-integrierbar ist; des Weiteren gilt $\int_A g\, d\mu_f = \int_A gf\, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall mit g eine Treppenfunktion, dann eine nichtnegative Funktion, und erst danach den allgemeinen Fall $g : X \to \mathbb{R}$. Für die Verallgemeinerung von Treppenfunktionen zu nichtnegativen Funktionen könnte der Satz über monotone Konvergenz helfen.

Lösung:
Sei $f : X \to [0,\infty)$ messbar und $g : X \to [0,\infty)$ eine messbare Treppenfunktion, was heißt, $g = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$ für endlich viele Konstanten $c_1, \ldots, c_N > 0$ und messbare Teilmengen $E_1, \ldots, E_N \subset X$. Dann ist $\int_A g\, d\mu_f \in [0,\infty]$ gegeben per Definition durch

$$\begin{aligned}\int_A g\, d\mu_f &= \sum_{i=1}^N c_i \mu_f(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^N c_i \int_{E_i \cap A} f\, d\mu = \sum_{i=1}^N \int_{E_i \cap A} c_i f\, d\mu = \sum_{i=1}^N \int_X c_i \chi_{E_i \cap A} f\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N \int_X c_i \chi_A \chi_{E_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^N \int_A c_i \chi_{E_i} f\, d\mu = \int_A \left(\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i} \right) f\, d\mu = \int_A gf\, d\mu,\end{aligned}$$

wobei wir die in der Vorlesung bewiesenen Eigenschaften $\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$, $\int_A cf\, d\mu = c \int_A f\, d\mu$ für $c \in \mathbb{R}$, und $\int_A f\, d\mu = \int_X \chi_A f\, d\mu$ angewendet haben, sowie die Relation $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$, die für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt.
Als Nächstes nehmen wir an, $g : X \to [0,\infty]$ sei eine beliebige nichtnegative messbare Funktion. Nach einem in der Vorlesung bewiesenen Resultat ist g dann die Grenzfunktion für eine punktweise konvergente Folge messbarer nichtnegativer Treppenfunktionen $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \ldots \leq g$. Da f nichtnegativ ist, definiert $g_1 f \leq g_2 f \leq g_3 f \leq \ldots \leq gf$ ebenfalls eine punktweise konvergente monotone Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit Grenzfunktion gf. Dann impliziert der Satz über monotone Konvergenz in Verbindung mit dem schon bewiesenen Resultat für Treppenfunktionen,

$$\int_A g\, d\mu_f = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\mu_f = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n f\, d\mu = \int_A gf\, d\mu.$$

Sei jetzt $g : X \to \mathbb{R}$ eine beliebige messbare reellwertige Funktion. Da f immer nicht negativ ist, gilt $|gf| = |g|f$, und das schon bewiesene Resultat im Fall $g \geq 0$ impliziert nun

$$\int_X |g|\, d\mu_f = \int_X |g| f\, d\mu = \int_X |gf|\, d\mu,$$

also g ist μ_f-integrierbar genau dann, wenn gf μ-integrierbar ist. Schreiben wir $g = g^+ - g^-$ und $|g| = g^+ + g^-$, wobei $g^+, g^- : X \to [0,\infty)$ die nichtnegativen messbaren Funktionen

$$g^+ := \max\{g, 0\}, \qquad g^- := \max\{-g, 0\}$$

sind. Da f nicht negativ ist, lässt $gf : X \to \mathbb{R}$ eine ähnliche Zerlegung $gf = (gf)^+ - (gf)^-$ zu, mit

$$(gf)^+ := g^+ f \quad \text{und} \quad (gf)^- := g^- f.$$

Im Fall $\int_X |g|\, d\mu_f = \int |gf|\, d\mu < \infty$ folgt, dass $\int_X g^+\, d\mu_f = \int_X (gf)^+\, d\mu$ und $\int_X g^-\, d\mu_f = \int_X (gf)^-\, d\mu$ beide endlich sind, und für eine beliebige messbare Teilmenge $A \subset X$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_A g\, d\mu_f &= \int_A g^+\, d\mu_f - \int_A g^-\, d\mu_f = \int_A g^+ f\, d\mu - \int_A g^- f\, d\mu \\ &= \int_A (gf)^+\, d\mu - \int_A (gf)^-\, d\mu = \int_A gf\, d\mu.\end{aligned}$$

b) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar, dann gilt für jede Folge von Teilmengen $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \in \mathcal{A}$ mit $E := \bigcap_{n=1}^\infty E_n$, $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$.
Hinweis: Im Spezialfall $E = \emptyset$ reicht es, $\int_{E_n} |f|\, d\mu \to 0$ zu beweisen. (Warum?) Im allgemeinen Fall können Sie dann die Mengen $A_n := E_n \setminus E$ betrachten.

Lösung:
Wir betrachten zuerst den Spezialfall $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \in \mathcal{A}$ mit $E := \bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$. Da $|f| : X \to [0, \infty)$ eine nichtnegative messbare Funktion ist, definiert sie ein Maß $\mu_{|f|} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch $\mu_{|f|}(A) := \int_A |f|\, d\mu$. Per Annahme gilt $\mu_{|f|}(X) = \int_X |f|\, d\mu < \infty$, weil f μ-integrierbar ist, also ist $\mu_{|f|}(E_n)$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ auch endlich. Laut einem in der Vorlesung bewiesenen Resultat über Maße gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}(E_n) = \mu_{|f|}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \Big) = \mu_{|f|}(\emptyset) = 0.$$

Angesichts der Ungleichung $\left| \int_{E_n} f\, d\mu \right| \le \int_{E_n} |f|\, d\mu$ impliziert das $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = 0$. Ohne die Annahme $E = \emptyset$ können wir dieses Resultat trotzdem noch für die Mengen $A_n := E_n \setminus E$ anwenden, denn sie erfüllen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = E \setminus E = \emptyset$. Es folgt also $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = 0$, und weil $E_n = A_n \cup E$ und $A_n \cap E = \emptyset$ gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{A_n} f\, d\mu + \int_E f\, d\mu \right) = \int_E f\, d\mu.$$

c) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ auch für jede Folge von Teilmengen $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \in \mathcal{A}$ mit $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.
Hinweis: Das Komplement einer Vereinigung ist eine Schnittmenge.

Lösung:
Wir bezeichnen das Komplement einer Teilmenge $E \subset X$ mit $E^c := X \setminus E$; aus den gegebenen Annahmen folgt also

$$E_1^c \supset E_2^c \supset E_3^c \supset \ldots \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n^c = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Big)^c = E^c.$$

Das Resultat von Teilaufgabe (b) impliziert dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n^c} f\, d\mu = \int_{E^c} f\, d\mu,$$

und da f auf ganz X μ-integrierbar ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f\, d\mu - \int_{E_n^c} f\, d\mu \right) = \int_X f\, d\mu - \int_{E^c} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

Schriftliche Zusatzaufgabe 7.Z (4 Punkte)
Beweisen Sie: ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar auf $(X, \mathcal{A})$, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \epsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt.
Hinweis: für Inspiration, siehe den Beweis von Lemma 5.21 im Buch von Salamon.

Lösung:
Der Beweis ist indirekt. Wenn die Aussage nicht gilt, dann existiert ein $\epsilon > 0$ und messbare Teilmengen $A \subset X$ mit beliebig kleinem Maß, die trotzdem $\left|\int_A f\, d\mu\right| \geq \epsilon$ erfüllen. Dann gibt es insbesondere eine Folge $A_n \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \qquad \text{und} \qquad \int_{A_n} |f|\, d\mu \geq \left| \int_{A_n} f\, d\mu \right| \geq \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren damit weitere messbare Mengen $B_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

also gilt $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$, und die Schnittmenge bezeichnen wir mit

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Wegen Aufgabe 6.B gilt

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

also folgt von einem in der Vorlesung bewiesenen Resultat,

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Betrachten wir nun das Maß $\mu_{|f|} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definiert durch $\mu_{|f|}(A) := \int_A |f|\, d\mu$. Da $B_n \supset A_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu_{|f|}(B_n) \geq \mu_{|f|}(A_n) = \int_{A_n} |f|\, d\mu \geq \epsilon,$$

also folgt vom schon erwähnten Resultat aus der Vorlesung,

$$\mu_{|f|}(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}(B_n) \geq \epsilon.$$

Aber gleichzeitig gilt $\mu_{|f|}(B) = \int_B |f|\, d\mu = 0$, da $\mu(B) = 0$, also haben wir einen Widerspruch.