Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 9: Musterlösung zur Aufgabe 9.3

Vorbemerkung: In der Fragestellung bei Aufgabe 9.3 gab es einen erst nach Abgabe entdeckten gravierenden Tippfehler. Für die Definition der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ war nicht $\frac{1}{n(n+1)}\chi_n$ sondern eigentlich

$$f_n := n(n+1)\chi_n$$

gemeint, und in der ursprünglichen Form war das zu beweisende Resultat falsch; dies kann man leicht sehen, wenn man bemerkt, dass $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach den geschriebenen Definition beschränkt wäre, und weil es außerhalb von $[0,1]^2$ verschwindet, wäre F damit Lebesgue-integrierbar. Im Folgenden handelt es sich um eine Musterlösung für die ursprünglich beabsichtigte Aufgabe. (Für die Gesamtrechnung von Übungspunkten wird diese Aufgabe jetzt als Zusatzaufgabe betrachtet.)

Aufgabe 9.3 (5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Intervall $I_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ und die Funktion $f_n := n(n+1)\chi_n$, wobei $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von I_n bezeichnet. Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\, f_n(y)$$

ist dann wohl definiert, weil für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktionen in der Summation für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ verschwinden. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto F(x,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind, ebenfalls die Funktionen $y \mapsto F(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und dass die resultierenden Funktionen $\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy$ und $\psi(y) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx$ auf $\mathbb{R}$ auch Lebesgue-integrierbar sind. Berechnen Sie diese Integrale explizit, und zeigen Sie,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy \right) dx.$$

Beweisen Sie, dass F Lebesgue-messbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Lösung:
Aus der Definition von f_n folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = n(n+1) \cdot m(I_n) = n(n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \tag{1}$$

Für einen gegebenen Punkt $y \in \mathbb{R}$ existiert höchstens ein $n \in \mathbb{N}$, so dass y im Intervall I_n liegt. Wenn kein solches Intervall existiert (z.B. falls $y \leq 0$), dann gilt $F(x,y) = 0$, also ist $x \mapsto F(x,y) = 0$ dann eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Betrachten wir nun den Fall $y \in I_n$ für $n \in \mathbb{N}$: dann gilt $f_k(y) = 0$ für alle $k \neq n$, also $F(x,y) = [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\, f_n(y)$. Diese ist eine lineare Kombination von zwei Lebesgue-integrierbaren Funktionen von x, und ist daher Lebesgue-integrierbar; wegen (1) ist das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx = f_n(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(x) \right) = f_n(y)(1-1) = 0.$$

Das beweist, dass die Funktion $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx$ einfach verschwindet, also gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\,dy = 0.$$

Um das Integral in der anderen Reihenfolge zu verstehen, ist es nützlich, die Definition von F wie folgt umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= [f_1(x) - f_2(x)]\, f_1(y) + [f_2(x) - f_3(x)]\, f_2(y) + [f_3(x) - f_4(x)]\, f_3(y) + \dots \\
&= f_1(x)f_1(y) - f_2(x)f_1(y) + f_2(x)f_2(y) - f_3(x)f_2(y) + f_3(x)f_3(y) - f_4(x)f_3(y) + \dots \\
&= f_1(x)f_1(y) + f_2(x)\,[f_2(y) - f_1(y)] + f_3(x)\,[f_3(y) - f_2(y)] + \dots \\
&= f_1(x)f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)\,[f_n(y) - f_{n-1}(y)]\,,
\end{aligned}$$

wobei für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, jede Zeile höchstens endlich viele nichttriviale Glieder hat, also gibt es keine Fragen von Konvergenz. Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ sehen wir jetzt, dass $F(x,y)$ nur nicht trivial sein kann, wenn $x \in I_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und dann gibt es höchstens einen nichttrivialen Beitrag aus der letzten Summation. Für $x \in I_1$ gilt also $F(x,y) = f_1(x)f_1(y)$; so ist $F(x,\cdot)$ ein Vielfaches von f_1 und daher eine Lebesgue-integrierbare Funktion, mit

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dy = f_1(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(y)\,dy = f_1(x).$$

Wenn $x \in I_n$ für $n \geq 2$, gilt $F(x,y) = f_n(x)\,[f_n(y) - f_{n-1}(y)]$, also ist $F(x,\cdot)$ wieder eine lineare Kombination von zwei Lebesgue-integrierbaren Funktionen, und daher integrierbar, mit

$$\varphi(x) = f_n(x) \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\,dy - f_n(x) \int_{\mathbb{R}} f_{n-1}(y)\,dy = 0$$

wegen (1). Damit ist die Identität $\varphi = f_1$ bewiesen, also ist auch φ Lebesgue-messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,dm = \int_{\mathbb{R}} f_1\,dm = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx \right) dy.$$

Die Lebesgue-Integrierbarkeit von F kann jetzt ausgeschlossen werden, denn wäre F auf $\mathbb{R}^2$ Lebesgue-integrierbar, dann würde aus dem Satz von Fubini folgen, dass diese zwei doppelten Integrale gleich sind.
Die Nichtintegrierbarkeit von F kann auch direkter bewiesen werden, denn aus der Definition von F lesen wir heraus, dass $F(x,y)$ nur dann nicht trivial ist, wenn (x,y) entweder in $I_n \times I_n$ oder $I_{n+1} \times I_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt, und ein gegebener Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kann in höchstens einer Menge dieser Art liegen. Es gilt also,

$$|F(x,y)| = \begin{cases} f_n(x)f_n(y) & \text{falls } (x,y) \in I_n \times I_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ f_{n+1}(x)f_n(y) & \text{falls } (x,y) \in I_{n+1} \times I_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Funktion auf jeder der Mengen $I_n \times I_n$ und $I_{n+1} \times I_n$ kann sehr leicht durch den Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen berechnet werden: wegen

(1) gilt

$$\begin{aligned}\int_{I_n\times I_n}|F(x,y)|\,dx\,dy &= \int_{I_n\times I_n} f_n(x)f_n(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_n(x)f_n(y)\,dx\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)f_n(y)\,dx\right)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\right)\,dy\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\right) = 1\cdot 1 = 1,\end{aligned}$$

und analog,

$$\int_{I_{n+1}\times I_n}|F(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_{n+1}(x)f_n(y)\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\right) = 1.$$

Weil F außerhalb der Vereinigung

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left((I_n\times I_n)\cup(I_{n+1}\times I_n)\right)$$

verschwindet und die verschiedenen Produktmengen in dieser Vereinigung alle disjunkt sind, gilt nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|F(x,y)|\,dx\,dy &= \int_E |F(x,y)|\,dx\,dy\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{I_n\times I_n}|F(x,y)|\,dx\,dy + \int_{I_{n+1}\times I_n}|F(x,y)|\,dx\,dy\right) =\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty.\end{aligned}$$