Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

Lehrpersonen: Prof. Chris Wendl (Vorlesung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
`wendl@math.hu-berlin.de`
Sprechstunde: Freitags 11:00–12:00

Jacek Rzemieniecki (Übung)
`jacek.rzemieniecki@hu-berlin.de`

Website: `www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2025/FunkAna/`

Moodle: `moodle.hu-berlin.de/course/view.php?id=136548`
Einschreibeschlüssel: `Hilbert`

Vorlesung: Montags 11:00–12:30 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)
Donnerstags 15:15–16:45 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)

Übung: Donnerstags 13:15–14:45 in 3.007 (Rudower Chaussee 25)

Sprache: Als *BMS Basic Course* wird diese Lehrveranstaltung auf Englisch angeboten, es sei denn, alle Hörerinnen und Hörer den Kurs auf Deutsch hören wollen. Dies wird in der ersten Vorlesung entschieden.

Voraussetzungen: Der Kurs basiert auf den HU-Vorlesungen *Analysis I–III* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I–II*, sowie auf dem analytischen Teil der Vorlesung *Algebra und Funktionentheorie*.

Die Studierenden sollten vor allem mit den Grundsätzen der Maßtheorie (einschließlich des Satzes von Fubini und der Vollständigkeit der L^p-Räume) vertraut sein.

Kurze Beschreibung

Der Kurs behandelt die *lineare* Funktionalanalysis, die sich als die Erforschung stetiger linearer Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen (vor allem Banach- bzw. Hilberträumen) versteht. Die wichtigsten Beispiele solcher unendlich-dimensionaler Vektorräume sind Funktionenräume, die in Anwendungen sehr oft z.B. als Lösungsräume partieller Differentialgleichungen auftauchen. Der Stoff dieser Vorlesung soll also als wesentliche Vorbereitung auf alle weiteren Vorlesungen (sowohl in der Analysis und der angewandten Mathematik als auch in der Differentialgeometrie und der mathematischen Physik) betrachtet werden, die sich mit dem Thema partielle Differentialgleichungen befassen.

Programm

Der Kurs ist in vier Teile untergliedert:

I. **Grundlegende Begriffe** (Wochen 1–3)

II. **Reelle Analysis und L^p-Räume** (Wochen 4–9)

III. **Abstrakte Banachräume** (Wochen 10–12)

IV. **Spektraltheorie** (Wochen 13–15)

Der folgende Wochenplan ist vorläufig und Änderungen vorbehalten.

1. Banachräume und stetige/beschränkte lineare Operatoren, die Operatornorm, grundlegende Begriffe der mengentheoretischen Topologie, topologische Vektorräume, lokal konvexe Vektorräume und Frécheträume, Beispiele
2. Dualräume, das Lemma von Zorn, Hamel-Basen
3. Grundlegende Resultate über Hilberträume: uniforme Konvexität, Rieszscher Darstellungssatz, orthonormale Basen, orthogonale Projektionen
4. Eigenschaften der L^p-Räume auf $\mathbb{R}^n$: Dualität von L^p und L^q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Separabilität von L^p, schwache Konvergenz, der Satz von Banach-Alaoglu
5. Faltung und die Youngsche Ungleichung, Approximation durch glatte Funktionen, absolute Stetigkeit, der Satz von Radon-Nikodym, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
6. Periodische Funktionen und Fourierreihen auf $L^2(\mathbb{T}^n)$
7. Die Fouriertransformation auf dem Schwartz-Raum und $L^2(\mathbb{R}^n)$
8. Die Sobolevräume $H^k(\mathbb{R}^n)$ und $H^k(\mathbb{T}^n)$
9. Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)
10. Die Sätze von Baire und Hahn-Banach
11. Der Satz von der offenen Abbildung, abgeschlossene Unterräume mit abgeschlossenen Komplementen
12. Kompakte Operatoren und Fredholm-Operatoren
13. Das Spektrum eines stetigen linearen Operators auf einem Hilbertraum, Polarzerlegung
14. Spektraltheorie beschränkter Operatoren
15. Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und Spektraltheorie

Literatur

Ein Skript zur Vorlesung wird während des Semesters auf der Website der Lehrveranstaltung veröffentlicht und jede Woche ergänzt. Ansonsten folgt der Kurs keinem einzelnen Buch, aber die folgenden Lehrbücher zum Thema sind herzlich empfohlen, vor allem das Buch von Reed und Simon.

- Reed und Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*, revised and enlarged edition, Elsevier 2011
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)
- Bühler und Salamon, *Functional Analysis*, AMS 2018
  (Preprint-Version gratis auf Salamons Homepage:
  `https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana-ams.pdf`)
- Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer 1985
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)

Prüfung und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine dreistündige **schriftliche Klausur** in der Woche nach Semesterende (mit Nachholtermin kurz vor dem Sommersemester) bestimmt. Bücher und Notizen dürfen in der Klausur benutzt werden. Die Klausuraufgaben werden so konzipiert, dass sie in weniger als 2 Stunden lösbar sein sollen; das heißt, Zeitdruck soll nicht der entscheidende Faktor sein.

Übungsblätter werden wöchentlich Donnerstags auf der Website veröffentlicht, und werden in der Übung am folgenden Donnerstag besprochen. Die Aufgaben werden nicht abgegeben oder benotet; trotzdem wird es **dringend empfohlen**, sich jede Woche vor der Übung mit jeder Aufgabe zu befassen.

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte "**take-home midterm**". Diese hat die Form eines Übungsblatts, das innerhalb von zwei Wochen erarbeitet und abgegeben werden kann. Die Abgabe ist freiwillig, aber je nach erreichter Punktzahl kann die Prüfungsnote nach der folgenden Regel verbessert werden:

- Midterm 60%–79% $\quad\Rightarrow\quad 2,0 \rightsquigarrow 1,7$ oder $1,7 \rightsquigarrow 1,3$ usw.
- Midterm 80%–100% $\quad\Rightarrow\quad 2,0 \rightsquigarrow 1,3$ oder $1,7 \rightsquigarrow 1,0$ usw.