HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis III
WiSe 2019–20

Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Folgenden betrachten wir das Anfangswertproblem für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung in $\mathbb{R}^n$. Gegeben ist eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, eine Funktion $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$. Gesucht wird ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$, so dass $(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathcal{U}$ für alle $t \in I$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{1}$$

1 Der Satz von Picard-Lindelöf

Satz 1.1. *Angenommen $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetige Funktion von $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und erfülle eine Lipschitz-Bedingung bzgl. $\mathbf{x}$, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}$ gilt. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ hinreichend klein eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ zum Anfangswertproblem (1).

Im Beweis werden wir eigentlich eine Lösung $\mathbf{x} : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \to \mathbb{R}^n$ finden, also definiert auf dem *Abschluss* des Intervalls $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, aber dies macht keinen Unterschied so lange wir nicht sagen können, wie groß ϵ sein darf. Eine äquivalente Aussage wäre, dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ gibt, auf dem eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ existiert, und wenn diese existiert, dann ist sie auch eindeutig. In manchen Beispielen kann man $I = \mathbb{R}$ nehmen, aber dies werden wir aus dem Beweis von Satz 1.1 nicht sehen können; wir befassen uns später mit der Frage, wie man das *maximale* Definitionsintervall für eine Lösung finden kann. Wie das folgende Beispiel zeigt, darf man im allgemeinen keine Erwartungen über die Größe von ϵ haben.

Beispiel 1.2. Für eine gegebene Konstante $\epsilon > 0$ definiert die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t, x) := 2tx^2/\epsilon^2$ ein Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{2t[x(t)]^2}{\epsilon^2}, \qquad x(0) = 1.$$

Durch Trennung der Variablen findet man die Lösung $x(t) = 1/\left[1 - (t/\epsilon)^2\right]$, definiert für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Da diese Funktion in der Nähe von $t = \pm\epsilon$ unbeschränkt wird, kann sie offensichtlich nicht als Lösung der Differentialgleichung auf ein grösseres Intervall fortgesetzt werden. Man kann außerdem aus dem Satz von Picard-Lindelöf (mit Lemma 1.6 unten) folgern, dass diese Lösung eindeutig ist, also dieses Anfangswertproblem hat keine Lösung, die auf einem grösseren Intervall als $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist.

Da es im Satz 1.1 nur um *lokal* definierte Lösungen (d.h. Lösungen auf einem beliebig kleinen Intervall um t_0) geht, darf man immer die Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit einer kleineren Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ von $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ersetzen. Diese Freiheit hat Vorteile, denn es kann oft sein, dass F die geforderte Lipschitz-Bedingung auf einer kleinen Umgebung erfüllt aber nicht auf $\mathcal{U}$ selbst.

Definition 1.3. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion. Wir sagen, F erfüllt eine **lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x**, falls es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$ eine Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\|F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}_0$ gilt.

Bemerkung 1.4. In dieser Definition darf die Lipschitz-Konstante $C > 0$ von der Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ abhängen. Es kann also sein, dass die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt wird, aber keine einzelne Lipschitz-Konstante für den gesamten Definitionsbereich $\mathcal{U}$ groß genug ist.

Weil man $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ in Satz 1.1 mit kleineren Umgebungen um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ersetzen kann, folgt sofort:

Korollar 1.5. *Das Ergebnis von Satz 1.1 gilt auch, wenn die Funktion $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ keine Lipschitz-Bedingung sondern nur eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl.* $\mathbf{x}$ *erfüllt.* □

Die Voraussetzung in dieser verallgemeinerten Form wird von fast allen Differentialgleichungen erfüllt, die wir betrachten wollen. Der Grund ist, dass wir meistens nur stetig differenzierbare Funktionen betrachten:

Lemma 1.6. *Ist $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann erfüllt F eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl.* $\mathbf{x}$.

Beweis. Um einen gegebenen Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$ wählen wir $\epsilon > 0$ und eine offene Kugel $B_r(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ um $\mathbf{x}_0$ von Radius $r > 0$ klein genug, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subset \mathcal{U}.$$

Dieses Produkt ist kompakt und die Ableitung $DF : \mathcal{U} \to \mathscr{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist per Annahme stetig, also gibt es eine Schranke

$$\|DF(t, \mathbf{x})\| \leq M \quad \text{für alle} \quad (t, \mathbf{x}) \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}.$$

Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung gilt dann für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_0)$,

$$\begin{aligned}
\|F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} F(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y})\, ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 DF\big(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}\big) \frac{d}{ds}\big(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}\big)\, ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 DF\big(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}\big)(0, \mathbf{x} - \mathbf{y})\, ds \right\| \\
&= \left\| \left(\int_0^1 DF\big(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}\big)\, ds \right)(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^1 DF\big(t, s\mathbf{x} + (1 - s)\mathbf{y}\big)\, ds \right\| \cdot \|(0, \mathbf{x}) - (0, \mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.7. Die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t,x) := \sqrt{|x|}$ ist stetig, aber nicht differenzierbar bei $x = 0$, und erfüllt auch keine lokale Lipschitz-Bedingung in Umgebungen vom Punkt $(t_0, x_0) := (0,0)$. Der Satz von Picard-Lindelöf ist also für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \quad \text{und} \quad x(0) = 0$$

nicht anwendbar. Es gibt einen weiteren Satz—den Satz von Cauchy-Peano—der wegen der Stetigkeit von F die lokale Existenz von Lösungen impliziert, aber keine Eindeutigkeit garantiert. Tatsächlich können wir ohne viel Mühe zwei verschiedene Lösungen zu diesem Anfangswertproblem finden: durch Trennung der Variablen findet man die Lösung

$$x(t) = \frac{t^2}{4},$$

aber die Funktion $x(t) = 0$ ist ebenfalls eine gültige Lösung.

Beweisen wir jetzt den Satz von Picard-Lindelöf.

Beweis von Satz 1.1. Wähle $r > 0$ und $\epsilon > 0$ klein genug, so dass

$$I_\epsilon(t_0) \times \overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subset \mathcal{U},$$

wobei $I_\epsilon(t_0)$ das Intervall $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und $B_r(\mathbf{x}_0)$ die offene Kugel von Radius r um $\mathbf{x}_0$ bezeichnet. Dieses Produkt ist kompakt und F ist stetig, also gibt es eine Schranke

$$\|F(t,\mathbf{x})\| \le M \quad \text{für alle} \quad (t,\mathbf{x}) \in I_\epsilon(t_0) \times \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}. \tag{2}$$

Wir fixieren jetzt die Konstante $M > 0$, aber behalten uns das Recht vor, $\epsilon > 0$ bei Bedarf weiter zu verkleinern; selbstverständlich bleibt die Abschätzung (2) noch gültig, wenn $\epsilon > 0$ kleiner wird und $M > 0$ dabei fest bleibt. Wegen Stetigkeit muss jede Lösung $\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems ihr Bild in $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ haben, wenn ϵ hinreichend klein gewählt wird.

Wir suchen also nach differenzierbaren Funktionen $\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$, die die Bedingungen $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t))$ und $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ erfüllen. Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sind diese zwei Bedingungen äquivalent zur Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{x}(t))\, ds \quad \text{für alle } t \in I_\epsilon(t_0), \tag{3}$$

wobei nur die *Stetigkeit* der Funktion $\mathbf{x}$ angenommen werden muss. Tatsächlich, jede stetige Funktion, die diese Integralgleichung erfüllt, muss differenzierbar sein, denn die Stetigkeit der verknüpften Funktion $s \mapsto F(s, \mathbf{x}(s))$ impliziert wegen des Hauptsatzes, dass die rechte Seite der Gleichung differenzierbar nach t ist. Das Ziel ist jetzt also die Lösungen der Integralgleichung (3) zu untersuchen.

Wir werden das Problem (3) im Folgenden so betrachten: aus der rechten Seite von (3) definiert man eine Abbildung $T : X \to X$ auf einem geeigneten Funktionenraum X, so dass eine Funktion $\mathbf{x} \in X$ genau dann (3) erfüllt, wenn $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$ gilt, d.h. wenn $\mathbf{x}$ ein *Fixpunkt* der Abbildung T ist. Als X definieren wir

$$X := \left\{ \mathbf{x} \in C\big(I_\epsilon(t_0), \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}\big) \;\middle|\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \right\},$$

d.h. X besteht aus allen stetigen Funktionen $\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$, die $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ erfüllen. Wir definieren dazu eine Metrik d auf X durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{t \in I_\epsilon(t_0)} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|.$$

Das Maximum in dieser Definition muss existieren, denn wir betrachten stetige Funktionen auf der kompakten Menge $I_\epsilon(t_0)$. Konvergenz in X bzgl. dieser Metrik heißt also *gleichmäßige* Konvergenz von Funktionen, und da $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ auch kompakt ist, wird garantiert, dass jede gleichäßige Cauchyfolge von stetigen Funktionsn $\mathbf{x}_k : I_\epsilon(t_0) \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ auch gleichäßig gegen eine stetige Funktion $\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ konvergiert. Weiter, wenn $\mathbf{x}_k \in X$, dann bleibt die Bedingung $\mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{x}_0$ auch bei der Grenzfunktion $\mathbf{x}$ erhalten, weil gleichmäßige Konvergenz auch punktweise Konvergenz impliziert. Wir haben damit bewiesen: (X, d) ist ein vollständiger metrischer Raum (s. auch [Bau12, Satz 4.36]).

Wir möchten jetzt eine Abbildung $T : X \to X$ durch

$$(T\mathbf{x})(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{x}(s))\, ds \tag{4}$$

definieren, aber ohne weiteres ist unklar, ob für jedes $\mathbf{x} \in X$ die auf diese Weise definierte Funktion $T\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \mathbb{R}^n$ wirklich zum Raum X gehört. Stetig ist diese Funktion als Konsequenz des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, und die Bedingung $(T\mathbf{x})(t_0) = \mathbf{x}_0$ ist auch sofort klar. Wir brauchen aber auch, dass das Bild der Funktion $T\mathbf{x} : I_\epsilon(t_0) \to \mathbb{R}^n$ in $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ liegt. Wegen der Definition und der Schranke (2) gilt für jedes $\mathbf{x} \in X$ und jedes $t \in I_\epsilon(t_0)$,

$$\|(T\mathbf{x})(t) - \mathbf{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{x}(s))\, ds \right\| \le |t - t_0| M \le \epsilon M,$$

also liegt $(T\mathbf{x})(t)$ tatsächlich immer in $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$, wenn wir jetzt $\epsilon > 0$ ggf. verkleinern, so dass die Bedingung

$$\epsilon \le \frac{r}{M}$$

gilt. Dies sei nunmehr vorausgesetzt: dann definiert (4) tatsächlich eine Abbildung $T : X \to X$.

Im restlichen Argument wollen wir zeigen, dass $T : X \to X$ eine eindeutige Fixpunkt hat, also existiert eine eindeutige Funktion $\mathbf{x} \in X$, die die Integralgleichung (3) und deswegen auch das gegebene Anfangswertproblem erfüllt. Das Werkzeug dafür ist der Banachsche Fixpunktsatz (s. Lemma 1.8 unten), der angewendet werden kann, falls eine Bedingung der Form $d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) \le K d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ mit einer positiven Konstante $K < 1$ gilt. Aus der Lipschitz-Bedingung $\|F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ folgt zwar für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

$$\begin{aligned}
d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) &= \max_{t \in I_\epsilon(t_0)} \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{x}(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} F(s, \mathbf{y}(s))\, ds \right\| \\
&= \max_{|t - t_0| \le \epsilon} \left\| \int_{t_0}^{t} \left[F(s, \mathbf{x}(s)) - F(s, \mathbf{y}(s)) \right] ds \right\| \\
&\le \max_{|t - t_0| \le \epsilon} \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s, \mathbf{x}(s)) - F(s, \mathbf{y}(s))\|\, ds \right| \\
&\le \max_{|t - t_0| \le \epsilon} C \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\|\, ds \right| \le C \max_{|t - t_0| \le \epsilon} \left(|t - t_0| \cdot \max_{t \in I_\epsilon(t_0)} \|x(s) - y(s)\| \right) \\
&\le C\epsilon d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Die gewünschte Eigenschaft wird also erfüllt, falls wir $\epsilon > 0$ ggf. weiter verkleinern, um die Ungleichung $\epsilon < 1/C$ zu erfüllen. Damit kann der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden und liefert eine eindeutige Funktion $\mathbf{x} \in X$, die $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$ und deswegen auch das gegebene Anfangswertproblem erfüllt. □

Hier noch zur Erinnerung die Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes, der in der Vorlesung *Analysis I* bewiesen wurde (s. [Bau12, Satz 4.24]):

Lemma 1.8 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung, die mit einer festen Konstanten $K \in (0, 1)$ die Ungleichung $d(Tx, Ty) \le Kd(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt. Dann existiert genau ein Fixpunkt $x_* \in X$ von $T : X \to X$, und für einen beliebigen Punkt $x \in X$ konvergiert die Folge $x_n := T^n x$ bei $n \to \infty$ gegen x_*.* □

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert nicht nur ein Existenzresultat, sondern (wie man aus dem Beweis herauslesen kann) ein praktisches Verfahren, um lokale Lösungen wenigstens annäherungsweise zu finden. Das geht im Prinzip so: man fängt mit einer beliebigen stetigen Funktion $\mathbf{x}_1 : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ an, die die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{x}_0$, z.B. eine konstante Funktion. Dann berechnet man das Integral in (4), um eine neue Funktion $\mathbf{x}_2 := T\mathbf{x}_1$ zu definieren. Dann nochmal, um $\mathbf{x}_3 := T\mathbf{x}_2$ zu definieren, und so weiter. Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert, dass man bei beliebig vielen Wiederholungen dieses Verfahrens immer näher an einer genauen Lösung kommt, und mit ein bisschen mehr Mühe bei einigen Details im Beweis von Satz 1.1 könnte man sogar abschätzen, genau wie viele Wiederholungen nötig sind, um die genaue Lösung mit einem gegebenen Fehlerabschätzung zu approximieren (s. [Brö92, S. 10–12]). Dieses Verfahren gilt as "praktisch", wenn man davon ausgeht, dass man die Integrale in (4) immer berechnen kann und bereit ist, es beliebig oft zu tun—das heißt, es ist genau dann praktisch, wenn man einen guten Computer zur Verfügung hat und sich mit einer rein numerischen Antwort (statt einer analytischen Formel für die Lösung) abfinden kann.

Die Konvergenz der Folge $\mathbf{x}_k := T^{k-1}\mathbf{x}_1$ wird im Banachschen Fixpunktsatz dadurch bewiesen, dass man mittels der Eigenschaft $d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) \le Kd(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $K < 1$ zeigt, dass $\mathbf{x}_k$ eine Cauchyfolge ist. Es ist also wesentlich, dass der metrischer Raum (X, d) *vollständig* ist, und das ist der Hauptgrund, warum das Iterationsverfahren überhaupt zu einer Lösung des Anfangswertproblems führt. Die vollständigkeit von X ist vielleicht das abstrakste Detail im Beweis—ich wage zu behaupten, die weiteren Ideen im Beweis könnten jedem gut ausgebildeten Physiker einfallen, aber auf diese Art von Anwendung des Begriffs Vollständigkeit kommt man nur, wenn man eine solide Grundausbildung in der Mathematik hat. Die Vollständigkeit von X beruht nämlich auf einigen grundlegenden Resultaten von der Vorlesung *Analysis I*: (1) abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ wie z.B. $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ sind vollständige metrische Räume, (2) gleichmäßige Cauchyfolgen von Funktionen mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum konvergieren auch gleichmäßig, und (3) konvergiert eine Folge stetiger Funktionen gleichmäßig, dann ist die Grenzfunktion auch stetig.

2 Maximale Lösungen

Die Aussage von Satz 1.1 lässt die Möglichkeit offen, dass ein Anfangswertproblem mit Lipschitz-Bedingung immer noch zwei Lösungen haben könnte, die in einer Umgebung des

Anfangspunkts t_0 identisch aber weiter weg von t_0 unterschiedlich sind. Diese Möglichkeit müssen wir jetzt ausschließen.

Lemma 2.1. *Angenommen $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetige Funktion von $(t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl $\mathbf{x}$. Sind $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems (1) definiert auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$, dann sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ auf $I \cap J$ identisch.*

Beweis. Die Schnittmenge $I \cap J \subset \mathbb{R}$ ist auch ein offenes Intervall mit $t_0 \in I \cap J$, und wir definieren

$$K := \left\{ t \in I \cap J \;\middle|\; \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) \right\}.$$

Da $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ beide stetig sind, ist leicht zu sehen, dass K eine abgeschlossene Teilmenge von $I \cap J$ ist. Aber die Eindeutigkeit im Satz von Picard-Lindelöf impliziert, dass K auch offen ist, denn für jeden Punkt $t_1 \in K$ mit $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{y}(t_1) =: \mathbf{x}_1$ hat man lokale Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1.$$

Die Menge K ist außerdem nicht leer, denn sie enthält t_0. Da Intervalle zusammenhängend sind, sind die einzigen zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen von $I \cap J$ die leere Menge $\emptyset$ und $I \cap J$ selbst; es folgt, $K = I \cap J$. $\square$

Korollar 2.2. *Angenommen $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetige Funktion von $(t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl $\mathbf{x}$. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine Lösung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (1) mit der Eigenschaft, dass für jede andere Lösung $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^n$ von (1),*

$$J \subset I \quad \textit{und} \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}|_J.$$

Beweis. Man definiert $I \subset \mathbb{R}$ als die Vereinigung von allen Intervallen $J \subset \mathbb{R}$, die als Definitionsbereiche für Lösungen $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^n$ von (1) vorkommen. Wegen Lemma 2.1 existiert auch eine Lösung mit I als Definitionsintervall. $\square$

Wir nennen $I \subset \mathbb{R}$ in Korollar 2.2 das **maximale Definitionsintervall** für Lösungen des Anfangswertproblems (1), und nennen die (eindeutige!) Lösung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ die **maximale Lösung**.

3 Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Frage, wie die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1) vom Anfangswert $\mathbf{x}_0$ sowie von der Funktion F abhängt, z.B. können sich die Werte $\mathbf{x}(t)$ radikal ändern, wenn man $\mathbf{x}_0$ oder F nur ein kleines bisschen stört? Die Antwort ist natürlich nein, solange man eine vernünftige Lipschitz-Bedingung hat.

Im Folgenden betrachten wir eine Familie von Anfangswertproblemen, die stetig von endlich vielen reellen Parametern abhängt, d.h. der Parameterraum ist $\mathbb{R}^m$ für eine ganze Zahl $m \geq 0$. Konkret, sei

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

eine offene Teilmenge und

$$\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \mapsto F(\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) =: F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$$

eine stetige Funktion, die eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. $\mathbf{x}$ erfüllt, d.h. ein gegebener Punkt $(\mathbf{p}_0, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$ hat immer eine Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ und eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) - F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{für alle} \quad (\mathbf{p}, t, \mathbf{x}), (\mathbf{p}, t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}_0$$

gilt. Die Notation $F_{\mathbf{p}}$ wird verwendet, um die Rolle von $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ als *Parameter* zu betonen: für jedes $\mathbf{p}$ ist $F_{\mathbf{p}} : \mathcal{U}_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige (und bzgl. $\mathbf{x}$ lokal Lipschitz-stetige) Funktion auf der offenen Teilmenge $\mathcal{U}_{\mathbf{p}} := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}\}$, und definiert ein Differentialgleichungssystem[1]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t)). \tag{5}$$

Wir definieren nun

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

als die Menge aller Tupel $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y})$ mit der Eigenschaft, dass $(\mathbf{p}, \tau, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}$ und t gehört zum Definitionsintervall I der maximalen Lösung $\mathbf{x}_{(\mathbf{p},\tau,\mathbf{y})} : I \to \mathbb{R}^n$ zur Differentialgleichung (5) mit Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}.$$

Die (globale) **Flussabbildung** (oder kurz: der **Fluss**) des parameterabhängigen Systems (5) wird dann als die Abbildung

$$\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) =: \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) := \mathbf{x}_{(\mathbf{p},\tau,\mathbf{y})}(t)$$

definiert. Wir nennen $\mathcal{V}$ den **maximalen Definitionsbereich** der Flussabbildung. Mit der Notation $\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}$ soll betont werden, dass der Fluss vorwiegend nicht als Funktion von Zeit sondern als Funktion vom *Anfangswert* betrachtet wird; eigentlich ist es beides, und hängt natürlich auch von der Anfangszeit τ und Parameter $\mathbf{p}$ ab.

Satz 3.1 (stetige Abhängigkeit)**.** *Unter den oben beschriebenen Voraussetzungen ist die Menge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und der Fluss $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Es war schon klar, dass die Abbildung $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$ stetig von t abhängt; die Abhängigkeit von t ist sogar differenzierbar, denn als Funktion von t mit $(\mathbf{p}, \tau, \mathbf{y})$ als konstante Parameter erfüllt sie per Definition die Differentialgleichung (5). Aber die Hauptsache bei Satz 3.1 ist, dass $\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$ auch stetig vom Anfangswert $\mathbf{y}$ und Parameter $\mathbf{p}$ abhängt. In einem späteren Abschnitt werden wir die Voraussetzungen für F weiter spezifizieren, damit auch von Differenzierbarkeit bzgl. $\mathbf{y}$ und $\mathbf{p}$ geredet werden kann; wir werden zeigen können, dass der Fluss im Allgemeinen genau so oft differenzierbar ist wie die Funktion F, die die Differentialgleichung bestimmt.

Im Folgenden wird weiterhin mit

$$B_r(\mathbf{z}) \subset \mathbb{R}^q$$

die offene Kugel von Radius $r > 0$ um einen Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$ bezeichnet, und mit

$$I_\epsilon(t) := [t - \epsilon, t + \epsilon] \subset \mathbb{R}$$

[1] Aufgepasst: für gegebenes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ könnte nach diesen Definitionen der Definitionsbereich $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$ von $F_{\mathbf{p}}$ auch die leere Menge sein. Das ist kein Widerspruch, bedeutet aber, dass das System bei solchen Parametern keine mögliche Anfangswerte und keine Lösungen hat.

das abgeschlossene Intervall von Radius $\epsilon > 0$ um $t \in \mathbb{R}$. Der Hauptschritt im Beweis von Satz 3.1 ist eine rein lokale Version der gleichen Aussage, die eigentlich als Verallgemeinerung von Satz 1.1 verstanden werden kann und einen sehr ähnlichen Beweis zulässt.

Lemma 3.2. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.1 gibt es für jeden gegebenen Punkt* $(\mathbf{p}_0, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$ *Konstanten* $a, \delta, \epsilon, \rho > 0$ *mit der folgenden Bedeutung. Wir bezeichnen mit* $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *die Teilmenge*

$$\mathcal{V}_0 := \left\{ (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{p} \in \overline{B_a(\mathbf{p}_0)},\ \mathbf{y} \in \overline{B_\rho(\mathbf{x}_0)},\ \tau \in I_\delta(t_0) \text{ und } t \in I_\epsilon(\tau) \right\}.$$

Dann gehört $\mathcal{V}_0$ *zum maximalen Definitionsbereich der Flussabbildung* φ, *und* $\varphi|_{\mathcal{V}_0}$ *ist stetig.*

Beweis. Wir beweisen die Existenz einer stetigen Abbildung $\varphi : \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$, die eine partielle Ableitung nach t besitzt und die Bedingungen

$$\partial_t \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{p}}\big(t, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})\big), \qquad \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,\tau}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \tag{6}$$

erfüllt. Wenn das existiert, dann folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen zum Anfangswertproblem, dass φ eine Einschränkung der globalen Flussabbildung auf $\mathcal{V}_0$ ist, also folgt, dass der Fluss auf $\mathcal{V}_0$ definiert und stetig ist.

Die Bedingungen (6) sind äquivalent zur Integralgleichung

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_\tau^t F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\, ds, \tag{7}$$

also werden wir wie im Beweis von Satz 1.1 die rechte Seite dieser Gleichung als Definition einer kontrahierenden Abbildung auf einem geeigneten metrischen Raum betrachten und durch den Banachschen Fixpunktsatz die Existenz einer stetigen Lösung folgern.

Wegen der Stetigkeit von F und der lokalen Lipschtiz-Bedingung können wir Konstanten $a, \delta, \epsilon, r > 0$ wählen, so dass

$$\overline{B_a(\mathbf{p}_0)} \times I_{\delta+\epsilon}(t_0) \times \overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subset \mathcal{U},$$

und für alle $(\mathbf{p}, t, \mathbf{x})$ und $(\mathbf{p}, t, \mathbf{y})$ in dieser Umgebung, die Abschätzungen

$$\|F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})\| \le M, \qquad \|F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) - F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{8}$$

mit Konstanten $M, C > 0$ gelten. Diese Abschätzungen bleiben mit den selben Konstanten M und C gültig, wenn $\epsilon > 0$ weiter verkleinert wird, was in Kürze nötig wird. Wir wählen nun eine weitere Konstante $\rho \in (0, r)$ und definieren die kompakte Menge $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sowie in der Aussage des Lemmas. Der metrische Raum (X, d) wird dann durch

$$X := \left\{ \varphi \in C\big(\mathcal{V}_0, \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}\big) \;\middle|\; \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,\tau}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \text{ für alle } \mathbf{p}, \tau, \mathbf{y} \right\},$$

mit Metrik

$$d(\varphi, \psi) := \max_{(\mathbf{p},\tau,t,\mathbf{y}) \in \mathcal{V}_0} \|\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) - \psi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})\|$$

definiert. Für jedes $\varphi \in X$ wird eine neue Funktion $T\varphi : \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(T\varphi)(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) := \mathbf{y} + \int_\tau^t F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\, ds.$$

Wir behaupten: wird $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt, dann definiert T eine kontrahierende Abbildung $T : X \to X$. Vier Details sind dabei nachzuprüfen, wobei die ersten drei alle die Frage betreffen, ob für jedes $\varphi \in X$ die Funktion $T\varphi$ auch in X liegt. Das braucht zuerst die Bedingung $(T\varphi)(\mathbf{p}, \tau, \tau, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, die man sofort von der Definition sieht. Zweitens muss das Bild von $T\varphi$ für jedes $\varphi \in X$ in $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$ liegen. Wegen der ersten Abschätzung in (8) gilt für jedes $\varphi \in X$ und $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}_0$,

$$\|(T\varphi)(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}_0\| \le \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| + \left\| \int_\tau^t F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\, ds \right\| \le \rho + \epsilon M,$$

also folgt diese Bedingung, wenn ϵ die Ungleichung $\rho + \epsilon M < r$ erfüllt, und das ist möglich, weil $\rho < r$. Drittens muss $T\varphi$ für jedes $\varphi \in X$ auch eine stetige Funktion sein, also muss nachgeprüft werden, dass für eine gegebene konvergente Folge $\mathcal{V}_0 \ni (\mathbf{p}_k, \tau_k, t_k, \mathbf{y}_k) \to (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y})$, die resultierende Folge von Integralen konvergiert:

$$\int_{\tau_k}^{t_k} F_{\mathbf{p}_k}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}_k}^{\tau_k,s}(\mathbf{y}_k)\big)\, ds \to \int_\tau^t F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\, ds.$$

Zu diesem Zweck schreiben wir

$$\begin{aligned}\int_\tau^t F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\, ds - \int_{\tau_k}^{t_k} F_{\mathbf{p}_k}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}_k}^{\tau_k,s}(\mathbf{y}_k)\big)\, ds \\ = \int_\tau^t \left[F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big) - F_{\mathbf{p}_k}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}_k}^{\tau_k,s}(\mathbf{y}_k)\big)\right] ds \\ - \int_{\tau_k}^{\tau} F_{\mathbf{p}_k}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}_k}^{\tau_k,s}(\mathbf{y}_k)\big)\, ds - \int_t^{t_k} F_{\mathbf{p}_k}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}_k}^{\tau_k,s}(\mathbf{y}_k)\big)\, ds.\end{aligned}$$

Hier kann die zweite Zeile als parameterabhängiges Riemann-Integral bzgl. des Parameters $(\mathbf{p}_k, \tau_k, \mathbf{y}_k) \in \overline{B_\delta(\mathbf{p}_0)} \times I_\delta(t_0) \times \overline{B_\rho(\mathbf{x}_0)}$ betrachtet werden, und konvergiert deswegen gegen 0 (s. [Bau12, Satz 7.19]). Die dritte Zeile hat wegen der ersten Bedingung in (8) Norm höchstens $M|\tau - \tau_k| + M|t - t_k|$ und konvergiert also ebenfalls gegen 0. Damit ist bewiesen, dass T wohl definiert als Abbildung $X \to X$ ist.

Jetzt ist noch zu prüfen, ob $T : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung ist. Für zwei gegebene Elemente $\varphi, \psi \in X$ gilt wegen der Lipschitz-Bedingung in (8)

$$\begin{aligned} d(T\varphi, T\psi) &= \max_{(\mathbf{p},\tau,t,\mathbf{y}) \in \mathcal{V}_0} \left\| \int_\tau^t \left[F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big) - F_{\mathbf{p}}\big(s, \psi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big)\right] ds \right\| \\ &\le \max_{(\mathbf{p},\tau,t,\mathbf{y}) \in \mathcal{V}_0} \left(|t - \tau| \cdot \max_{s \in I_\epsilon(\tau)} \left\| F_{\mathbf{p}}\big(s, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big) - F_{\mathbf{p}}\big(s, \psi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y})\big) \right\| \right) \\ &\le C \max_{(\mathbf{p},\tau,t,\mathbf{y}) \in \mathcal{V}_0} \left(|t - \tau| \cdot \max_{s \in I_\epsilon(\tau)} \left\| \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y}) - \psi_{\mathbf{p}}^{\tau,s}(\mathbf{y}) \right\| \right) \le C\epsilon d(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Die Abbildung $T : X \to X$ erfüllt also die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, wenn wir $\epsilon > 0$ ggf. weiter verkleinern, damit $C\epsilon < 1$. Dann ist die Existenz einer stetigen Funktion $\mathcal{V}_0 \to \overline{B_r(\mathbf{x}_0)} : (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$ garantiert, die die Integralgleichung (7) und daher auch (6) erfüllt. □

Bemerkung 3.3. Die folgende Erweiterung von Lemma 3.2 wird manchmal nützlich sein: jeder Punkt $(\mathbf{p}_0, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}$ hat eine Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, so dass für geeignete Konstanten $a, \delta, \epsilon, \rho > 0$, die Aussage des Lemmas mit $(\mathbf{p}_0, t_0, \mathbf{x}_0)$ ersetzt durch einen beliebigen Punkt $(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{x}_1) \in \mathcal{U}_0$ immer noch stimmt—wichtig hierbei ist, dass die Konstanten von der Umgebung $\mathcal{U}_0$ abhängen aber nicht von der Wahl des Punktes $(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{x}_1)$ in dieser Umgebung. Das geht sehr einfach: wenn φ stetig ist auf dem Bereich $\mathcal{V}_0$ wie in der Aussage beschrieben, dann definieren wir

$$\mathcal{U}_0 := \left\{ (\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U} \;\middle|\; \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| < a/2,\ |t - t_0| < \delta/2,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \rho/2 \right\},$$

und die Konstanten $a' := a/2$, $\delta' := \delta/2$ und $\rho' := \rho/2$. Für einen beliebigen Punkt $(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{y}_1) \in \mathcal{U}_0$ ist der Bereich

$$\mathcal{V}_0' := \left\{ (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{p} \in \overline{B_{a'}(\mathbf{p}_1)},\ \mathbf{y} \in \overline{B_{\rho'}(\mathbf{x}_1)},\ \tau \in I_{\delta'}(t_1) \text{ und } t \in I_\epsilon(\tau) \right\}$$

dann eine Teilmenge von $\mathcal{V}_0$, also ist der Fluss auch auf $\mathcal{V}_0'$ definiert und stetig.

Wir kommen jetzt zum Beweis des globalen Satzes über stetige Abhängigkeit.

Beweis von Satz 3.1. Zu zeigen ist, dass für einen gegebenen Punkt $(\mathbf{p}_*, \tau_*, t_*, \mathbf{y}_*) \in \mathcal{V}$, die Flussabbildung φ auch auf einer Umgebung von $(\mathbf{p}_*, \tau_*, t_*, \mathbf{y}_*)$ in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert werden kann und auf dieser Umgebung stetig ist. Wir betrachten den Fall $t_* \geq \tau_*$, denn der Fall $t_* \leq \tau_*$ geht analog.

Das Resultat würde fast sofort aus Lemma 3.2 folgen, wenn wir annehmen dürften, $t_* - \tau_*$ sei beliebig klein. So entsteht die Idee, $\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}$ als Verknüpfung von vielen lokal definierten Flussabbildung zu zerlegen. Damit ist Folgendes gemeint: wählen wir zuerst eine Zerlegung des Intervalls $[\tau_*, t_*]$ in der Form

$$\tau_* =: t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} := t_*, \tag{9}$$

und betrachten wir den Fluss $\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$ für $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y})$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\mathbf{p}_*, \tau_*, t_*, \mathbf{y}_*)$, so dass $\tau < t_1$ und $t > t_N$. Sei $\mathbf{x} : [\tau, t] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung zum Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ mit $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}$, und sei $\mathbf{y}_j := \mathbf{x}(t_j)$ für $j = 1, \ldots, N$. Dann gilt

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t_1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1, \qquad \varphi_{\mathbf{p}}^{t_j,t_{j+1}}(\mathbf{y}_j) = \mathbf{y}_{j+1} \text{ für } j = 1, \ldots, N-1, \qquad \varphi_{\mathbf{p}}^{t_N,t}(\mathbf{y}_N) = \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}),$$

also

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{p}}^{t_N,t} \circ \varphi_{\mathbf{p}}^{t_{N-1},t_N} \circ \ldots \circ \varphi_{\mathbf{p}}^{t_1,t_2} \circ \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t_1}(\mathbf{y}). \tag{10}$$

Wir wollen jetzt zeigen: die Zerlegung von $[\tau_*, t_*]$ kann so gewählt werden, dass die rechte Seite von (10) als Konsequenz von Lemma 3.2 eine stetige Funktion von $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y})$ in der Nähe von $(\mathbf{p}_*, \tau_*, t_*, \mathbf{y}_*)$ definiert. Das wird nämlich gehen, wenn die Abstände $t_{j+1} - t_j$ alle klein genug sind, aber zuerst muss genauer geklärt werden, was "klein genug" heißt.

Zu diesem Zweck wird behauptet: es gibt Konstanten $a, \epsilon, \rho > 0$, so dass der Fluss definiert und stetig ist auf dem Bereich

$$\mathcal{V}_* := \left\{ (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{p} \in \overline{B_a(\mathbf{p}_*)},\ \tau \in [\tau_*, t_*],\ t \in I_\epsilon(\tau) \text{ und } \mathbf{y} \in \overline{B_\rho(\mathbf{x}^*(\tau))} \right\},$$

wobei wir $\mathbf{x}^*(\tau) := \varphi_{\mathbf{p}_*}^{\tau_*,\tau}(\mathbf{y}_*)$ bezeichnen. Der Beweis geht so: für jedes $\tau \in [\tau_*, t_*]$ existieren laut Lemma 3.2 Konstanten $a_\tau, \delta_\tau, \epsilon_\tau, \rho_\tau > 0$, so dass der Fluss existiert und stetig ist auf

$$\mathcal{V}_\tau := \left\{ (\mathbf{p}, \tau', t, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{p} \in \overline{B_{a_\tau}(\mathbf{p}_*)},\ \tau' \in I_{\delta_\tau}(\tau),\ t \in I_{\epsilon_\tau}(\tau') \text{ und } \mathbf{y} \in \overline{B_{\rho_\tau}(\mathbf{x}^*(\tau))} \right\},$$

und wegen Bemerkung 3.3 gibt es dazu eine offene Umgebung $J_\tau \subset [\tau_*, t_*]$ von τ, so dass für alle $\tau' \in J_\tau$, die selben Konstanten $a_\tau, \delta_\tau, \epsilon_\tau, \rho_\tau > 0$ genommen werden dürfen in der

Definition vom Bereich $\mathcal{V}_{\tau'}$. Die Umgebungen J_τ für alle $\tau \in [\tau_*, t_*]$ bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $[\tau_*, t_*]$, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $T \subset [\tau_*, t_*]$, so dass

$$[\tau_*, t_*] \subset \bigcup_{\tau \in T} J_\tau.$$

Die gewünschten Konstanten können dann durch

$$a := \min_{\tau \in T} a_\tau, \quad \delta := \min_{\tau \in T} \delta_\tau, \quad \epsilon := \min_{\tau \in T} \epsilon_\tau, \quad \rho := \min_{\tau \in T} \rho_\tau,$$

denn wenn die einzelnen Konstanten $a_\tau, \delta_\tau, \epsilon_\tau, \rho_\tau$ in der Definition von $\mathcal{V}_\tau$ durch diese Konstanten ersetzt werden, dann ist der Fluss immer noch auf $\mathcal{V}_\tau$ stetig, und die Vereinigung von den $\mathcal{V}_\tau$ für alle $\tau \in [\tau_*, t_*]$ enthält $\mathcal{V}_*$.

Jetzt wählen wir die Zerlegung (9) fein genug, dass $t_{j+1} - t_j < \epsilon$ für jedes j, und betrachten nochmal die rechte Seite von (10). Die Abbildung $(\mathbf{p}, \tau, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau, t_1}(\mathbf{y})$ ist wegen der obigen Behauptung für alle $(\mathbf{p}, \tau, \mathbf{y})$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\mathbf{p}_*, \tau_*, \mathbf{y}_*)$ definiert und stetig, und ihr Bild liegt in einer Umgebung von $\varphi_{\mathbf{p}_*}^{\tau, t_1}(\mathbf{y}_*) = \mathbf{x}^*(t_1)$. Die Abbildung $(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{t_1, t_2}(\mathbf{y})$ ist aus dem selben Grund in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\mathbf{p}_*, \mathbf{x}^*(t_1))$ definiert und stetig, und hat ihr Bild in einer Umgebung von $\varphi_{\mathbf{p}_*}^{t_1, t_2}(\mathbf{x}^*(t_1)) = \mathbf{x}^*(t_2)$. So geht es weiter bis zur letzten Abbildung in der Verknüpfung: $(\mathbf{p}, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{t_N, t}(\mathbf{y})$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\mathbf{p}_*, t_*, \mathbf{x}^*(t_N))$ definiert und stetig, also ist die rechte Seite von (10) tatsächlich stetig auf einer offenen Umgebung von $(\mathbf{p}_*, \tau_*, t_*, \mathbf{y}_*)$. $\square$

Bemerkung 3.4. Unser Beweis von Lemma 3.2 folgt ungefähr [Brö92, §1.2], wo eine etwas ambitioniertere Formulierung des Resultats steht, allerdings mit einem nicht ganz korrekten Beweis. In Bröckers Version von Lemma 3.2 darf der Parameter $\mathbf{p}$ in einem beliebigen metrischen Raum liegen, nicht nur $\mathbb{R}^m$. Dies hat einige theoretische Vorteile und erlaubt viel Freiheit im Anwenden des Lemmas, ist aber auch gefährlich, denn bei beliebigen metrischen Räumen fehlen einige Eigenschaften, die man in $\mathbb{R}^m$ immer wieder braucht: z.B. ist es in einem metrischen Raum P im allgemeinen nicht so, dass ein gegebener Punkt $\mathbf{p}_0 \in P$ immer eine Umgebung mit kompaktem Abschluss haben muss. (Das ist zwar meistens falsch, wenn P ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum ist.) Einige Schritte im Beweis müssten deswegen unter diesen allgemeineren Voraussetzungen geändert werden, z.B. darf man nicht mehr davon ausgehen, dass die Definitionsbereiche der Funktionen im metrischen Raum X kompakt sind, also könnte es jetzt sein, dass das Maximum in der Definition der Metrik nicht existiert. Das ist aber leicht zu reparieren, indem man "max" mit "sup" ersetzt; das Supremum muss endlich sein, da die Funktionen in X per Definition beschränkt sind. Ein subtileres Problem tritt später auf, wo man die Stetigkeit der Funktion $T\Phi$ beweisen muss, insbesondere bzgl. des Parameters: im obigen Beweis haben wir auf das Resultat von [Bau12, Satz 7.19] über parameterabhängige Integrale verwiesen. Aber im Beweis dieses Satzes wird die Existenz von kompakten Umgebungen im Parameterraum tatsächlich benutzt—der Beweis ist also wirklich nicht für Parameter in beliebigen metrischen Räumen gültig. Auch dieses Problem kann umgangen werden, indem man nämlich den Satz über parameterabhängige Integrale verallgemeinert, aber dafür müssten wir zuerst einige Grundsätze der Maßtheorie und das Lebesgue-Integral einführen. Das benötigte Resultat an dieser Stelle heißt der *Lebesguesche Konvergenzsatz*; wir werden ihn später in dieser Vorlesung ausführlich besprechen, aber jetzt noch nicht.

4 Globale Existenz

Als nächstes möchten wir verstehen, wann die Existenz einer Lösung zu (1) auf quantitativ grösseren Intervallen als $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ gefolgert werden kann. Die Frage kann auch so formuliert werden: wenn eine Lösung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ nicht auf ein grösseres Intervall fortgesetzt werden kann, dann *warum* nicht? Wir haben in Beispiel 1.2 einen möglichen Grund gesehen: die Lösung divergiert an den Ränden des Intervalls gegen $\pm\infty$. Das nächste Resultat sagt, dass das im Wesentlichen der einzige mögliche Grund ist.

Satz 4.1. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,*

$$K \subset \mathcal{U}$$

eine kompakte Teilmenge, $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion mit einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. $\mathbf{x}$, und $\mathbf{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung zur Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t))$.

- *Falls $t_+ < \infty$, dann existiert ein $t_* \in (t_-, t_+)$, so dass $(t, \mathbf{x}(t)) \notin K$ für alle $t \in (t_*, t_+)$.*
- *Falls $t_- > -\infty$, dann existiert ein $t_* \in (t_-, t_+)$, so dass $(t, \mathbf{x}(t)) \notin K$ für alle $t \in (t_-, t_*)$.*

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage; der Beweis der zweiten Aussage geht analog.

Angenommen kein t_* mit der beschriebenen Eigenschaft existiert: dann existiert eine konvergente Folge $t_k \in (t_-, t_+)$ mit $t_k \to t_+$, so dass $(t_k, \mathbf{x}(t_k)) \in K$ für alle k. Da K kompakt ist, können wir diese Folge mit einer Teilfolge ersetzen, damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(t_k, \mathbf{x}(t_k)) \to (t_+, \mathbf{y}_0) \tag{11}$$

für einen Punkt $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_+, \mathbf{y}_0) \in K \subset \mathcal{U}$. Laut Lemma 3.2 und Bemerkung 3.3 gibt es eine Konstante $\epsilon > 0$ und eine Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ von $(t_+, \mathbf{y}_0)$, so dass der Fluss $\varphi^{\tau,t}(\mathbf{y})$ für alle $(\tau, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - \tau| < \epsilon$ definiert ist.[2] Nun finden wir $k \in \mathbb{N}$, so dass $(t_k, \mathbf{x}(t_k)) \in \mathcal{U}_0$ und $t_+ - t_k < \epsilon/2$. Dann kann die Lösung $\mathbf{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ auf das grössere Intervall $(t_-, t_k + \epsilon)$ erweitert werden durch

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) := \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{für } t \in (t_-, t_k), \\ \varphi^{t_k,t}(\mathbf{x}(t_k)) & \text{für } t \in [t_k, t_k + \epsilon). \end{cases}$$

Das ist ein Widerspruch, denn wir hatten angenommen, $\mathbf{x}$ sei die maximale Lösung. □

Beispiel 4.2. Angenommen, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. $\mathbf{x}$, und F sei außerdem beschränkt:

$$\|F(t, \mathbf{x})\| \le M \quad \text{für alle} \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Dann folgert man aus Satz 4.1, dass die maximale Lösung zum Anfangswertproblem (1) immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, oder anders gesagt, der Fluss $\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = F(t, \mathbf{x})$ ist für alle $(\tau, t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert. Das folgt, weil die gegebene

[2] Hier wird Lemma 3.2 im Fall $m = 0$ angewendet, also der Parameterraum ist ein Punkt; deswegen muss kein Parameter eigentlich erwähnt werden.

Schranke die Ungleichung $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq M$ für alle t im Definitionsintervall einer Lösung impliziert, also folgt

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + |t - t_0|M. \tag{12}$$

Diese Schranke wird zwar beliebig groß, wenn t groß wird, aber nicht in endlicher Zeit: gäbe es z.B. eine maximale Lösung $\mathbf{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit $t_+ < \infty$, dann gäbe es auch eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, aus der $(t, \mathbf{x}(t))$ bei $t \to t_+$ wegen (12) nicht entkommen könnte. Das würde Satz 4.1 widersprechen.

Der **Träger** einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ auf einem metrischen Raum X wird im allgemeinen als der Abschluss der Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ definiert. Da stetige Funktionen auf kompakten Räumen immer beschränkt sind, sind stetige Funktionen mit kompaktem Träger auch immer beschränkt.

Korollar 4.3. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann existiert der Fluss $\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x})$ des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ für alle $(\tau, t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U}$.*

Beweis. Behauptet wird, dass für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, die maximale Lösung $\mathbf{x} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ zum Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$t_\pm = \pm\infty$ hat. Sei $K \subset \mathcal{U}$ der Träger von F. Wäre $t_+ < \infty$, dann müsste laut Satz 4.1 ein $t_* \in (t_-, t_+)$ existieren, so dass $(t, \mathbf{x}(t)) \notin [t_+ - 1, t_+ + 1] \times K$ für alle $t \in (t_*, t_+)$. Wählen wir t_* hinreichend nahe an t_+, bedeutet das $\mathbf{x}(t) \notin K$ und daher $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t)) = 0$ für alle $t \in (t_*, t_+)$, weil F außerhalb von K verschwindet. Aber dann könnte $\mathbf{x}$ auf das grössere Intervall (t_-, ∞) mit $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_*)$ für alle $t > t_*$ als Lösung fortgesetzt werden, also kann (t_-, t_+) doch nicht das Definitionsintervall der maximalen Lösung sein. Man beweist analog, dass $t_- > -\infty$ unmöglich ist. $\square$

5 Oberfunktionen und Unterfunktionen

Für weitere Anwendungen von Satz 4.1 über globale Existenz braucht man Werkzeuge zum Beweisen, dass Lösungen entweder in gegebenen kompakten Teilmengen bleiben oder aus solchen Teilmengen entkommen. Dies kann schwierig sein, wenn man die Gleichung nicht explizit lösen kann, aber oft ist es möglich, die Gleichung mit einer anderen Gleichung zu vergleichen, die explizit lösbar ist.

In diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige Funktionen, also $\mathcal{U}$ ist eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^2 \ni (t, x)$, und $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige und bzgl. x lokal Lipschitz-stetige Funktion. Für gegebene Konstanten $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{13}$$

Definition 5.1. Eine differenzierbare Funktion $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ mit $t_+ \in (t_0, \infty]$ heißt eine **Oberfunktion** für das Anfangswertproblem (13), falls sie

$$\dot{x}(t) \geq F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+) \qquad \text{und} \qquad x(t_0) \geq x_0$$

erfüllt, und x heißt eine **Unterfunktion**, falls sie

$$\dot{x}(t) \leq F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+) \qquad \text{und} \qquad x(t_0) \leq x_0$$

erfüllt. Analog heißt eine differenzierbare Funktion $x : (t_-, t_0] \to \mathbb{R}$ mit $t_- \in [-\infty, t_0)$ eine **Oberfunktion** für (13), falls sie

$$\dot{x}(t) \le F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_0] \qquad \text{und} \qquad x(t_0) \ge x_0$$

erfüllt, und x heißt eine **Unterfunktion**, falls sie

$$\dot{x}(t) \ge F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_0] \qquad \text{und} \qquad x(t_0) \le x_0$$

erfüllt. Man sagt auch **strenge Oberfunktion** oder **strenge Unterfunktion**, falls die entsprechende Ungleichung für $\dot{x}(t)$ streng ist bei $t \neq t_0$, d.h. $\dot{x}(t) > F(t, x(t))$ bzw. $\dot{x}(t) < F(t, x(t))$.

Bemerkung 5.2. Die Terminologie für Oberfunktionen und Unterfunktionen scheint in der Literatur nicht ganz standardisiert zu sein. Unsere Definition ist eine Variation auf [Wal00], der aber die Begriffe etwas enger definiert: bei Walter heißt $x(t)$ auf $[t_0, t_+)$ z.B. eine Oberfunktion für das Anfangswertproblem (13), falls

$$\dot{x}(t) > F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+) \qquad \text{und} \qquad x(t_0) \ge x_0,$$

also die Ungleichung für $\dot{x}(t)$ muss für alle t streng sein. In der Praxis begegnet man unserer schwächeren Version der Voraussetzungen öfter, aber Walters Version hat den Vorteil, dass Satz 5.3 unten dann auch ohne Lipschitz-Bedingung gültig ist.

Die umgekehrte Ungleichung bei $\dot{x}(t)$ im Fall $t \le t_0$ ist vielleicht gegen Intuition, aber der Sinn dieser Definition liegt im folgenden Resultat.

Satz 5.3. *Sei I das Intervall $[t_0, t_+)$ oder $(t_-, t_0]$ mit entweder $t_+ \in (t_0, \infty]$ oder $t_- \in [-\infty, t_0)$, und sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung zum Anfangswertproblem* (13)*.*

- *Ist $x : I \to \mathbb{R}$ eine Oberfunktion für* (13)*, dann gilt*

$$x(t) \ge y(t) \quad \textit{für alle} \quad t \in I.$$

- *Ist $x : I \to \mathbb{R}$ eine Unterfunktion für* (13)*, dann gilt*

$$x(t) \le y(t) \quad \textit{für alle} \quad t \in I.$$

Ferner: ist x eine strenge Ober- bzw. Unterfunktion, dann gibt es eine entsprechend strenge Ungleichung $x(t) > y(t)$ bzw. $x(t) < y(t)$ für alle $t \in I \setminus \{t_0\}$.

Beweis. Wir betrachten zuerst eine strenge Oberfunktion $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ mit der stärkeren Annahme, dass die strenge Ungleichung $\dot{x}(t) > F(t, x(t))$ auch für $t = t_0$ gilt. Gilt $x(t_0) > x_0 = y(t_0)$, dann existiert wegen Stetigkeit ein $\epsilon > 0$, so dass $x(t) > y(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ gilt. Im anderen Fall müssen $x(t_0)$ und $y(t_0)$ gleich sein, aber dann gilt

$$\dot{x}(t_0) > F(t_0, x(t_0)) = F(t_0, y(t_0)) = \dot{y}(t_0),$$

also die Funktion $z(t) := x(t) - y(t)$ hat $z(t_0) = 0$ und $\dot{z}(t_0) > 0$, mit der Folge, dass $z(t) > 0$ für t in einem Intervall der Form $(t_0, t_0 + \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ gelten muss. In beiden Fällen gilt $x(t) > y(t)$ für alle $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$.

Wenn nun $x(t) > y(t)$ nicht für alle $t \in (t_0, t_+)$ gilt, dann muss

$$t_1 := \inf \left\{ t \in [t_0, t_+) \;\middle|\; x(t) \le y(t) \right\}$$

im Intervall $[t_0 + \epsilon, t_+)$ liegen, und wegen Stetigkeit muss $x(t_1) = y(t_1)$ gelten. Aber dann gilt

$$\dot{x}(t_1) > F(t_1, x(t_1)) = F(t_1, y(t_1)) = \dot{y}(t_1),$$

also $z(t_1) = 0$ und $\dot{z}(t_1) > 0$, was impliziert, dass $z(t)$ für alle t in einem Intervall der Form $(t_1 - \delta, t_1)$ mit $\delta > 0$ *negativ* ist. Das widerspricht die Definition von t_1.[3]

Wenn $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ eine Oberfunktion aber nicht unbedingt eine *strenge* Oberfunktion ist, dann lässt sich die Ungleichung $x(t) \ge y(t)$ vom strengen Fall durch Approximation folgern. Sei nämlich $y_\epsilon : I_\epsilon \to \mathbb{R}$ für $\epsilon \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung zum parameterabhängigen Anfangswertproblem

$$\dot{y}_\epsilon(t) = F(t, y_\epsilon(t)) - \epsilon, \qquad y_\epsilon(t_0) = x_0. \tag{14}$$

Für jedes $t \in (t_0, t_+)$ folgt nun vom Satz über stetige Abhängigkeit von Parametern, dass t für hinreichend kleines $|\epsilon|$ in I_ϵ liegt und $\lim_{\epsilon \to 0} y_\epsilon(t) = y(t)$. Für $\epsilon > 0$ gilt nun $\dot{x}(t) \ge F(t, x(t)) > F(t, x(t)) - \epsilon$, also erfüllt x die Voraussetzungen im ersten Schritt dieses Beweises bzgl. des Problems (14), und daher gilt $x(t) > y_\epsilon(t)$. Wegen der Konverngenz $y_\epsilon(t) \to y(t)$ bei $\epsilon \to 0^+$ folgt $x(t) \ge y(t)$.

Falls $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}$ eine strenge Oberfunktion mit $\dot{x}(t_0) = F(t, x(t_0))$ ist, dann wissen wir inzwischen vom nicht strengen Fall, dass $x(t) \ge y(t)$ für alle $t \in [t_0, t_+)$ gilt, also könnte man jetzt $t_1 \in (t_0, t_+)$ wählen und x als strenge Oberfunktion für das Problem mit Anfangsbedingung $x(t_1) = y(t_1)$ betrachten. Der erste Schritt in diesem Beweis impliziert dann $x(t) > y(t)$ für alle $t \in (t_1, t_+)$, und da t_1 beliebig war, gilt das nun für alle $t \in (t_0, t_+)$. Somit ist der Fall von Oberfunktionen auf $[t_0, t_+)$ bewiesen.

Im Fall einer Oberfunktion auf $(t_-, t_0]$ geht das Argument analog; wir führen hier nur den ersten Schritt aus. Angenommen sei $\dot{x}(t) < F(t, x(t))$ für alle $t \in (t_-, t_0]$ und $x(t_0) \ge x_0$. Falls $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$ gilt, dann gilt auch

$$\dot{x}(t_0) < F(t_0, x(t_0)) = F(t_0, y(t_0)) = \dot{y}(t_0),$$

und es folgt $x(t) > y(t)$ für alle t in einem Intervall der Form $(t_0 - \epsilon, t_0)$ mit $\epsilon > 0$. Wegen Stetigkeit gilt das für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ auch im Fall $x(t_0) > x_0 = y(t_0)$. Wenn $x(t) > y(t)$ nicht für alle $t \in (t_-, t_0)$ gilt, dann muss

$$t_1 := \sup \left\{ t \in (t_-, t_0] \;\middle|\; x(t) \le y(t) \right\}$$

im Intervall $(t_-, t_0 - \epsilon]$ liegen, und wegen Stetigkeit gilt $x(t_1) = y(t_1)$, aber dann gilt auch

$$\dot{x}(t_1) < F(t_1, x(t_1)) = F(t_1, y(t_1)) = \dot{y}(t_1).$$

Also muss dann $x(t) < y(t)$ für alle t in einem Intervall der Form $(t_1, t_1 + \delta)$ mit $\delta > 0$ gelten, was die Definition von t_1 widerspricht.

Der Rest des Beweises (inklusiv der Fall einer Unterfunktion) geht völlig analog und wir lassen es als Übungsaufgabe. $\square$

[3] Es sei darauf hingewiesen, dass wir bis zu diesem Punkt im Beweis keine Lipschitz-Bedingung für F gebraucht haben. Die Lipschitz-Bedingung wird im nächsten Schritt benötigt, wo wir stetige Abhängigkeit von Parametern verwenden müssen.

Beispiel 5.4. Sei $x : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung zum Anfangswertproblem[4]

$$\dot{x}(t) = t^2 + [x(t)]^2, \quad x(0) = 1.$$

Auch wenn wir diese Gleichung nicht explizit lösen können, ist es trotzdem möglich, einige Eigenschaften von x zu folgern, indem man x mit den maximalen Lösungen $y : J \to \mathbb{R}$ und $z : K \to \mathbb{R}$ zu den zwei Anfangswertproblemen

$$\dot{y}(t) = [y(t)]^2, \quad y(0) = 1 \tag{15}$$

und

$$\dot{z}(t) = [z(t)]^2 + 1, \quad z(0) = 1 \tag{16}$$

vergleicht. Diese Probleme sind beide durch Trennung der Variablen explizit lösbar: es gilt nämlich

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad J = (-\infty, 1), \qquad \text{und} \qquad z(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad K = \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Für alle $t \in (t_-, t_+)$ gilt $\dot{x}(t) \geq [x(t)]^2$ und es gilt auch $\dot{x}(t) > [x(t)]^2$ für $t \neq 0$, also ist x eine strenge Oberfunktion für (15) bei $t \geq 0$ und eine strenge Unterfunktion bei $t \leq 0$. Es folgt,

$$x(t) > y(t) \quad \text{für alle } t \in (0, t_+) \cap J.$$

Wegen $\lim_{t \to 1^-} y(t) = \infty$ folgt, dass die Lösung $x(t)$ für $t > 0$ nicht weiter als $t = 1$ existieren kann, d.h. $t_+ \leq 1$. Aus diesem Grund wissen wir jetzt auch $t^2 < 1$ für alle $t \in [0, t_+)$, also folgt $\dot{x}(t) < [x(t)]^2 + 1$, und x ist daher eine strenge Unterfunktion für (16) auf $[0, t_+)$. Es folgt,

$$x(t) < z(t) \quad \text{für alle } t \in (0, t_+) \cap K.$$

Wegen Satz 4.1 impliziert das $t_+ \geq \pi/4$, denn sonst wäre jetzt $(t, x(t))$ bei $t \to t_+$ beschränkt und könnte nicht aus allen kompakten Teilmengen entkommen. Wir fassen das Ergebnis zusammen: die maximale Lösung $x(t)$ ist auf einem Intervall (t_-, t_+) mit $t_- < 0$ und

$$\pi/4 \leq t_+ \leq 1$$

definiert, und es gilt

$$\frac{1}{1-t} < x(t) < \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{für alle } t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

und

$$\frac{1}{1-t} < x(t) \quad \text{für alle } t \in [\pi/4, t_+).$$

6 Das Lemma von Grönwall

Die Grönwall-Ungleichung ist eine Anwendung von Unterfunktionen, wobei man eine gegebene Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ mit einer Linearen vergleicht. Das allgemeine lineare Anfangswertproblem auf $\mathbb{R}$ sieht wie folgt aus: gegeben ist eine stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$

[4] Beispiel 5.4 wurde wegen Zeitmangels aus der Vorlesung weggelassen, aber ein Anwendungsbeispiel für Oberfunktionen kam schon (ohne diese Terminologie zu verwenden) in Aufgabe 2.4 auf Übungsblatt 2 vor.

auf einer offenen Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$, sowie Punkte $t_0 \in J$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, und wir suchen nach Funktionen $x : I \to \mathbb{R}$, die

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{17}$$

erfüllen. Dieses Problem ist explizit lösbar, zumindest insofern man Formeln mit Integralen für "explizit" hält:[5] eine Lösung kann in der Form

$$x : J \to \mathbb{R}, \qquad x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t f(s)\,ds}. \tag{18}$$

geschrieben werden. Da die Funktion $F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto f(t)x$ offensichtlich eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x erfüllt, ist diese Lösung auch die Einzige, und sie ist definiert auf dem maximalen Intervall.

Das Problem (17) ist äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)x(s)\,ds.$$

Beim Lemma von Grönwall geht es darum, was gefolgert werden kann, wenn statt dieser Integralgleichung eine Ungleichung gegeben ist.

Lemma 6.1 (Grönwall-Ungleichung)**.** *Seien $f : I \to [0,\infty)$ und $u : I \to [0,\infty)$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, und $c \geq 0$ eine Konstante, so dass die Ungleichung*

$$u(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds \right|$$

für alle $t \in I$ erfüllt wird. Dann gilt auch

$$u(t) \leq c e^{\left|\int_{t_0}^t f(s)\,ds\right|} \quad \textit{für alle} \quad t \in I.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Das Integral $\int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds$ ist dann nichtnegativ, also erfüllt die Funktion $v(t) := c + \int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds$ für $t \geq t_0$ die Ungleichung $u(t) \leq v(t)$. Außerdem ist v differenzierbar, mit

$$\dot{v}(t) = f(t)u(t) \leq f(t)v(t),$$

da $f(t) \geq 0$. Damit ist v für $t \geq t_0$ eine Unterfunktion für das Problem $\dot{y}(t) = f(t)y(t)$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = c$, also Satz 5.3 impliziert

$$v(t) \leq y(t) = c e^{\int_{t_0}^t f(s)\,ds},$$

und das Resultat folgt nun von $u(t) \leq v(t)$.

Im Fall $t < t_0$ gilt $\left|\int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds\right| = -\int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds$, also definieren wir $v(t) := c - \int_{t_0}^t f(s)u(s)\,ds$. Dann gilt wieder $u(t) \leq v(t)$, und

$$\dot{v}(t) = -f(t)u(t) \geq -f(t)v(t),$$

[5] Man kann es so betrachten: egal, ob man das Integral in (18) explizit berechnen kann, ist es für einen Computer ziemlich einfach, durch Riemannsche Summen das Integral für jedes gegebene $t \in J$ beliebig gut numerisch zu approximieren, also kann die Lösung des linearen Anfangswertproblems (17) auch beliebig gut numerisch approximiert werden.

also v ist eine Unterfunktion für das Problem $\dot{y}(t) = -f(t)y(t)$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = c$, und aus Satz 5.3 folgt,

$$v(t) \le y(t) = ce^{-\int_{t_0}^t f(s)\,ds} = ce^{\left|\int_{t_0}^t f(s)\,ds\right|},$$

und daher wieder $u(t) \le v(t) \le y(t)$. □

Für Differentialgleichungssysteme mit einer Lipschitz-Bedingung wissen wir schon vom Satz über stetige Abhängigkeit (Satz 3.1): falls $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit naheliegenden Anfangswerten $\mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{y}(t_0)$ sind, dann können $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ für gegebenes $t \in I$ auch nicht beliebig weit von einander sein. Mit der Grönwall-Ungleichung sind wir jetzt in der Lage, eine quantitative Version dieser Aussage zu beweisen.[6]

Satz 6.2. *Sei $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Bedingung*

$$\|F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \textit{für alle} \quad (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}$$

für eine Konstante $C > 0$. Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x})$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, dann gilt

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \le e^{C|t-t_0|}\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| \quad \textit{für alle} \quad t \in I.$$

Beweis. Wir schreiben $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{y}_0 := \mathbf{y}(t_0)$. Die Lösungen $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ erfüllen die Integralgleichungen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}(s))\,ds, \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{y}(s))\,ds$$

für jedes $t \in I$, also folgt

$$\begin{aligned} u(t) := \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| &\le \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + \left\| \int_{t_0}^t \left[F(s, \mathbf{x}(s)) - F(s, \mathbf{y}(s))\right]\,ds \right\| \\ &\le \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + \left| \int_{t_0}^t C\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\|\,ds \right| = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + \left| \int_{t_0}^t Cu(s)\,ds \right|. \end{aligned}$$

Dies impliziert wegen der Grönwall-Ungleichung das gewünschte Resultat. □

Bemerkung 6.3. Die Anwendbarkeit von Satz 6.2 ist dadurch beschränkt, dass man eine globale Lipschitz-Bedingung auf dem ganzen Bereich $\mathcal{U}$ braucht. Falls $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ nur *lokal* Lipschitz-stetig bzgl. $\mathbf{x}$ ist, muss man im Allgemeinen zuerst $\mathcal{U}$ mit einer kleineren offene Teilmenge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ ersetzen, auf der man eine Lipschitz-Konstante $C > 0$ feststellen kann, und dann *nur* Lösungen $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ betrachten, die $(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathcal{U}_0$ für alle $t \in I$ erfüllen, d.h. sie fangen in $\mathcal{U}_0$ an und entkommen für $t \in I$ nicht daraus. Andererseits ist es im Fall einer lokalen Lipschitz-Bedingung auch immer so, dass für jedes kompakte Intervall $[t_-, t_+] \subset I$, die Mengen $\{(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathcal{U} \mid t \in [t_-, t_+]\}$ und $\{(t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U} \mid t \in [t_-, t_+]\}$ enthalten in einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathcal{U}$ sind, auf der eine Lipschitz-Bedingungen bzgl. $\mathbf{x}$ erfüllt wird,[7] also gilt der Satz auf jeden Fall für Lösungen auf kompakten Intervallen $[t_-, t_+]$ mit irgendeiner Konstante $C > 0$, die im Allgemeinen von der Wahl von t_- und t_+ abhängen kann.

[6] Satz 6.2 ist für unsere Weiterentwicklung der Theorie von Differentialgleichungen unwesentlich und wurde deswegen in der Vorlesung übersprungen. Ein Anwendungsbeispiel für die Grönwall-Ungleichung finden Sie sowieso im nächsten Abschnitt über lineare Differentialgleichungen.

[7] Übungsaufgabe: Eine lokal Lipschitz-stetige Funktion ist auf jeder kompakten Teilmenge K Lipschitz-stetig.

7 Lineare Systeme

Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t))$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **linear**, wenn für jedes t die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto F(t, \mathbf{x})$ linear ist. In diesem Fall muss F immer die Form $F(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ für eine matrixwertige Funktion $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ auf einer offenen Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ haben, und der Definitionsbereich von F ist $\mathcal{U} := J \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir betrachten also ein Anfangswertproblem der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{19}$$

wobei $t_0 \in J$ und $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Es wird natürlich immer angenommen, dass $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stetige Funktion ist, und da wir immer *Intervalle* als Definitionsbereiche von Lösungen $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ betrachten, darf hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch angenommen werden, dass $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Die Differentialgleichung in (19) lässt sich auch in der Form

$$(\partial_t - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0 \tag{20}$$

schreiben, wobei man sowohl die Ableitung ∂_t als auch die matrixwertige Funktion $\mathbf{A}$ als lineare Operatoren auf einem Raum von Funktionen $\mathbf{x}$ der Variablen $t \in J$ betrachten kann; die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist selbstverständlich linear, und ∂_t ist es auch wegen der üblichen Rechenregeln für Ableitungen (Summenregel usw.). Auf diese Weise sieht man, dass für zwei Lösungen $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ einer linearen Differentialgleichung auf dem selben Definitionsintervall $I \subset \mathbb{R}^n$, beliebige lineare Kombinationen $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten) auch Lösungen sind; in anderen Worten, der Raum aller Lösungen einer linearen Differentialgleichung ist ein Vektorraum. Anders als die meisten aus Funktionen bestehenden Vektorräume, werden wir sehen, dass dieser Vektorraum immer endlich-dimensional ist.

Eine Variation auf (20) ist die Gleichung

$$(\partial_t - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{w} \tag{21}$$

für eine gegebene Funktion $\mathbf{w} : J \to \mathbb{R}^n$; in Analogie mit (19) lässt sich das Anfangswertproblem nun in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{22}$$

schreiben. Diese Gleichung sollte nicht "linear" genannt werden, denn z.B. ihr Lösungsraum ist im Allgemeinen kein Vektorraum, aber trotzdem wird (21) als **lineare inhomogene** Differentialgleichung bezeichnet. Um dies von (20) zu unterscheiden, nennt man (20) auch eine **lineare homogene** Differentialgleichung. Man kann die homogene Gleichung als Spezialfall der inhomogenen Gleichung mit $\mathbf{w} \equiv 0$ betrachten.

Wie schon im vorherigen Abschnitt bemerkt ist der homogene Fall mit $n = 1$ explizit lösbar. Explizite Lösungen sind auch möglich für **autonome** lineare homogene Systeme mit $n > 1$, d.h. wenn $\mathbf{w} \equiv 0$ und die matrixwertige Funktion $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstant ist: in diesem Fall ist die eindeutige Lösung zum Problem (19) durch das Matrixexponential gegeben:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}_0.$$

Wenn $\mathbf{A}(t)$ keine konstante Funktion von t ist, ist es nicht mehr so einfach, explizite Lösungen hinzuschreiben. Der offensichtliche Kandidat $\mathbf{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(s)\, ds}\mathbf{x}_0$ geht nur, wenn die Matrizen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{A}(t')$ für verschiedene $t, t' \in J$ alle kommutieren, was im Allgemeinen natürlich nicht stimmt. Trotzdem ist es inzwischen nicht schwierig, einige allgemeine qualitative Aussagen über Lösungen von linearen Systemen zu beweisen.

Satz 7.1. *Für ein gegebenes offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$, stetige Funktionen $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{w} : J \to \mathbb{R}^n$ und Konstanten $t_0 \in J$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ hat das lineare inhomogene Anfangswertproblem* (22) *eine eindeutige maximale Lösung $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$, und sie erfüllt*

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\|\mathbf{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right|\right) e^{\left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(s)\|\, ds\right|} \tag{23}$$

für alle $t \in J$.

Beweis. Die Funktion $F(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}(t) + \mathbf{w}(t)\mathbf{x}$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. $\mathbf{x}$, denn

$$\big\| \left[\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{w}(t)\right] - \left[\mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{w}(t)\right] \big\| \leq \|\mathbf{A}(t)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

und $\|\mathbf{A}(t)\|$ hängt stetig von t ab. Damit folgt die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Betrachten wir nun die maximale Lösung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$. Für jedes $t \in I$ gilt die Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \left[\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{w}(s)\right] ds,$$

und daher

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right| + \left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\|\, ds\right|.$$

Wählen wir ein beliebiges $t_1 \in I$, dann gilt $\left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right|$ für alle t im Intervall zwischen t_0 und t_1, also können wir $c := \|\mathbf{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right|$ als Konstante betrachten und für $t \in [t_0, t_1]$ bzw. $[t_1, t_0]$ die obige Ungleichung mit

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq c + \left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\|\, ds\right|.$$

ersetzen. Damit impliziert die Grönwall-Ungleichung

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq c e^{\left|\int_{t_0}^t \|\mathbf{A}(s)\|\, ds\right|}$$

für alle t zwischen t_0 und t_1, und bei $t = t_1$ ist das genau (23).

Noch zu zeigen ist, dass das maximale Definitionsintervall $I = (t_-, t_+)$ für $\mathbf{x}$ eigentlich J ist, d.h. es muss ausgeschlossen werden, dass t_- oder t_+ eine endliche Zahl in J ist. Wenn $t_+ \in J$, dann sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{w}$ auf dem kompakten Intervall $[t_0, t_+]$ definiert und stetig, also beschränkt. Dann impliziert die Abschätzung (23)

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M := \left(\|\mathbf{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t_+} \|\mathbf{w}(s)\|\, ds\right|\right) e^{\left|\int_{t_0}^{t_+} \|\mathbf{A}(s)\|\, ds\right|}$$

für alle $t \in [t_0, t_+)$, aber das widerspricht Satz 4.1, der an dieser Stelle implizieren müsste, dass $(t, \mathbf{x}(t))$ für alle t in irgendeinem Intervall der Form (t_*, t_+) nicht in der kompakten Teilmenge $\{(t, \mathbf{x}) \in J \times \mathbb{R}^n \mid t \in [t_0, t_+],\ \|\mathbf{x}\| \leq M\} \subset \mathcal{U}$ liegen darf. Analog findet man im Fall $t_- \in J$ einen Widerspruch, also gilt $(t_-, t_+) = J$. $\square$

Korollar 7.2. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Die Menge V aller maximalen Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ ist dann ein n-dimensionaler linearer Unterraum im Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen $J \to \mathbb{R}^n$, und für jedes $t \in J$ ist die Abbildung*

$$V \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t) \tag{24}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Wenn $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ erfüllt, dann ist $\mathbf{x}$ auch stetig differenzierbar, denn die rechte Seite der Gleichung ist stetig. Die Existenz von Lösungen zum Anfangswertproblem impliziert, dass die beschriebene Abbildung $V \to \mathbb{R}^n$ surjektiv ist, und sie ist wegen Eindeutigkeit auch injektiv. □

Der Isomorphismus (24) impliziert, dass linear unabhängige Lösungen zu einer linearen homogenen Differentialgleichung auch linear unabhängige Werte in jedem Punkt $t \in J$ haben. Lass uns etwas weiter ausführen, was das bedeutet. So wie in jedem Vektorraum, eine Menge von stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *linear abhängig*, falls es Konstanten $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle 0 sind und $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = 0$ erfüllen. Da die Elemente $\mathbf{x}_j$ alle *Funktionen* von der Variablen $t \in J$ sind, ist die lineare Kombination $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$ auch eine Funktion von t, und aus linearer Abhängigkeit folgt, dass diese Funktion überall verschwindet:

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + c_k\mathbf{x}_k(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in J. \tag{25}$$

Es sollte hierbei betont werden, dass die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$ keine Funktionen von t sondern Konstanten sind. Es ist für beliebige Funktionen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k : J \to \mathbb{R}^n$ z.B. nicht wahr, dass lineare Abhängigkeit der Werte $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$ in einem gegebenen Punkt $t \in J$ die lineare Abhängigkeit der Funktionen im Raum von Funktionen impliziert; die Relation (25) könnte für ein bestimmtes $t \in J$ gelten, ohne dass sie für jedes $t \in J$ gilt. Aber die Situation sieht anders aus, wenn $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ nicht beliebige Funktionen sondern Lösungen einer linearen Differentialgleichung sind, denn $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$ ist dann auch eine Lösung der Gleichung, und Lösungen können nicht in einem Punkt $t \in J$ verschwinden, ohne überall zu verschwinden—das folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen zum Anfangswertproblem, denn $\mathbf{x}(t) = 0$ ist nämlich auch eine Lösung. Diese Argument beweist:

Korollar 7.3. *Sind $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k : J \to \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Lösungen zur linearen homogenen Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, dann gilt: für jedes $t \in J$ sind die Vektoren $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.* □

Ein n-Tupel $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ von linear unabhängigen maximalen Lösungen zur linearen homogenen Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$ heißt ein **Fundamentalsystem** für diese Gleichung. Tut man sie zusammen als Spalten einer Matrix

$$\mathbf{\Phi}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{pmatrix},$$

so heißt die matrixwertige Funktion $\mathbf{\Phi} : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine **Fundamentalmatrix**. Sie ist auch eine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung, nämlich

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t); \tag{26}$$

genau gesagt ist das als System von n^2 linearen Differentialgleichungen zu verstehen, wobei man $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiert. Insofern folgt die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen auf $J \subset \mathbb{R}$ zum Anfangswertproblem für die Gleichung (26) direkt aus Satz 7.1. Eine Fundamentalmatrix heißt die **Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt** $t_0 \in J$, wenn sie eine Anfangsbedingung bei $t = t_0$ mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Anfangswert erfüllt:

$$\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beispiel 7.4. Für das autonome System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ gegeben durch eine feste Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathbf{\Phi}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}$.

Satz 7.5. *Die eindeutige maximale Lösung zum linearen homogenen Anfangswertproblem* (19) *ist gegeben durch*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0,$$

wobei $\mathbf{\Phi} : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt* t_0 *bezeichnet.*

Beweis. Man berechnet: $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbb{1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$. □

Als Konsequenz von Korollar 7.3 ist eine Fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eines linearen Differentialgleichungssystems invertierbar für alle $t \in J$. Anders gesagt, wenn $\mathbf{\Phi} : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ die lineare Differentialgleichung $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$ erfüllt und $\mathbf{\Phi}(t_0)$ für irgendein $t_0 \in J$ in der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ liegt, dann bleibt $\mathbf{\Phi}(t)$ für alle $t \in J$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Diese etwas überraschende Tatsache kann man auch durch die sogenannte **Wronski-Determinante**

$$W_{\mathbf{\Phi}}(t) := \mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t) \in \mathbb{R}$$

beweisen. Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Tr}\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}$$

die Spur einer Matrix $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Lemma 7.6. *Sei* $\mathbf{\Psi} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine differenzierbare Funktion mit* $\mathbf{\Psi}(0) = \mathbb{1}$. *Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t)\bigg|_{t=0} = \mathrm{Tr}\dot{\mathbf{\Phi}}(0).$$

Beweis. Bezeichne mit $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und mit $\mathbf{v}_i(t) = (v_i^1(t), \dots, v_i^n(t) \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \dots, n$ die Spalten von $\mathbf{\Psi}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also gilt $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{e}_i$. Die Abbildung

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R} : (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}$$

ist multilinear, also gilt laut [Bau12, Beispiel 3 auf S. 186–187]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1(t) & \cdots & \mathbf{v}_n(t)\end{pmatrix}\bigg|_{t=0} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{v}}_1(0) & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \dot{\mathbf{v}}_2(0) & \dots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix} \\ &+ \dots + \mathrm{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} & \dot{\mathbf{v}}_n(0)\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \dot{v}_i^i(0) = \mathrm{Tr}\dot{\mathbf{\Phi}}(0).\end{aligned}$$

□

Dieses Lemma ermöglicht das genaue Berechnen der Wronski-Determinante, auch wenn keine genaue Formel für eine Fundamentalmatrix bekannt ist. Für ein beliebiges $t \in J$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{\mathbf{\Phi}}(t) &= \frac{d}{ds}\mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t+s)\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\mathrm{Det}\left[\mathbf{\Phi}(t+s)\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{\Phi}(t)\right]\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(\mathrm{Det}\left[\mathbf{\Phi}(t+s)\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\right]\cdot \mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t)\right)\bigg|_{s=0} = \mathrm{Tr}\left[\dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\right]\cdot \mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t) \\
&= \mathrm{Tr}\left[\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(t)^{-1}\right]\cdot W_{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathrm{Tr}\mathbf{A}(t)\cdot W_{\mathbf{\Phi}}(t),
\end{aligned}$$

das heißt, $W_{\mathbf{\Phi}}(t)$ erfüllt eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{W}_{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathrm{Tr}\mathbf{A}(t)\cdot W_{\mathbf{\Phi}}(t). \tag{27}$$

Wegen Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems kann eine Lösung dieser Gleichung nur in einem gegebenen Punkt $t \in J$ verschwinden, wenn sie auch überall verschwindet. Damit haben wir also eine neue Erklärung dafür, dass die Fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ für alle $t \in J$ invertierbar ist, aber jetzt haben wir etwas mehr: (27) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für eine reellwertige Funktion, und solche Gleichungen sind explizit lösbar.

Satz 7.7. *Sei $\mathbf{\Phi} : J \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare Gleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ gegeben durch eine stetige Funktion $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$, und sei $t_0 \in J$. Dann ist die Wronski-Determinante $W_{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathrm{Det}\mathbf{\Phi}(t)$ gegeben durch*

$$W_{\mathbf{\Phi}}(t) = W_{\mathbf{\Phi}}(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}\mathbf{A}(s)\,ds}.$$

Insbesondere gilt $W_{\mathbf{\Phi}}(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}\mathbf{A}(s)\,ds}$, falls $\mathbf{\Phi}(t)$ die Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt t_0 ist. □

Noch ein abschließendes Wort zum *inhomogenen* Fall: die Lösungsmenge für eine lineare inhomogene Differentialgleichung ist im Allgemeinen kein Vektorraum, sondern ein affiner Raum.

Satz 7.8. *Für ein gegebenes offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $\mathbf{A} : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{w} : J \to \mathbb{R}^n$, bezeichne mit V bzw. $V_{\mathbf{w}}$ die Mengen aller Lösungen zur linearen homogenen bzw. inhomogenen Differentialgleichung*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t).$$

Dann bestimmt jedes Element $\mathbf{x}_0 \in V_{\mathbf{w}}$ eine Bijektion

$$V \to V_{\mathbf{w}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_0 + \mathbf{x},$$

also hat $V_{\mathbf{w}}$ die Struktur eines n-dimensionalen affinen Raums.

Beweis. Die Aussage folgt im Wesentlichen aus der Beobachtung, dass für eine gegebene Lösung $\mathbf{x}$ zur inhomogenen Gleichung, eine zweite Funktion $\mathbf{y}$ genau dann eine Lösung zur inhomogenen Gleichung ist, wenn $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ eine Lösung zur homogenen Gleichung ist. □

8 Differenzierbare Abhängigkeit

Wir kommen jetzt zum Thema Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern zurück. Wir betrachten ein parameterabhängiges Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist nochmal eine offene Teilmenge und $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \mapsto F(\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) =: F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ eine stetige und bzgl. $\mathbf{x}$ lokal Lipschitz-stetige Funktion. Der Fluss des Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ definiert eine Abbildung

$$\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n : (\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) =: \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y}) \tag{28}$$

auf einer Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und aus Satz 3.1 wissen wir, dass $\mathcal{V}$ offen und φ stetig ist.

Wenn $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ nicht nur Lipschitz-stetig sondern auch von der Klasse C^k für $k \in \mathbb{N}$ ist, dann ist einfach zu sehen, dass Lösungen $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ zur Gleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ immer von der Klasse C^{k+1} sind. Tatsächlich, wenn die Funktion $\mathbf{x}$ differenzierbar ist, dann ist sie auch stetig, folglich ist $t \mapsto F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ stetig, was $\mathbf{x}$ stetig differenzierbar macht. Aber wenn F auch von der Klasse C^1 ist, dann folgt, dass $t \mapsto F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ von der Klasse C^1 ist, und folglich ist $\dot{\mathbf{x}}$ von der Klasse C^1 und $\mathbf{x}$ selber von der Klasse C^2. Dieses Argument lässt sich beliebig oft wiederholen, solange F oft genug differenzierbar ist, und auf diese Weise sind die höheren Ableitungen der Flussabbildung (28) nach t nicht schwierig zu verstehen.

Wir möchten jetzt verstehen, inwieweit die Flussabbildung (28) auch als Funktion von den anderen Variablen differenzierbar ist, vor allem vom Anfangswert $\mathbf{y}$ und Parameter $\mathbf{p}$. Das Hauptresultat lautet:

Satz 8.1. *Ist $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^k für $k \in \mathbb{N}$, dann ist die Flussabbildung* (28) *auch von der Klasse C^k. Insbesondere ist der Fluss glatt, falls F glatt ist.*

Wir betrachten zuerst eine etwas vereinfachte Situation, bei der der Parameter weggelassen und die Anfangszeit fixiert wird. Gegeben sind also eine Konstante $\tau \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wenn F in einem Punkt $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ differenzierbar ist, schreiben wir die Jacobi-Matrix in der Form

$$DF(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_t F(t, \mathbf{x}) & D_{\mathbf{x}} F(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_t F(t, \mathbf{x})$ eine Spalte und $D_{\mathbf{x}} F(t, \mathbf{x})$ eine $(n \times n)$-Matrix ist; anders gesagt, $D_{\mathbf{x}} F(t, \mathbf{x})$ bezeichnet das Differential der Funktion $\mathbf{x} \mapsto F(t, \mathbf{x})$, wobei t als konstanter Parameter betrachtet wird. Wir betrachten die vereinfachte Flussabbildung

$$\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi(t, \mathbf{y}) =: \varphi^t(\mathbf{y}), \tag{29}$$

deren Definitionsbereich $\mathcal{V}$ die Menge aller Punkte $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist, so dass $(\tau, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}$ und t im Definitionsintervall der maximalen Lösung zum Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}(t))$ mit $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}$ liegt; für diese Lösung gilt per Definition $\varphi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{x}(t)$. Die Notation $\varphi^t = \varphi(t, \cdot)$ erlaubt uns die Freiheit, φ entweder als Funktion von $(t, \mathbf{y})$ zu betrachten oder (wenn wir es mit $\mathbf{y} \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ bezeichnen) als parametrisierte Familie von Funktionen von $\mathbf{y}$, die auch vom Parameter t abhängen. Wenn φ im Punkt $(t, \mathbf{y})$ differenzierbar ist, dann hat ihre Jacobi-Matrix nun die Form

$$D\varphi(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \partial_t \varphi(t, \mathbf{y}) & D\varphi^t(\mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_t \varphi(t, \mathbf{y})$ eine Spalte und $D\varphi^t(\mathbf{y})$ eine $(n \times n)$-Matrix ist, nämlich die Jacobi-Matrix der Funtion $\mathbf{y} \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$.

Lemma 8.2. *Ist $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann ist die vereinfachte Flussabbildung (29) auch stetig differenzierbar, und $D\varphi^t(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für einen beliebigen Punkt $(t, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}$ ist gegeben durch die Matrix*

$$D\varphi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{\Phi_y}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

wobei $\mathbf{\Phi_y}(t)$ eindeutig durch das lineare Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{y}}(t) = D_{\mathbf{x}} F(t, \varphi^t(\mathbf{y}))\mathbf{\Phi_y}(t), \qquad \mathbf{\Phi_y}(\tau) = \mathbb{1} \tag{30}$$

bestimmt wird.

Beweis. Von Satz 3.1 wissen wir schon, dass (29) eine stetige Abbildung auf einer offenen Menge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist. Zu zeigen ist nun, dass alle partiellen Ableitungen dieser Abbildung existieren und stetig sind. Für die partielle Ableitung nach t folgt dies sofort von der Differentialgleichung: es gilt $\partial_t \varphi(t, \mathbf{y}) = F(t, \varphi(t, \mathbf{y}))$, wobei die rechte Seite eine Verknüpfung stetiger Abbildungen ist und daher stetig. Bei den partiellen Ableitungen in Richtungen in $\mathbb{R}^n$ wäre es äquivalent, zu zeigen, dass für jedes $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{V}$ die Abbildung $\mathbf{y} \mapsto \varphi^{t_0}(\mathbf{y})$ im Punkt $\mathbf{y}_0$ differenzierbar ist, und dass die Ableitung stetig von $(t_0, \mathbf{y}_0)$ abhängt. Die Stetigkeit dieser Ableitung wird zwar direkt aus der in der Aussage gegebenen Formel folgen, aus dem folgenden Grund. Sei $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ die offene Menge

$$\mathcal{U}' := \left\{ (\mathbf{y}, t, \mathbf{\Phi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times n} \;\middle|\; (t, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \right\},$$

und definiere eine stetige Funktion $G : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$G_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{\Phi}) := G(\mathbf{y}, t, \mathbf{\Phi}) := D_{\mathbf{x}} F(t, \varphi^t(\mathbf{y}))\mathbf{\Phi}.$$

Die lineare Differentialgleichung in (30) wird jetzt $\dot{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{y}}(t) = G_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{\Phi_y}(t))$, ist also als parameterabhängiges System zu betrachten mit $\mathbf{y}$ als Parameter. Da die Gleichung für jedes $\mathbf{y}$ linear ist, existieren Lösungen (laut Satz 7.1) immer für t im größtmöglichen Intervall, und $\mathbf{\Phi_y}(t)$ ist dann gegeben durch den Fluss dieses parameterabhängigen Systems mit $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als fester Anfangswert. Dieser Fluss ist laut Satz 3.1 stetig, also hängt $\mathbf{\Phi_y}(t)$ stetig von $(t, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}$ ab.

Um die Differenzierbarkeit in einem Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{V}$ und die gegebene Formel für $D\varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0)$ zu beweisen, betrachten wir nun einen naheliegenden Punkt $(t_0, \mathbf{y}_1) \in \mathcal{V}$, bezeichnen mit $\mathbf{x}_0(t)$ und $\mathbf{x}_1(t)$ die maximalen Lösungen zu den Anfangswertproblemen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0(t) &= F(t, \mathbf{x}_0(t)), \qquad & \mathbf{x}_0(\tau) &= \mathbf{y}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= F(t, \mathbf{x}_1(t)), \qquad & \mathbf{x}_1(\tau) &= \mathbf{y}_1, \end{aligned}$$

und definieren

$$\mathbf{v}(t) := \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t), \qquad \mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(\tau) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0.$$

Wenn $\mathbf{v}_0$ hinreichend klein ist, dürfen wir als Konsequenz von Satz 3.1 annehmen, dass $\mathbf{x}_1(t)$ für jedes t im Intervall zwischen τ und t_0 beliebig nahe an $\mathbf{x}_0(t)$ ist, also gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(t, \mathbf{x}_0(t) + s\mathbf{v}(t)) \in \mathcal{U} \quad \text{für alle} \quad s \in [0, 1].$$

Jetzt differenzieren wir $\mathbf{v}(t)$ und wenden die Integralform des Mittelwertsatzes (s. [Wen19]) an, die hier gültig ist, weil die Funktion $s \mapsto F(t, \mathbf{x}_0(t) + s\mathbf{v}(t))$ stetig differenzierbar ist:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(t) = F(t, \mathbf{x}_1(t)) - F(t, \mathbf{x}_0(t)) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} F(t, \mathbf{x}_0(t) + s\mathbf{v}(t))\, ds \\ = \int_0^1 D_{\mathbf{x}} F\big(t, \mathbf{x}_0(t) + s\mathbf{v}(t)\big)\mathbf{v}(t)\, ds &= \left(\int_0^1 D_{\mathbf{x}} F\big(t, \mathbf{x}_0(t) + s\mathbf{v}(t)\big)\, ds\right) \mathbf{v}(t).\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch als lineare Differentialgleichung für die Funktion $\mathbf{v}(t)$ ausdrücken: wir definieren für t im Intervall zwischen τ und t_0 und $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in einer kleinen Umgebung[8] von $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$ die matrixwertige Funktion

$$\mathbf{A}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t) := \int_0^1 D_{\mathbf{x}} F\big(t, (1-s)\varphi^t(\mathbf{y}) + s\varphi^t(\mathbf{y}')\big)\, ds \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

die als Anwendung des Satzes über parameterabhängige Integrale [Bau12, Satz 7.19] stetig sowohl von t als auch vom Parameter $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ abhängt. Dann erfüllt $\mathbf{v}(t)$ die Gleichung

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1}(t)\mathbf{v}(t).$$

Bezeichne mit $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t)$ die Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt τ für die durch $\mathbf{A}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t)$ bestimmte lineare Differentialgleichung, d.h. $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}$ ist die eindeutige $\mathbb{R}^{n\times n}$-wertige Funktion, die

$$\dot{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t)\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(\tau) = \mathbb{1}$$

erfüllt. Satz 7.1 garantiert, dass diese Lösung auf dem gleichen Intervall existiert, wo $\mathbf{A}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t)$ definiert ist, also existiert es insb. für alle t im Intervall zwischen τ und t_0, und wegen stetiger Abhängigkeit von Parametern (Satz 3.1) ist $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y},\mathbf{y}'}(t)$ auch eine stetige Funktion von $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$. Laut Satz 7.5 gilt nun $\mathbf{v}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1}(t)\mathbf{v}_0$, und da $\mathbf{x}_j(t) = \varphi^t(\mathbf{y}_j)$ für $j = 0, 1$ bedeutet das

$$\begin{aligned}\varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{v}_0) &= \varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1}(t_0)\mathbf{v}_0 \\ &= \varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t_0)\mathbf{v}_0 + [\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1}(t_0) - \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t_0)]\, \mathbf{v}_0 \\ &= \varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t_0)\mathbf{v}_0 + o(\|\mathbf{v}_0\|),\end{aligned}$$

was die Differenzierbarkeit der Funktion $\mathbf{y} \mapsto \varphi^{t_0}(\mathbf{y})$ im Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ impliziert, mit Ableitung

$$D\varphi^{t_0}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t_0).$$

Für $\mathbf{y} = \mathbf{y}' = \mathbf{y}_0$ gilt

$$\mathbf{A}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t) = \int_0^1 D_{\mathbf{x}} F\big(t, \varphi^t(\mathbf{y}_0)\big)\, ds = D_{\mathbf{x}} F\big(t, \varphi^t(\mathbf{y}_0)\big),$$

also ist $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t)$ per Definition die eindeutige Lösung zum Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t) = D_{\mathbf{x}} F\big(t, \varphi^t(\mathbf{y}_0)\big)\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(t), \qquad \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0}(\tau) = \mathbb{1}.$$

□

[8] Der Grund, warum $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ sich nur eingeschränkt in einer Umgebung von $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$ bewegen darf, ist dass wir sonst nicht sicher sein könnten, ob $\varphi^t(\mathbf{y})$ und $\varphi^t(\mathbf{y}')$ für alle t zwischen τ und t_0 wirklich definiert sind.

Beweis von Satz 8.1. Wir werden für jedes $k \in \mathbb{N}$ zwei Aussagen beweisen:

- *Aussage $A(k)$*: Ist die Funktion F in Lemma 8.2 von der Klasse C^k, dann ist die vereinfachte Flussabbildung (29) auch von der Klasse C^k.
- *Aussage $B(k)$*: Ist die Funktion F in Satz 8.1 von der Klasse C^k, dann ist die allgemeine Flussabbildung (28) auch von der Klasse C^k.

Hier geht es in Aussage $A(k)$ nur um die Differenzierbarkeit einer Flussabbildung bzgl. des Anfangswerts und t, während es in Aussage $B(k)$ auch um Differenzierbarkeit bzgl. der Anfangszeit τ und eines Parameters geht. Wir zeigen zuerst durch einen einfachen Trick, dass Aussage $B(k)$ aus Aussage $A(k)$ folgt.

Die Idee ist, der parameterabhängige Fluss (28) als vereinfachter Fluss für ein anderes Differentialgleichungssystem zu betrachten, das nicht in $\mathbb{R}^n$ sondern in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ definiert ist, so dass die Anfangszeit τ und Parameter $\mathbf{p}$ als zusätzliche Dimensionen erscheinen. In anderen Worten: wir möchten eine Funktion $\widehat{F}$ auf einer geeigneten offenen Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definieren, so dass Lösungen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{z}}(t) = \widehat{F}(t, \mathbf{z}(t))$ alle die Form

$$\mathbf{z}(t) = (\tau, \mathbf{p}, \mathbf{x}(\tau + t)) \tag{31}$$

haben, wobei $\tau \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ konstant sind und $\mathbf{x}(t)$ die Gleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$ erfüllt. Durch Differenzieren dieser Relation kann man leicht eine Funktion $\widehat{F}$ mit dieser Eigenschaft finden: wir definieren

$$\widehat{F} : \widehat{\mathcal{U}} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad \widehat{F}(t, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{x}) := (0, 0, F_{\mathbf{p}}(\tau + t, \mathbf{x}))$$

auf der offenen Teilmenge

$$\widehat{\mathcal{U}} := \big\{(t, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{x}) \;\big|\; (\mathbf{p}, \tau + t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}\big\} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n),$$

und bezeichnen mit

$$\widehat{\mathcal{V}} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (t, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \mapsto \widehat{\varphi}^t(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{y})$$

den vereinfachten Fluss des Systems $\dot{\mathbf{z}}(t) = \widehat{F}(t, \mathbf{z}(t))$ mit Anfangszeit $t = 0$, d.h. $\widehat{\varphi}^t(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}(t)$ für die eindeutige Lösung zu $\dot{\mathbf{z}}(t) = \widehat{F}(t, \mathbf{z}(t))$ mit $\mathbf{z}(0) = (\tau, \mathbf{p}, \mathbf{y})$, und $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ besteht aus allen $(t, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{y})$, so dass t im Definitionsintervall dieser Lösung liegt. Aus (31) folgt eine Relation zwischen $\widehat{\varphi}^t$ und der Fluss $\varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}$ des parameterabhängigen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t))$, nämlich

$$\widehat{\varphi}^t(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = (\tau, \mathbf{p}, \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})). \tag{32}$$

Jetzt nehmen wir an, dass Aussage $A(k)$ stimmt und die Funktion $(\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \mapsto F_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x})$ von der Klasse C^k ist. Dann ist $\widehat{F}$ auch eine C^k-Funktion, also impliziert Aussage $A(k)$, dass $(t, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \mapsto \widehat{\varphi}^t(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{y})$ ebenfalls von der Klasse C^k ist. Aus (32) folgt dann, dass $(\mathbf{p}, \tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi_{\mathbf{p}}^{\tau,t}(\mathbf{y})$ auch eine C^k-Funktion ist, also ist Aussage $B(k)$ bewiesen.

Lemma 8.2 impliziert Aussage $A(1)$, also argumentieren wir jetzt per Induktion und behaupten, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ Aussage $A(k+1)$ von Aussage $B(k)$ folgt. Angenommen, Aussage $B(k)$ stimmt und die Funktion $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n : (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ in Lemma 8.2 sei von der Klasse C^{k+1}. Dann ist F auch eine C^k-Funktion, also folgt von Aussage $B(k)$, dass die vereinfachte Flussabbildung $(t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ auch von der Klasse C^k ist. Ihre partielle

Ableitung nach t ist die Funktion $(t, \mathbf{y}) \mapsto F(t, \varphi^t(\mathbf{y}))$, was jetzt eine Verknüpfung von zwei C^k-Funktionen ist und ist daher ebenfalls eine C^k-Funktion. Zu zeigen ist noch, dass die partiellen Ableitungen von $(t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ nach den Richtungen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ auch C^k-Funktionen sind, denn daraus wird folgen, dass $(t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ von der Klasse C^{k+1} ist. Äquivalenterweise wollen wir beweisen, dass die Funktion $(t, \mathbf{y}) \mapsto D\varphi^t(\mathbf{y}) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ von der Klasse C^k ist. Lemma 8.2 gibt eine Formel für diese Ableitung als $D\varphi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}}(t)$, mit $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}}(t)$ eindeutig durch das Anfangswertproblem (30) bestimmt. Dies kann als parameterabhängiges Problem betrachtet werden mit $\mathbf{y}$ als Parameter, und da die Funktionen $(t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ und $D_{\mathbf{x}}F$ beide von der Klasse C^k sind, ist die Funktion

$$(\mathbf{y}, t, \mathbf{\Phi}) \mapsto D_{\mathbf{x}}F\big(t, \varphi^t(\mathbf{y})\big)\mathbf{\Phi},$$

die dieses parameterabhängige Anfangswertproblem bestimmt, auch von der Klasse C^k. Aus Aussage $B(k)$ folgt also, dass $(t, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}}(t)$ eine C^k-Funktion ist, und damit ist Aussage $A(k+1)$ bewiesen. □

Literatur

[Bau12] H. Baum, *Grundkurs Analysis* (2012). Skript zur Vorlesung Analysis I–III, verfügbar unter `http://www.math.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2019/Analysis2/Baum_Analysis-BA-WS11-Summe.pdf`.

[Brö92] T. Bröcker, *Analysis. III*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.

[Wal00] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7th ed., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2000. Eine Einführung.

[Wen19] C. Wendl, *Der Mittelwertsatz und die Taylorformel mit Integralrestglied* (2019). Skript zur Vorlesung Analysis II an der HU Berlin, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2019/Analysis2/TaylorIntegral.pdf`.