HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis III
WiSe 2019–20

Die Faltung und approximative Einheiten

Dieses Skript betrifft Inhalte der Vorlesung am 14.01.2020.

1 Das Hauptresultat

Für $p \in [1, \infty)$ betrachten wir den Banachraum $L^p(\mathbb{R}^n)$, der aus Äquivalenzklassen (bis auf Gleichheit fast überfall) von Lebesgue-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besteht, die

$$\|f\|_{L^p} := \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, d^n x := \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dm < \infty$$

erfüllen. Solche Funktionen sind im Allgemeinen weder differenzierbar noch stetig, aber wir möchten in diesem Kapitel zeigen, dass jede Funktion in $L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig nahe an einer glatten Funktion ist. Wir bezeichnen mit

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

den linearen Unterraum aller Äquivalenzklassen von Funktionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$, die durch glatte Funktionen darstellbar sind, und mit

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

den Unterraum aller Äquivalenzklassen, die durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger darstellbar sind.

Satz 1.1. *Für jedes $p \in [1, \infty)$ liegt $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Bemerkung 1.2. Zwei wichtige Verallgemeinerungen von Satz 1.1 folgen fast sofort. Erstens: man kann $\mathbb{R}^n$ mit einer beliegiben offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ersetzen, und beweisen, dass $C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt, wobei $L^p(\Omega)$ durch Integration über Ω bzgl. des Lebesgue-Maßes definiert wird. Für den Beweis definiert man aus einer beliebigen Funktion $f \in L^p(\Omega)$ die Funktion $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{auf } \Omega, \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

und approximiert f durch $f_\epsilon|_\Omega$ für glatte Funktionen $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, die $\widetilde{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ approximieren. Weiter: $C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ in dieser Aussage kann auch mit $C_0^\infty(\Omega)$, dem Vektorraum aller glatten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, ersetzt werden, d.h. jede Funktion $f \in L^p(\Omega)$ kann bzgl. der L^p-Norm beliebig gut durch eine glatte Funktion mit kompaktem Träger in Ω approximiert werden. Um das zu sehen, wählt man zuerst für ein gegebenes $\epsilon > 0$ eine Approximation $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ mit

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{2},$$

und dann ersetzt man f_ϵ mit βf_ϵ für eine glatte Funktion $\beta : \Omega \to [0,1]$, die $\beta|_{\mathcal{U}} \equiv 1$ für eine bestimmte Teilmenge $\mathcal{U} \subset \Omega$ erfüllt aber auch kompakten Träger in Ω hat. Wenn die Menge $\Omega \setminus \mathcal{U}$ "klein genug" ist, kann diese Konstruktion so realisiert werden, dass

$$\|f_\epsilon - \beta f_\epsilon\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und daher} \quad \|f - \beta f_\epsilon\|_{L^p} < \epsilon.$$

Für die Details dieser Verallgemeinerung, siehe z.B. [LL01, §2.19]; hier fassen wir das Resultat nur zusammen:

Korollar 1.3. *Für jedes $p \in [1,\infty)$ und jede offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.* □

Bemerkung 1.4. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *nicht* dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Insbesondere können unstetige aber stückweise stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ meistens nicht beliebig gut bzgl. der L^∞-Norm durch stetige Funktionen approximiert werden (s. Aufgabe 12.B auf Übungsblatt 12).

Im Rest dieses Skripts beschreiben wir eine elegante und ziemlich explizite Konstruktion, die für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Folge glatter Funktionen $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \xrightarrow{L^p} f$ liefert.

2 Die Faltung und Regularität

Die **Faltung** (im Englischen "convolution"[1]) von zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f * g$ definiert durch

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d^n y, \tag{1}$$

wobei auf der rechten Seite, das Symbol "$d^n y$" die Integration einer Funktion der Variablen $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ bzgl. des Lebesgue-Maßes bezeichnet, mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet als Parameter. Der Definitionsbereich der Funktion $f * g$ ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass die Funktion von $\mathbf{y}$ im Integral auf der rechten Seite von (1) Lebesgue-integrierbar ist. Es kann sein, dass $(f * g)(\mathbf{x})$ für einige aber nicht alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert ist. In der Praxis werden wir immer nur Fälle betrachten, wo $(f*g)(\mathbf{x})$ für *fast alle* (bzgl. des Lebesgue-Maßes) $\mathbf{x}$ definiert ist; die Funktion $f * g$ ist dann fast überall auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Weil $f * g$ durch ein Integral definiert ist, ändert sich $f * g$ nicht, wenn f bzw. g durch eine andere Funktion ersetzt wird, die fast überall mit f bzw. g übereinstimmt; es kann also sinnvoll sein, über die Faltung $f * g$ von zwei Äquivalenzklassen $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ zu sprechen, und in solchen Diskussionen werden wir meistens nicht zwischen Funktionen und Äquivalenzklassen von Funktionen unterscheiden.

Aufgabe 2.1. Beweisen Sie durch die Transformationsformel, dass die Funktionen $f * g$ und $g * f$ gleich sind.

Eine wichtige Eigenschaft der Faltung ist, dass $f * g$ im Allgemeinen genau so "schön" ist wie die schönste Funktion aus f und g.[2] Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

[1] Im Englischen gibt es auch ein Verb mit der Bedeutung, die Faltung zweier Funktionen zu berechnen: *to "convolve" two functions.* Das erwähne ich nur, weil ich das Wort schön finde.

[2] Der Fachbegriff für diese Art von "Schönheit" ist *regulär*, d.h. man beweist die *Regularität* einer Funktion, indem man beweist, dass sie differenzierbar bzw. glatt ist.

den Vektorraum aller Äquivalenzklassen (bis auf Gleichheit fast überall) von Lebesgue-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f|_K$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zu $L^p(K)$ gehört. Solche Funktionen heißen *lokal* von der Klasse L^p, und für $p = 1$ heißen sie **lokal integrierbar**. Ein **Multi-index** für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen, und man definiert damit den Differentialoperator

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}, \qquad \text{wobei} \qquad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ für } j = 1, \ldots, n,$$

der Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ hat. Für jedes $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und jeden Multi-index α gehört die Funktion $\partial^\alpha f$ auch zu $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2.2. *Angenommen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf ganz $\mathbb{R}^n$, und für jeden Multi-index α gilt*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Beweis. Per Annahme ist f glatt und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, was impliziert, dass f beschränkt ist. Für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kann der Integrand $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$ dann nur auf der kompakten Teilmenge $K_\mathbf{x} := \{\mathbf{x} - \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{k} \in K\}$ nichttrivial sein, und auf dieser Teilmenge ist g integrierbar, was impliziert, dass der ganze Integrand integrierbar ist und $(f * g)(\mathbf{x})$ also für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Die Funktion $\mathbf{x} \mapsto (f * g)(\mathbf{x})$ ist nun als parameterabhängiges Integral definiert, wobei im Integrand nur $f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ vom Parameter $\mathbf{x}$ abhängt. Das Resultat folgt also im Wesentlichen von [Wen19, Satz 1]. Hauptsache:

- Der Integrand ist für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion.
- Die Integrierbarkeit ist auch "lokal gleichmäßig", im Sinne, dass man für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x}_0$ und eine feste integrierbare Funktion finden kann, die größer ist als der Integrand für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.
- Die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$ ist für jedes feste $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ glatt und ihre partielle Ableitung in Richtung x_j ist $\mathbf{x} \mapsto \partial_j f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$, die wieder stetig von $\mathbf{x}$ abhängt.

Aus [Wen19, Satz 1] folgt dann $\partial_j(f * g) = (\partial_j f) * g$, und die Verallgemeinerung für beliebige Multi-indizies erfolgt per Induktion. □

3 Die Youngsche Ungleichung

Das folgende Resultat ist eine schöne Anwendung des Satzes von Fubini und der Hölderschen Ungleichung.[3]

Satz 3.1. *Für beliebige Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p \le \infty$ ist $f * g$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$ definiert, gehört auch zu $L^p(\mathbb{R}^n)$, und erfüllt*

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

[3] Für verschiedene allgemeinere Formen der Youngschen Ungleichung, siehe [Sal16, Theorem 7.33] oder [LL01, 4.2].

Beweis. Der Fall $p = \infty$ ist eine leichte Übungsaufgabe, also betrachten wir nur den Fall $1 \leq p < \infty$. Sei $q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})| = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1/p}|g(\mathbf{y})| \cdot |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1/q},$$

und die Hölder-Ungleichung impliziert für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})| \, d^n y \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p \, d^n y \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, d^n y \right)^{1/q} \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p \, d^n y \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Wir wenden jetzt den Satz von Fubini für die nichtnegative messbare Funktion

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty] : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p$$

an; es folgt, dass $|\varphi|^p$ eine messbare Funktion ist, und

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\mathbf{x})]^p \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1}^{p/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p \, d^n y \right) d^n x \\
&= \|f\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot |g(\mathbf{y})|^p \, d^n x \, d^n y \\
&= \|f\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, d^n x \right) d^n y = \|f\|_{L^1}^{p/q+1} \cdot \|g\|_{L^p}^p \\
&= \|f\|_{L^1}^p \cdot \|g\|_{L^p}^p < \infty.
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Funktion φ^p muss dann fast überall $\varphi^p < \infty$ erfüllen, also gilt auch $\varphi < \infty$ fast überall, was impliziert, dass die Faltung $f * g$ fast überall definiert ist.

Als weitere Anwendung des Satzes von Fubini kann man zeigen, dass $f * g$ auch eine messbare Funktion ist, und zwar ist die Faltung von zwei Lebesgue-messbaren Funktionen immer Borel-messbar. Den Beweis davon führen wir hier nicht aus, aber siehe [Sal16, Theorem 7.32(iii)]. Da $|f * g| \leq \varphi$, folgt jetzt von (2) die Abschätzung $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$. □

Aufgabe 3.2. Beweisen Sie als Korollar von Satz 3.1, dass die Faltung für jedes $p \in [1, \infty]$ eine stetige bilineare Abbildung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) : (f, g) \mapsto f * g.$$

definiert.

4 Approximative Einheiten

Wir können jetzt einen Beweis von Satz 1.1 skizzieren und dabei erklären, wie beliebige Funktionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch glatte Funktionen zu approximieren sind.

Wir bezeichnen mit

$$B_r^n \subset \mathbb{R}^n$$

die offene Kugel von Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$, und wählen eine glatte Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ mit kompaktem Träger in B_1^n, die auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dm = 1$$

erfüllt. Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir dann $\rho_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch

$$\rho_j(\mathbf{x}) := j^n \rho(j\mathbf{x}),$$

eine Funktion, die auch $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j \, dm = 1$ erfüllt aber kompakten Träger in $B_{1/j}^n$ hat.

Satz 4.1. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$, und $f_j := \rho_j * f = f * \rho_j$ für $j \in \mathbb{N}$, das heißt,*

$$f_j(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho_j(\mathbf{y}) \, d^n y. \tag{3}$$

Dann folgt:

1. *f_j ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\|f_j\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.*
3. *f_j konvergiert in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f bei $j \to \infty$.*

Bemerkung 4.2. Die Formel (3) kann so interpretiert werden, dass $f_j(\mathbf{x})$ eine Art *Durchschnittswert* der Funktion f auf einer Umgebung von $\mathbf{x}$ ist, wobei die Größe der Umgebung antiproportional zu j ist. Letzteres folgt, weil der Träger von ρ_j in $B_{1/j}^n$ enthalten ist.

Bemerkung 4.3. Die Funktionenfolge $\rho_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ in Satz 4.1 wird als **approximative Einheit** bezeichnet, weil sie betrachtet wird als Approximation einer "idealen" Funktion δ, die $\delta * f = f$ erfüllen soll. Eigentlich existiert δ nicht, aber man kann sie trotzdem approximieren!

Beweisskizze. Die ersten zwei Aussagen sind sofortige Konsequenzen von Sätzen 2.2 bzw. 3.1. Für die dritte Aussage skizzieren wir zuerst einen Beweis unter den zusätzlichen Voraussetzungen, dass f fast überall beschränkt ist und kompakten Träger hat, d.h. es gibt eine Konstante $R > 0$, so dass

$$\|f\|_{L^\infty} \le R \quad \text{und} \quad f|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R^n} \equiv 0. \tag{4}$$

Wegen der Youngschen Ungleichung (Satz 3.1) erfüllt f_j auch $\|f_j\|_{L^\infty} \le R$, und weil ρ_j kompakten Träger in $B_{1/j}^n$ hat, hat auch f_j kompakten Träger in $B_{R+1/j}^n \subset B_{R+1}^n$ für jedes j. Es folgt, dass f und f_j auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$ sind, und wir behaupten: $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Für den Beweis schreiben wir wegen (3) und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j \, dm = 1$,

$$f_j(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})] \, \rho_j(\mathbf{y}) \, d^n y,$$

also mit dem Satz von Fubini und der Transformation $\mathbf{u} := j\mathbf{y}$,

$$\begin{aligned}
\|f_j - f\|_{L^1} &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \cdot \rho_j(\mathbf{y}) \, d^n y \right) d^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(\mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \, d^n x \right) d^n y \\
&= \int_{B_1^n} \rho(\mathbf{u}) \left(\int_{B_{R+1}^n} \left| f\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{j}\right) - f(\mathbf{x}) \right| d^n x \right) d^n u,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile beide Integrale nur über bestimmte kompakte Teilmengen berechnet werden müssen, weil ρ und f kompakte Träger haben. Dass dies verschwindet bei $j \to \infty$ folgt davon, dass $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \int_K |f(\cdot + \mathbf{v}) - f| \, dm = 0$$

für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$. Letzteres werden wir hier nicht beweisen, aber siehe §5 für ein paar Hinweise.

Da $f_j \to f$ in L^1 wissen wir auch, dass f_j eine Teilfolge hat, so dass $|f_j - f|^p$ punktweise fast überall gegen 0 konvergiert, und außerdem ist $|f_j - f|^p$ gleichmäßig durch eine konstante Vielfache der charakteristischen Funktion von B^n_{R+1} beschränkt, die integrierbar ist. Es folgt wegen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes,

$$\|f_j - f\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^n} |f_j - f|^p \, dm \to \int_{\mathbb{R}^n} 0 \, dm = 0.$$

Das gilt soweit für eine Teilfolge, aber würde die ursprüngliche Folge f_j nicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergieren, könnten wir jetzt eine Teilfolge finden, die einen positiven L^p-Abstand entfernt von f bleibt, und wegen der L^1-Konvergenz würde das obige Argument dann einen Widerspruch liefern, also haben wir eigentlich die Konvergenz $f_j \xrightarrow{L^p} f$ bewiesen.

Ohne die Zusatzbedingungen (4) kann man wie folgt argumentieren: für eine gegebene Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und Konstante $R > 0$ definiert man

$$f^R(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in B^n_R \text{ und } |f(\mathbf{x})| \le R, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und zeigt, dass $\|f - f^R\|_{L^p}$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn $R > 0$ hinreichend groß ist. Dann erfüllt f^R die Bedingungen (4) und kann also beliebig gut bzgl. der L^p-Norm durch $f^R_j := \rho_j * f^R$ approximiert werden. Laut der Youngschen Ungleichung ist dann auch

$$\|f_j - f^R_j\|_{L^p} = \|\rho_j * (f - f^R)\|_{L^p} \le \|\rho_j\|_{L^1} \cdot \|f - f^R\|_{L^p} = \|f - f^R\|_{L^p}$$

beliebig klein, so dass $\|f - f_j\|_{L^p}$ für j hinreichend groß auch beliebig klein gemacht werden kann. □

5 Anhang

Hier noch ein Wort zum Beweis, dass

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \int_K |f(\cdot + \mathbf{v}) - f| \, dm = 0$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$. Wäre f stetig, dann würde dieses Resultat dadurch folgen, dass $f|_K$ *gleichmäßig* stetig ist, also konvergiert $f(\cdot + \mathbf{v})$ gleichmäßig gegen f bei $\mathbf{v} \to 0$, was wegen der Endlichkeit des Maßes von K die Konvergenz des Integrals impliziert. Leider sind die meisten $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht darstellbar durch stetige Funktionen, aber hier ist es eigentlich genug zu wissen, dass f sich immer durch stetige Funktionen beliebig gut approximieren lässt:

Lemma 5.1. *Für jedes $p \in [1,\infty)$ liegt $C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Dieses Lemma folgt natürlich von Satz 1.1, ist aber eigentlich elementarer und etwas allgemeiner gültig, z.B. eine Variante dieses Resultats gilt für $L^p(\mu)$ auf beliebigen Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wenn X auch eine Metrik hat, die einige vernünftige Eigenschaften erfüllt (siehe [Sal16, Theorem 4.15] oder [Bau13, Satz 9.46]).

Einen lesbaren Beweis von Lemma 5.1 findet man in [Bau13, Satz 9.46] und kann wie folgt zusammengefasst werden.

Zuerst zeigt man, dass es zu jeder Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von messbaren Treppenfunktionen mit kompakten Trägern gibt, die bzgl. der L^p-Norm gegen f konvergieren. Im Fall $f \geq 0$ reicht dafür eine punktweise konvergente monotone Folge $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f = \lim_{j\to\infty} f_j$, denn die Konvergenz $\|f - f_j\|_{L^p} \to 0$ folgt dann vom Lebesgueschen Konvergenzsatz. Da eine allgemeine reellwertige Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ in positiven und negativen Teilen $f = f^+ - f^-$ mit $f^\pm \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zerlegt werden kann, existieren dann entsprechende Folgen $f_j^\pm \to f^\pm$, mit denen man geeignete Treppenfunktionen $f_j := f_j^+ - f_j^-$ mit $f_j \overset{L^p}{\to} f$ definieren kann.

Da die Treppenfunktionen mit kompakten Trägern dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegen, reicht es jetzt, zu zeigen, dass jede solche Treppenfunktion in $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch stetige Funktionen approximiert werden kann. Die Treppenfunktionen sind lineare Kombinationen von charakteristischen Funktionen χ_E für beschränkte messbare Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$, also muss eigentlich nur gezeigt werden, dass χ_E immer durch stetige Funktionen in L^p approximiert werden kann. Das ist nur schwierig, weil beliebige beschränkte Lebesgue-messbare Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ ziemlich komisch aussehen können, aber das folgende Standardresultat über das Lebesgue-Maß hilft:

Lemma 5.2 (s. [Sal16, Theorem 2.13]). *Für eine gegebene beschränkte Lebesgue-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ existieren eine kompakte Menge K und eine offene Menge $\mathcal{U}$ mit*

$$K \subset E \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \qquad \textit{und} \qquad m(E \setminus K) < \epsilon, \quad m(\mathcal{U} \setminus E) < \epsilon.$$

Mit diesen Teilmengen im Bild baut man nun eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit

$$\varphi|_K \equiv 1 \quad \text{ und } \quad \varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}} \equiv 0.$$

Es ist dann nicht schwierig, zu zeigen, dass $\|\chi_E - \varphi\|_{L^p}$ beliebig klein wird, wenn $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Die Funktion φ kann in einfachen Fällen wie z.B. $n = 1$ ziemlich direkt als stückweise glatte Funktion konstruiert werden. Im Allgemeinen ist ihre Existenz weniger offensichtlich, folgt aber aus einem Resultat in der mengentheoretischen Topologie, die als *Tietzesches Erweiterungslemma* bekannt ist. Das werden wir hier nicht weiter besprechen, aber siehe [Jän05, Kapitel 8].

Literatur

[Bau13] H. Baum, *Einführung in die Maß- und Integrationstheorie* (2013). Skript zur Vorlesung Analysis III, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/MIT-2012.pdf`.

[Jän05] K. Jänich, *Topologie*, 8th ed., Springer-Verlag, Berlin, 2005 (German).

[LL01] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Sal16] D. A. Salamon, *Measure and integration*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. MR3469972

[Wen19] C. Wendl, *Parameterabhängige Lebesgue-Integrale* (2019). Skript zur Vorlesung Analysis III an der HU Berlin, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_parameter.pdf`.