

## Inhaltsbeschreibung

### Allgemeine Informationen

**Lehrpersonen:** Prof. Chris Wendl (Vorlesung)  
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301  
wendl@math.hu-berlin.de  
Sprechstunde: Montags 14:00–15:00

Chun-Sheng Hsueh (Übung)  
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.302  
chun-sheng.hsueh@hu-berlin.de

**Website:** [www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2024/Diffgeo1/](http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2024/Diffgeo1/)

**Moodle:** <https://moodle.hu-berlin.de/course/view.php?id=130564>

Einschreibeschlüssel: Gauss

Der Moodle-Kurs wird hauptsächlich für Kommunikation benutzt: Sie müssen sich in den Moodle-Kurs einschreiben, wenn Sie gelegentlich wichtige Ankündigungen über die Vorlesung per E-mail bekommen möchten, und Sie können das Forum außerdem für Diskussionen oder Fragen zu den Übungsaufgaben benutzen. Wesentliche Kursmaterialien wie z.B. das Vorlesungsskript werden nicht im Moodle sondern auf der Website zur Vorlesung veröffentlicht.

**Vorlesung:** Dienstags 11:15–12:45 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)  
Mittwochs 11:15–12:45 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)

**Übung:** Mittwochs 9:15–10:45 in 1.011 (Rudower Chaussee 25)

**Sprache:** Als *BMS Basic Course* wird diese Lehrveranstaltung auf Englisch angeboten, es sei denn, alle Hörerinnen und Hörer den Kurs auf Deutsch hören wollen. Dies wird in der ersten Vorlesung entschieden.

**Voraussetzungen:** Inhalte der Module *Analysis I–II* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I–II*, sowie die Existenz- und Eindeutigkeitssätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und Integration von Funktionen mehrerer Variablen (wie z.B. aus *Analysis III*).

Die wichtigsten Voraussetzungen sind gute Kenntnisse der Differentialrechnung für Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ , inklusive der Sätze über die Umkehrfunktion und implizite Funktionen, und des Transformationsatzes für Integration in  $n$  Variablen.

### Beschreibung

Die Differentialgeometrie beginnt mit dem Betrachten von 1-dimensionalen Kurven und 2-dimensionalen Flächen. Diese dienen als Spezialfälle zur Illustration des viel allgemeineren Begriffs einer glatten *Mannigfaltigkeit* von Dimension  $n \geq 0$ . Mannigfaltigkeiten kommen auf natürlicher Weise in vielen Bereichen der Mathematik sowie der Physik vor, z.B. als Konfigurationsräume für eingeschränkte dynamische Systeme, oder als die gekrümmte Raumzeit in der Einstein'schen Gravitationstheorie (allgemeine Relativitätstheorie). In dieser Vorlesung werden nicht nur Kurven und Flächen sondern auch allgemeine Mannigfaltigkeiten in ei-

nem ziemlich breiten Überblick betrachtet, wobei wir uns bei der Visualisierung meistens auf 2-dimensionalen Beispielen konzentrieren werden. Erstes Ziel ist es, die Grundbegriffe der Glattheit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu verstehen, sowie Ableitungen solcher Abbildungen, Tangentialvektoren, Vektorfelder und die dadurch erzeugten Flüsse. Tensoren werden dann als linear-algebraisches Werkzeug eingeführt, um lokale geometrische Informationen auszudrücken. Als Spezialfall betrachten wir Differentialformen, die einen Begriff von Volumen auf Mannigfaltigkeiten definieren und daher integriert werden können. Als Abschluss des ersten Teils der Vorlesung beweisen wir den Satz von Stokes über Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten; als natürliche  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, impliziert er auch diverse bekannte Resultate in der 2- und 3-dimensionalen Vektoranalysis wie den Divergenzsatz und den Rotationssatz.

Die zweite Hälfte der Vorlesung befasst sich mit Vektorbündeln im Allgemeinen, von denen mehrere Beispiele (z.B. die Menge aller Tangentialvektoren auf einer Mannigfaltigkeit) dann aus der ersten Hälfte schon bekannt sein werden. Der Wunsch nach einer Definition von Ableitungen auf Vektorbündeln führt auf natürlicher Weise zu den Definitionen von Paralleltransport, Zusammenhängen und kovarianter Differentiation. Hieraus gelangt man auf natürliche Art zu der Frage, wann kovariante Ableitungen in verschiedenen Richtungen kommutieren. Die Antwort darauf verlangt die Einführung der *Krümmung*, eines Tensors, dessen Verschwinden die Existenz von "kovariant konstanten" Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten charakterisiert. Zu diesem Beweis gelangt man über die Betrachtung glatter Distributionen und den Integrabilitätssatz von Frobenius. Die überzeugendsten ersten Anwendungen dieser Ideen sind dann in der *Riemannschen Geometrie*: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine mit extra Struktur versehene Mannigfaltigkeit, die die Definition der Längen von Kurven und Schnittwinkel ermöglicht. Wir betrachten *Geodäten*, die kürzesten Wege zwischen naheliegenden Punkten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und wir diskutieren die geometrische Bedeutung des Riemannschen Krümmungstensors in  $n$  Dimensionen, sowie seine einfachere Variante auf Flächen, die sogenannte "gaußsche" Krümmung. Danach können wir eins der schönsten und grundlegendsten Resultate über 2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beweisen: den Satz von Gauß-Bonnet, der eine Beziehung zwischen der Summe der Winkel in einem geodätischen Dreieck und der dadurch umrandeten Krümmung festlegt, oder im Fall von kompakten Flächen ohne Rand, eine Relation zwischen der totalen Krümmung und einer rein topologischen Invariante, der Euler-Charakteristik.

Falls es die Zeit erlaubt gibt es mehrere Möglichkeiten für zusätzliche Themen, die wir noch diskutieren könnten, die meisten davon mit Bezug auf die Physik, u.A. die Hamiltonische Dynamik und symplektische Geometrie, pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und allgemeine Relativitätstheorie, Liegruppen und Lie-Algebren, holomorphe Vektorbündel, Hauptfaserbündel und Eichtheorie. Die meisten dieser Themen werden in den folgenden Semestern in den Vorlesungen *Differentialgeometrie II* und *Differentialgeometrie III* ausführlich diskutiert.

## Wochenplan

Der folgende Zeitplan ist provisorisch.

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Satz über implizite Funktionen, Beispiele, Tangentialvektoren.
2. Tangentialabbildungen, Vektorfelder, Lieklammer und kommutierende Flüsse.
3. Orientierbarkeit, Tensoren, Indexnotation, Differentialformen.
4. Das Lemma von Poincaré, Lie-Ableitung, Cartansche Formel.
5. Zerlegung der Eins, Existenz von Volumenformen und Riemannschen Metriken.
6. Integration, der Satz von Stokes, niedrig-dimensionale Beispiele, De-Rham-Kohomologie.
7. Vektorbündel und Schnitte, Bündelmetriken, Orientierung.
8. Strukturgruppen, Faserbündel, Paralleltransport.

9. Lineare Zusammenhänge, kovariante Ableitungen, Kompatibilität.
10. Zusammenhänge auf Tangentialbündeln, Torsion und Symmetrie, Riemannsche Normalkoordinaten.
11. Levi-Civita-Zusammenhang, Geodäten, Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
12. Integrierbarkeit und der Satz von Frobenius, Krümmung.
13. Lokal flache Mannigfaltigkeiten, zweite Fundamentalform und gaußsche Krümmung.
14. Euler-Charakteristik und der Satz von Gauß-Bonnet für Flächen.
15. Schnittkrümmung, zweite Variationsformel, längenminimierende Geodäten.
16. (weitere Themen, falls Zeit übrig bleibt)

## Literatur

Ein Skript zur Vorlesung wird während des Semesters auf der Website der Lehrveranstaltung veröffentlicht und jede Woche ergänzt. Für alternative Präsentationen vom gleichen Stoff sind die folgenden Quellen empfohlen:

- John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, second edition, Springer GTM 2012  
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I*, 3rd edition with corrections, Publish or Perish 2005  
(verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Freihandbestand)
- Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer GTM 1983  
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Ilka Agricola and Thomas Friedrich, *Globale Analysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*, Vieweg 2001 (oder die englische Übersetzung, AMS 2002)  
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Helga Baum, *Eine Einführung in die Differentialgeometrie*, Vorlesungsskript verfügbar unter  
<https://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/diffgeo1.pdf>

Bemerkung: einige Abschnitte der Bücher von Lee und Warner setzen deutlich tiefergehende topologische Vorkenntnisse voraus als wir in der Vorlesung annehmen wollen, aber Studierende, die Topologie I noch nicht gehört haben, können diese Abschnitte überspringen ohne den Faden zu verlieren.

Die folgende Empfehlung ist besonders für Studierende mit Interesse an der Physik:

- Sean Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, verfügbar unter  
<https://www.preposterousuniverse.com/grnotes/>

Die 2. und 3. Kapitel dieses Skriptes geben eine lesbare und für Physiker sowie Mathematiker geeignete Einführung in die Theorie von Mannigfaltigkeiten und Krümmung.

## Klausur und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine dreistündige **schriftliche Klausur** in der Woche nach Semesterende (mit Nachholtermin in der Woche vor dem Sommersemester) bestimmt. Bücher und Notizen dürfen in der

Klausur benutzt werden. Die Klausuraufgaben werden so konzipiert, dass sie in weniger als 2 Stunden lösbar sein sollen; das heißt, Zeitdruck soll nicht der entscheidende Faktor sein.

**Übungsblätter** werden wöchentlich Mittwochs ausgehändigt und werden in der Übung am folgenden Mittwoch besprochen. Die Aufgaben werden nicht abgegeben oder benotet; trotzdem wird es **dringend empfohlen**, sich jede Woche vor der Übung mit jeder Aufgabe zu befassen.

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte “**take-home midterm**”. Diese hat die Form eines Übungsblatts, das innerhalb von zwei Wochen erarbeitet und abgegeben werden kann und dann bewertet wird. Die Abgabe ist freiwillig, aber je nach erreichter Punktzahl kann dadurch die Prüfungsnote nach der folgenden Regel verbessert werden:

- Midterm 60%–79%  $\Rightarrow$  2,0  $\rightsquigarrow$  1,7 oder 1,7  $\rightsquigarrow$  1,3 usw.
- Midterm 80%–100%  $\Rightarrow$  2,0  $\rightsquigarrow$  1,3 oder 1,7  $\rightsquigarrow$  1,0 usw.