Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 8: Musterlösung zu den Aufgaben 8.3 und 8.4

Aufgabe 8.3 (5 Punkte)
Beweisen Sie: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von I Lebesgue-integrierbar ist,[1] dann ist die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch das Lebesgue-Integral $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ stetig.
Hinweis: Es gibt verschiedene Lösungsvarianten, die z.B. den Satz über monotone Konvergenz, den Lebesgueschen Konvergenzsatz oder das Resultat von Aufgabe 7.Z anwenden. Sie dürfen Aufgabe 7.Z nur dann anwenden, wenn Sie sie letzte Woche bearbeitet haben.

Lösung:
Als Vorbemerkung weisen wir auf die Formel

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt \tag{1}$$

hin, die immer gilt, wenn f auf den relevanten Intervallen Lebesgue-integrierbar ist. Dies folgt von der allgemeinen Eigenschaft des Lebesgue-Integrals auf einer Vereinigung $A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$, nämlich

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu. \tag{2}$$

Im Fall $a \le b \le c$ folgt (1), in dem man $A := [a, b]$ und $(b, c]$ einsetzt. (Es gibt keinen Unterschied zwischen Integralen über $(b, c]$ und $[b, c]$, da $\{b\} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist.) Falls $c \ge b \ge a$ betrachtet man stattdessen $A := [b, a]$ und $B := [c, b)$, und dann unterscheidet sich (1) von (2) nur durch ein Vorzeichen auf beiden Seiten. Im Fall $b \le a \le c$ folgt aus (2)

$$\int_b^c f(t)\,dt = \int_{[b,c]} f\,dm = \int_{[b,a]} f\,dm + \int_{(a,c]} f\,dm = -\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt,$$

was äquivalent zu (1) ist. Für den Fällen $c \le a \le b$, $a \le c \le b$ und $b \le c \le a$ kann man analog argumentieren.
Zu zeigen ist nun, dass für jedes $x \in I$ und jede gegen x konvergierende Folge $x_n \in I$, $\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$. Da (1) impliziert

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt + \int_{x_n}^x f(t)\,dt,$$

wäre dies äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_n} f\,dm = 0, \tag{3}$$

wobei $I_n \subset I$ das abgeschlossene Interval zwischen x und x_n bezeichnet. Wir erklären drei mögliche Methoden, um dies zu beweisen.
Methode 1:
Sei $\mathcal{U} \subset I$ eine Umgebung von x mit kompaktem Abschluss $\overline{\mathcal{U}} \subset I$. Dann ist f auf $\overline{\mathcal{U}}$

[1] Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt **lokal integrierbar**.

Lebesgue-integrierbar, und wegen der Konvergenz $x_n \to x$ gilt $I_n \subset \mathcal{U}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Das Integral in (3) kann als

$$\int_{I_n} f\, dm = \int_{\overline{\mathcal{U}}} \chi_{I_n} f\, dm$$

geschrieben werden, wobei $\chi_{I_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $I_n \subset \mathbb{R}$ bezeichnet, und $\chi_{I_n} f \to 0$ punktweise fast überall auf $\overline{\mathcal{U}}$, weil die Intervalle I_n bei $n \to \infty$ beliebig klein werden; tatsächlich, $\lim_{n\to\infty} \chi_{I_n}(x') = 0$ für alle $x' \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Außerdem gilt $|\chi_{I_n} f| \le |f|$ und $\int_{\overline{\mathcal{U}}} |f|\, dm < \infty$, also folgt vom Lebesgueschen Konvergenzsatz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{\mathcal{U}}} \chi_{I_n} f\, dm = \int_{\overline{\mathcal{U}}} 0\, dm = 0.$$

Methode 2:
So wie in Methode 1 wählen wir eine Umbegung $\mathcal{U} \subset I$ mit kompakten Abschluss $\overline{\mathcal{U}} \subset I$, so dass f auf $\overline{\mathcal{U}}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann definiert die Funktion $|f| : \overline{\mathcal{U}} \to [0,\infty)$ ein Maß auf den Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\overline{\mathcal{U}}$ durch

$$\mu_{|f|}(E) := \int_E |f|\, dm \qquad \text{für} \qquad E \subset \overline{\mathcal{U}},$$

wobei die Integrierbarkeit impliziert, dass $\mu_{|f|}(E)$ immer endlich ist. Sei $J_n := \bigcup_{k=n}^\infty I_n \subset I$ für $n \in \mathbb{N}$, also gilt

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \supset J := \bigcap_{n=1}^\infty J_n = \{x\},$$

und für alle n hinreichend groß gilt auch $J_n \subset \overline{\mathcal{U}}$. Dann folgt aus einer in der Vorlesung bewiesenen Lemma,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}(J_n) = \mu_{|f|}(J) = 0,$$

da $\{x\} \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Weil $I_n \subset J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert das

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{I_n} f\, dm \right| \le \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} |f|\, dm = \lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}(I_n) \le \lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}(J_n) = 0.$$

Bemerkung: dieses Argument ist implizit vom Satz über monotonen Konvergenz abhängig, denn in der Vorlesung wurde der Letztere verwendet, um zu beweisen, dass $\mu_{|f|}$ ein Maß ist (siehe auch Theorem 1.40 im Buch von Salamon).
Methode 3:
Das Lebesgue-Maß des Intervalls I_n ist $|x_n - x|$, wird also beliebig klein bei $n \to \infty$. Laut Aufgabe 7.Z existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\left|\int_{I_n} f\, dm\right| < \epsilon$ für alle n mit $m(I_n) < \delta$ gilt. Das beweist die Konvergenz in (3).

Aufgabe 8.4 (5 + 4 + 3 + 2 Punkte)

a) Beweisen Sie: die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := (\ln t)^n t^{\alpha-1} e^{-t}$ ist für jede Konstante $\alpha > 0$ und jede ganze Zahl $n \ge 0$ Lebesgue-integrierbar.
Hinweis: Betrachten Sie die Teilintervalle $(0, 1]$ *und* $[1,\infty)$ *separat und versuchen Sie, auf beiden Intervallen* $|f(t)|$ *durch einfachere Funktionen abzuschätzen.*

Lösung:
Zuerst sei bemerkt, dass f auf $(0,\infty)$ stetig ist und daher Borel- (und deswegen auch Lebesgue-) messbar. Für die Intergrierbarkeit muss dazu $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$ bewiesen werden.
Auf $(0,1]$ ist e^{-t} beschränkt, aber $t^{\alpha-1}$ könnte (im Fall $\alpha < 1$) bei $t \to 0$ unbeschränkt sein, und $(\ln t)^n$ ist (im Fall $n > 0$) auch bei $t \to 0$ unbeschränkt. Wir wissen aber als Anwendung der Regel von L'Hospital, dass $|\ln t|$ bei $t \to 0$ langsamer als $1/t^\beta$ für jedes $\beta > 0$ wächst, d.h.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t^\beta} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-\beta/t^{\beta+1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^\beta}{\beta} = 0.$$

Folglich gilt die Abschätzung $|\ln t| \le C_\beta/t^\beta$ für alle $t \in (0,1]$, mit einer Konstante $C_\beta > 0$, die von $\beta > 0$ abhängt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt auch $e^{-t} \le C_\beta$ auf diesem Intervall, also

$$|f(t)| \le \frac{C_\beta^{n+1}}{t^{n\beta}} t^{\alpha-1} = C_\beta^{n+1} t^{\alpha-n\beta-1} \qquad \text{für} \qquad t \in (0,1].$$

Wählen wir β im Intervall $(0,\alpha/n)$, so gilt $\alpha - n\beta - 1 > -1$, also

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \le \int_0^1 C_\beta^{n+1} t^{\alpha-n\beta-1}\,dt = \frac{C_\beta^{n+1}}{\alpha-n\beta} t^{\alpha-n\beta}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{C_\beta^{n+1}}{\alpha-n\beta} < \infty. \tag{4}$$

Auf $[1,\infty)$ ist $(\ln t)^n$ im Fall $n > 0$ auch unbeschränkt und ebenfalls $t^{\alpha-1}$ im Fall $\alpha > 1$, aber e^{-t} ist monoton fallend, weil $\lim_{t\to\infty} e^t = \infty$, und diese Konvergenz ist (wegen der Regel von L'Hospital) schneller als bei jedem Polynom, d.h. für jedes Polynon $P(t)$ und jede Konstante $c > 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(t)}{e^{ct}} = 0. \tag{5}$$

Außerdem gilt $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, also gibt es eine Abschätzung

$$\ln t \le Ct \qquad \text{für alle } t \ge 1$$

für eine Konstante $C > 0$. Der Limes (5) impliziert dann

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^n t^{\alpha-1} e^{-t}}{e^{-t/2}} \le \lim_{t\to\infty} \frac{C^n t^{n+\alpha-1}}{e^{t/2}} = 0,$$

also existiert eine von n und α abhängige Konstante $C_{n,\alpha} > 0$, so dass die Abschätzung

$$(\ln t)^n t^{\alpha-1} e^{-t} \le C_{n,\alpha} e^{-t/2} \qquad \text{für alle } t \ge 1$$

gilt. Es folgt,

$$\int_1^\infty |f(t)|\,dt \le \int_1^\infty C_{n,\alpha} e^{-t/2}\,dt = -2C_{n,\alpha} e^{-t/2}\Big|_{t=1}^{t=\infty} = \frac{2C_{n,\alpha}}{\sqrt{e}} < \infty. \tag{6}$$

Zusammen implizieren (4) und (6), dass f auf $(0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar ist.

b) Das Resultat von Teilaufgabe (a) ermöglicht die Definition einer Funktion $\Gamma_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ für jedes $n \ge 0$ durch

$$\Gamma_n(x) := \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

Beweisen Sie, dass Γ_n stetig differenzierbar ist und $\Gamma_n'(x) = \Gamma_{n+1}(x)$ erfüllt. Es folgt insb., dass die sogenannte **Gamma-Funktion** $\Gamma := \Gamma_0 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt ist.

Lösung:
Wir definieren $f_n : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(t,x) := (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t},$$

also gilt $\Gamma_n(x) = \int_0^\infty f_n(t,x)\,dt = \int_{[0,\infty]} f_n(\cdot,x)\,dm$. Die Funktionen f_n sind glatt, und es gilt

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(t,x) = (\ln t)^n e^{-t} \frac{\partial}{\partial x} e^{\ln t\cdot(x-1)} = (\ln t)^{n+1} e^{-t} e^{\ln t\cdot(x-1)} = (\ln t)^{n+1} t^{x-1} e^{-t} = f_{n+1}(t,x).$$

Die gewünschte Aussage wird also von Satz 1 im Skript über parameterabhängige Lebesgue-Integrale[2] folgen, wenn wir die folgende Behauptung beweisen können:
Behauptung: Für jede ganze Zahl $n \ge 0$ und jedes $x > 0$ existiert eine Umgebung $\mathcal{U}_x \subset (0,\infty)$ von x und eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : (0,\infty) \to [0,\infty)$, so dass

$$|f_n(t,y)| \le g(t) \qquad \text{für alle} \qquad t \in (0,\infty) \text{ und } y \in \mathcal{U}_x.$$

Für den Beweis wählen wir ein Intervall $\mathcal{U}_x := (\alpha,\beta)$ mit $0 < \alpha < x < \beta$ und definieren $g(t)$ durch zwei verschiedene Formel für $t \in (0,1]$ und $t > 1$. Für $t \in (0,1]$ ist die Funktion $x \mapsto t^{x-1}$ monoton fallend, also gilt $t^{y-1} \le t^{\alpha-1}$ für $y \in \mathcal{U}_x$, und wir definieren

$$g(t) := |\ln t|^n t^{\alpha-1} e^{-t} \qquad \text{für } t \in (0,1].$$

Für $t > 1$ ist $x \mapsto t^{x-1}$ eine monoton wachsende Funktion, also gilt $t^{y-1} \le t^{\beta-1}$ für $y \in \mathcal{U}_x$, und wir definieren

$$g(t) := (\ln t)^n t^{\beta-1} e^{-t} \qquad \text{für } t \in (1,\infty).$$

Die dadurch definierte Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und daher Borel-messbar. Per Konstruktion gilt nun $|f_n(\cdot,y)| \le g$ für alle $y \in \mathcal{U}_x$, und die Abschätzungen (4) und (6) implizieren, dass $\int_0^1 g(t)\,dt$ und $\int_1^\infty g(t)\,dt$ beide endlich sind, also ist $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.

c) Beweisen Sie die Relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.
Hinweis: Da der Integrand in der Definition von $\Gamma(x)$ stetig ist, können Sie mit diesem Integral genau so wie mit einem Riemann-Integral umgehen und z.B. partielle Integration anwenden.

Lösung:
Durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -\int_0^\infty t^x \left(\frac{d}{dt} e^{-t}\right) dt = -\, t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} t^x\right) e^{-t}\,dt \\ &= \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

d) Beweisen Sie: $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:
Für $x = 1$ lässt sich das Integral in der Definition von $\Gamma(x)$ leicht berechnen:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Wegen Teilaufgabe (c) gilt $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also folgt

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!.\end{aligned}$$

[2] `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_parameter.pdf`