Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 9

Schriftliche Abgabe: Dienstag 17. Dezember 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Anmerkung:
Bei diesen Aufgaben dürfen Sie die folgende Version des Satzes von Fubini als gegeben betrachten: für Lebesgue-messbare nichtnegative bzw. Lebesgue-integrierbare reellwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n = k + \ell$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^\ell} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})\, d^k y \right) d^\ell z = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})\, d^\ell z \right) d^k y,$$

wobei wir Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_\ell) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ und das Integral von f bzgl. des Lebesgue-Maßes m auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, d^n x := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n := \int_{\mathbb{R}^n} f\, dm$$

bezeichnen.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)
Sei $\nu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß mit der Eigenschaft, dass für jeden nichtleeren offenen Quader $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ die Formel $\nu(Q) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ gilt. Beweisen Sie: für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt $\nu(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{v}\}) = 0$.
Bemerkung: Das gilt insb. für das äußere Maß von Lebesgue, also folgt, dass k-dimensionale Ebenen in $\mathbb{R}^n$ für $k < n$ Lebesgue-Nullmengen sind.

Aufgabe 9.2 (2 + 3 Punkte)

a) Beweisen Sie: sind $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen, dann ist die Funktion $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$ auch Lebesgue-integrierbar.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intergrierbar, $A \subset \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge, und bezeichne mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ die Koordinaten auf $\mathbb{R}^n \times A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Unter welchen Voraussetzungen für f und A ist das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n \times A} f(\mathbf{x})\, d^n x\, d^m y$ wohl definiert, und welchen Wert hat es?

Aufgabe 9.3 (5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Intervall $I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ und die Funktion $f_n := \frac{1}{n(n+1)} \chi_n$, wobei $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von I_n bezeichnet. Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\, f_n(y)$$

ist dann wohl definiert, weil für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktionen in der Summation für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ verschwinden. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto F(x,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind, ebenfalls die Funktionen $y \mapsto F(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und dass die resultierenden Funktionen $\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dy$ und $\psi(y) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx$ auf $\mathbb{R}$ auch Lebesgue-integrierbar sind. Berechnen Sie diese Integrale explizit, und zeigen Sie,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dy \right) dx.$$

Beweisen Sie, dass F Lebesgue-messbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)
Sei $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Aufgabe 9.5 (3 Punkte)
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq xy \leq 2 \text{ und } 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \right\}$.

Aufgabe 9.6 (3 Punkte)
Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2)\,dx \right) dy$.

Aufgabe 9.7 (3 Punkte)
Berechnen Sie für die Menge $A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y,z \geq 0 \text{ und } x+y+z \leq 1 \right\}$ das Integral $\displaystyle\int_A x\,dx\,dy\,dz$.

Insgesamt: **27 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 9.Z (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Legesgue-integrierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Identität für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^x \left(\int_0^{x_n} \left(\dots \int_0^{x_4} \left(\int_0^{x_3} \left(\int_0^{x_2} f(x_1)\,dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \dots \right) dx_{n-1} \right) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 9.A
Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_B (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$ für die Menge

$$B := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y,z \geq 0,\ x+y \leq a \text{ und } z \leq b \right\},$$

wobei a und b fixierte positive Konstanten sind.

Aufgabe 9.B
Berechnen Sie das Volumen des Teils der Kugel $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$, der durch eine Zylinderfläche $\{(x-a)^2 + y^2 = b^2\}$ mit $b^2 < a^2$ herausgeschnitten wird.