Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 8

Schriftliche Abgabe: Dienstag 10. Dezember 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Anmerkung:
Bei diesen Aufgaben dürfen Sie die Existenz des Lebesgue-Maßes $m : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ auf $\mathbb{R}^n$ und seine grundlegende Eigenschaften als gegeben betrachten. Als Konsequenz von Aufgaben 7.2(c) und 7.3(c) können Lebesgue-Integrale für m-integrierbare stetige Funktionen auf Intervallen in $\mathbb{R}$ genau wie (ggf. uneigentliche) Riemann-Integrale durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung berechnet werden. Für Lebesgue-Integrale wird die Notation $\int_a^b (\dots)\,dt$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ analog zum Riemann-Integral definiert:

$$\int_a^b f(t)\,dt := \begin{cases} \int_{[a,b]} f\,dm & \text{falls } a \le b, \\ -\int_{[b,a]} f\,dm & \text{falls } b < a. \end{cases}$$

Aufgabe 8.1 (3 Punkte)
Geben Sie ein explizites Beispiel einer punktweise konvergenten Folge Lebesgue-messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,\infty]$, für die die Ungleichung im Lemma von Fatou streng ist:

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(t)\,dt < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Aufgabe 8.2 (3 + 3 Punkte)
Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen genau dann zutreffen, wenn $(X,\mathcal{A},\mu)$ vollständig ist:

a) Für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, jede Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, die fast überall $f = g$ erfüllt, ist auch messbar.

b) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $N \subset X$ eine Nullmenge, so dass $f|_{X\setminus N} : X\setminus N \to \mathbb{R}$ messbar ist,[1] dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ auch messbar.

Aufgabe 8.3 (5 Punkte)
Beweisen Sie: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von I Lebesgue-integrierbar ist,[2] dann ist die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch das Lebesgue-Integral $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ stetig.
Hinweis: Es gibt verschiedene Lösungsvarianten, die z.B. den Satz über monotone Konvergenz, den Lebesgueschen Konvergenzsatz oder das Resultat von Aufgabe 7.Z anwenden. Sie dürfen Aufgabe 7.Z nur dann anwenden, wenn Sie sie letzte Woche bearbeitet haben.

Aufgabe 8.4 (5 + 4 + 3 + 2 Punkte)

a) Beweisen Sie: die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := (\ln t)^n t^{\alpha-1} e^{-t}$ ist für jede Konstante $\alpha > 0$ und jede ganze Zahl $n \ge 0$ Lebesgue-integrierbar.
Hinweis: Betrachten Sie die Teilintervalle $(0,1]$ und $[1,\infty)$ separat und versuchen Sie, auf beiden Intervallen $|f(t)|$ durch einfachere Funktionen abzuschätzen.

[1] Eine Teilmenge $A \subset X\setminus N$ gilt als messbar in $X\setminus N$ genau dann, wenn A auch eine messbare Teilmenge von X ist.
[2] Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt **lokal integrierbar**.

b) Das Resultat von Teilaufgabe (a) ermöglicht die Definition einer Funktion $\Gamma_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ für jedes $n \geq 0$ durch
$$\Gamma_n(x) := \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$
Beweisen Sie, dass Γ_n stetig differenzierbar ist und $\Gamma_n'(x) = \Gamma_{n+1}(x)$ erfüllt. Es folgt insb., dass die sogenannte **Gamma-Funktion** $\Gamma := \Gamma_0 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt ist.

c) Beweisen Sie die Relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.
Hinweis: Da der Integrand in der Definition von $\Gamma(x)$ stetig ist, können Sie mit diesem Integral genau so wie mit einem Riemann-Integral umgehen und z.B. partielle Integration anwenden.

d) Beweisen Sie: $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Insgesamt: **28 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 8.A
Sei $\delta : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ das Dirac-Maß im Punkt $0 \in \mathbb{R}$ (s. Aufgabe 6.3(b)). Finden Sie einen expliziten Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $L^1(\delta)$ und $\mathbb{R}$. Was bedeutet es genau, wenn eine Funktionenfolge $f_n \in \mathscr{L}^1(\delta)$ gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1(\delta)$ bzgl. der L^1-Norm konvergiert?

Aufgabe 8.B
Wir betrachten Funktionen $f : X \to E$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum E. Der Begriff μ-Integrierbarkeit und das Integral $\int_A f\, d\mu \in E$ für solche Funktionen wurden in Aufgabe 7.A definiert. Zeigen Sie:

a) Eine Treppenfunktion $f : X \to E$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn für alle $v \in E \setminus \{0\}$, die Menge $f^{-1}(v) \subset X$ messbar ist und $\mu(f^{-1}(v)) < \infty$ erfüllt. Des Weiteren gilt für alle $A \in \mathcal{A}$ in diesem Fall
$$\int_A f\, d\mu = \sum_{v \in f(X) \setminus \{0\}} \mu\big(f^{-1}(v) \cap A\big) v \in E.$$

b) Eine beliebige Funktion $f : X \to E$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn es eine Folge μ-integrierbarer Treppenfunktionen $f_n : X \to E$ gibt, die punktweise fast überall gegen f konvergiert und bzgl. der L^1-Norm eine Cauchyfolge ist.

c) Für jede Folge f_n wie in Teilaufgabe (b) gilt $\displaystyle\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Bemerkung: Diese Aufgabe liefert eine alternative Definition des Lebesgue-Integrals einer Funktion $f : X \to E$, nämlich als Limes einer Folge von Integralen von Treppenfunktionen. In diesem Kontext darf E sogar ein unendlich-dimensionaler Banachraum sein.

Aufgabe 8.C
Wir betrachten die glatte Funktion $f : [1,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Formel $f(t,x) = (3x^2 - 2x^4 t)e^{-tx^2}$. Zeigen Sie: $f(\cdot, x) : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist für jedes $x \in [0,1]$ Lebesgue-integrierbar, aber es gibt keine Umgebung $\mathcal{U} \subset [0,1]$ von 0 und Lebesgue-integrierbare Funktion $g : [1,\infty) \to [0,\infty]$, die $|f(\cdot,x)| \leq g$ für alle $x \in \mathcal{U}$ erfüllt.
Hinweis: Diese Funktion kam letztes Semester in Aufgabe 11.6 vor.